Gh. Andrei
I. Cucurezeanu
C. Caragea
Gh. Bordea

PROBLEME DE ALGEBRĂ

Pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare

Progresii. Inducția matematică. Funcția exponențială și logaritmică.
Analiza combinatorie. Polinoame. Numere complexe.

GH. ANDREI
I. CUCUREZEANU

C. CARAGEA
GH. BORDEA

PROBLEME DE ALGEBRĂ

Pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare

Progresii. Inducția matematică. Funcția exponențială și logaritmică. Analiza combinatorie. Polinoame. Numere complexe.

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A., BUCUREȘTI – 1993

Referenţi: Prof. univ. dr. **O. STĂNĂŞILĂ**
Prof. univ. dr. **C. NĂSTĂSESCU**

CUPRINS

	Enunţuri	Soluţii
I. Progresii	3	129
II. Inducţia matematică	10	142
III. Funcţia exponenţială şi logaritmică . .	17	153
IV. Analiza combinatorie	54	222
V. Polinoame	77	262
VI. Numere complexe	100	324

ISBN 973-30-2926-2

Redactor: Prof. **VALENTIN RADU**
Tehnoredactor: **PARASCHIVA GAŞPAR**
Coperta: **V. WEGEMAN**

Coli de tipar: 24,50
Format: 70×100/16
Bun de tipar: 11.XI.1993
Nr. plan: 36330

Tiparul executat la:
Imprimeria „ARDEALUL" Cluj
B-dul 22 Decembrie nr. 146
Ramânia
Comanda nr. 173

Capitolul I

PROGRESII

1. Numerele a, b, c sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă numerele $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ sînt în progresie aritmetică.

2. Numerele pozitive a, b, c sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă numerele $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ sînt în progresie aritmetică.

3. Dacă numerele $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele a, b, c sînt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$ şi reciproc.

4. Într-o progresie aritmetică avem $a_p = q$ şi $a_q = p$, $p \neq q$ unde a_n este al n-lea termen al progresiei. Calculaţi a_m.

5. Într-o progresie aritmetică termenii de rang m, n, p sînt respectiv a, b, c. Să se arate că:

$$a(n - p) + b(p - m) + c(m - n) = 0.$$

6. Să se afle triunghiurile dreptunghice care au lungimile laturilor numere întregi în progresie aritmetică.

7. Dacă α, β, γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ sînt în progresie aritmetică.

8. Numerele $\sin(-\alpha + \beta + \gamma)$, $\sin(\alpha - \beta + \gamma)$, $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg} \gamma$ sînt în progresie aritmetică.

9. Rădăcinile ecuaţiei:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0.$$

I. Cucurezeanu

10. Rădăcinile ecuaţiei: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $ad \neq 0$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$2c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0.$$

I. Cucurezeanu

11. Rădăcinile ecuaţiei $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $9b^2 = 100ac$.

I. Cucurezeanu

12. În orice progresie aritmetică avem:

$S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}$ unde S_k este suma primilor k termeni ai progresiei.

13. Fie S_m, S_n, S_p respectiv suma primilor m, n, p termeni ai unei progresii aritmetice. Să se arate că:

$$\frac{S_m}{m}(n-p)+\frac{S_n}{n}(p-m)+\frac{S_p}{p}(m-n)=0.$$

14. Dacă într-o progresie aritmetică $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$, atunci $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

15. Într-o progresie aritmetică $a_p=\frac{1}{q}$ și $a_q=\frac{1}{p}$ cu $p\neq q$, să se calculeze suma primilor pq termeni ai progresiei.

16. Într-o progresie aritmetică $S_p=q$, $S_q=p$, $p\neq q$, unde S_n este suma primilor n termeni. Calculați S_{p+q}.

17. Într-o progresie aritmetică suma primilor m termeni este egală cu suma primilor n termeni ($m\neq n$). Să se demonstreze că suma primilor $m+n$ termeni este nulă.

Olimpiada sovietică, 1958

18. Suma cuburilor a n numere întregi în progresie aritmetică este divizibilă prin suma lor.

I. Cucurezeanu

19. Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie aritmetică. Se știe că $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=b^2$. Determinați această progresie.

20. Se dau progresiile $\div$ 1, 5, 9, 13, ...
$\div$ 4, 15, 26, 37, ...
Să se găsească termenii comuni ai acestor progresii și să se arate că aceștia formează o nouă progresie

Etapa finală, 1954

21. Să se arate că șirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru orice $n\geqslant 3$ suma S_n a primilor n termeni este

$$S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n.$$

22. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir de numere reale. Să se arate că acest șir formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru $(\forall)n\geqslant 3$ avem:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

23. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir de numere reale nenule. Acest șir formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru orice $n>2$, avem

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

I. Cucurezeanu

24. O condiţie necesară şi suficientă ca şirul de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ să fie o progresie aritmetică este ca pentru orice $n \geqslant 2$, să avem

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0.$$

25. O condiţie necesară şi suficientă ca şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ să fie o progresie aritmetică este ca pentru orice $n \geqslant 2$, să avem

$$a_1 + C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 + \ldots + C_n^n a_{n+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1},$$

unde $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}$.

26. Fiind dată o progresie aritmetică infinită de numere întregi pozitive cu proprietatea că unul din termenii săi este pătrat perfect, să se demonstreze că progresia conţine o infinitate de astfel de pătrate.

A treia olimpiadă sovietică, 1963

27. Nici o progresie aritmetică infinită de numere naturale şi raţie nenulă, nu poate avea toţi termenii numere prime.

28. Dacă n termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sînt primi cu n, atunci raţia progresiei nu este primă cu n.

29. Să se demonstreze că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi simultan termeni ai unei aceleiaşi progresii aritmetice.

30. Fie a, b, c trei numere naturale cu $(a, b, c) = 1$.
Dacă $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sînt termeni, nu neapărat consecutivi, ai unei progresii aritmetice, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sînt numere naturale.

I. Cucurezeanu

31. Dacă şirul de numere reale pozitive $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ formează o progresie aritmetică, atunci

$$\sqrt{\frac{a_0}{a_{2n}}} < \frac{a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2n-1}}{a_2 a_4 a_6 \ldots a_{2n}} < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+1}}} \text{ pentru orice } n.$$

32. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o progresie aritmetică crescătoare de numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{a_1}{a_4} \cdot \frac{a_3}{a_6} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+2}} < \sqrt{\frac{a_1 a_8}{a_{2n+2}\, a_{2n+3}}}.$$

33. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o progresie aritmetică de numere nenule şi raţie $r \neq 0$. Să se arate că:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \ldots + \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2n+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2n}} = \frac{1}{r}\left(\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2n+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2n}} - a_1\right).$$

Să se deducă apoi egalitatea:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

34. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o progresie aritmetică de numere nenule și rație $r \neq 0$. Să se demonstreze identitățile:

a) $\frac{a_1a_3}{a_2} + \frac{a_1a_3a_5}{a_2a_4} + \ldots + \frac{a_1a_3 \cdots a_{2n+1}}{a_2a_4 \cdots a_{2n}} = \frac{1}{3r}\left(\frac{a_1a_3 \cdots a_{2n+3}}{a_2a_4 \cdots a_{2n}} - a_1a_3\right)$.

b) $\frac{a_1}{a_1a_4} + \frac{a_1a_3}{a_2a_4a_6} + \ldots + \frac{a_1a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_2a_4 \cdots a_{2n+2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1a_3 \cdots a_{2n+1}}{a_2a_4 \cdots a_{2n+2}}\right)$.

35. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o progresie aritmetică de numere nenule și rație $r \neq 0$. Să se calculeze:

$$\frac{a_1}{a_4} + \frac{a_1a_3}{a_4a_6} + \ldots + \frac{a_1a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_4a_6 \cdots a_{2n+2}}.$$

36. Să se formeze o progresie aritmetică cu n termeni pozitivi știind că produsul dintre primul termen și rație este a, iar suma progresiei este minimă. În ce caz termenii progresiei sînt numere întregi?

I. Cucurezeanu

37. a) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică cu rația $r \neq 0$ atunci șirul $b_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$, $k = \overline{2, \ldots n}$, $b_1 = a_1$ este o progresie aritmetică cu rația $\frac{r}{2}$.

b) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu rația $q > 0$, atunci șirul $b_k = \sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}$, $k = \overline{2 \ldots n}$, $b_1 = a_1$, este o progresie geometrică cu rația $\sqrt{q}$.

Gheorghe Andrei

38. Numerele a^2, b^2, c^2 sînt în progresie geometrică dacă și numai dacă numerele $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+a}$ sînt în progresie geometrică.

39. Dacă numerele:

$$x = \frac{1}{b-a}, \quad y = \frac{1}{2b}, \quad z = \frac{1}{b-c}, \quad a \neq b \neq c, \quad b \neq 0$$

sînt în progresie aritmetică, atunci a, b, c sînt în progresie geometrică.

40. Dacă numerele $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} y$ și $\operatorname{arctg} z$ sînt în progresie aritmetică, atunci numerele $x^2 + 1$, $xy + yz - xz + 1$, $z^2 + 1$ sînt în progresie geometrică.

Ion Cucurezeanu

41. Condiția necesară și suficientă pentru ca numerele x, y, z să fie în progresie geometrică este ca

$$xyz(x^3 + y^3 + z^3) = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$$

Ion Cucurezeanu

42. Dacă a, b, c, d sînt patru numere reale în progresie geometrică, atunci $a^2 + d^2 \geqslant b^2 + c^2$.

43. Într-o progresie geometrică termenii de rang m, n, p sînt respectiv a, b, c. Să se arate că: $a^{n-p}b^{p-m}c^{m-n} = 1$.

44. Într-o progresie geometrică, termenul de rang $p+q$ este m, termenul de rang $p-q$ este n. Să se arate că termenul de rang p este $\sqrt{mn}$ și termenul de rang q este $m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$.

45. Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi produsul primilor m termeni este egal cu produsul primilor n termeni ($m \neq n$). Să se demonstreze că produsul primilor $m+n$ termeni este 1.

46. Într-o progresie geometrică de numere reale pozitive $P_m = n$, $P_n = m$, $m \neq n$, unde P_k este produsul primilor k termeni ai progresiei. Calculați P_{m+n}.

47. Dacă în progresia geometrică $\div 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ numărul termenilor se divide prin k, atunci suma progresiei se divide prin $2^k - 1$.

48. Demonstrați că:

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)^2 - a^n =$$
$$= (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n+1}).$$

49. În orice progresie geometrică avem:

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2,$$

unde S_k este suma primilor k termeni ai progresiei.

50. Într-o progresie geometrică finită se cunosc primii doi termeni a, b și suma S a tuturor termenilor ei. Calculați suma pătratelor termenilor progresiei.

51. Într-o progresie geometrică finită se dau primul termen a, ultimul termen z și suma S a tuturor termenilor progresiei. Calculați suma pătratelor termenilor acestei progresii.

52. Să se arate că dacă numerele nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt în progresie geometrică, atunci:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n = a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2\left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \ldots \frac{1}{a_n^n}\right).$$

53. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie geometrică.

Se cunosc $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

$$S_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Aflați produsul: $P = a_1 a_2 \ldots a_n$ în funcție de S_1 și S_2.

54. Să se arate că:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)^{-1} + \ldots + \left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}, \quad (a \neq 0,\ a \neq \pm 1).$$

55. Termenii unei progresii geometrice sînt aşezaţi în modul următor:

$$a,$$
$$aq, aq^2,$$
$$aq^3, aq^4, aq^5,$$
$$\ldots\ldots$$

Să se calculeze suma şi produsul termenilor din linia de rang p.

56. Există trei numere naturale diferite, cuprinse între pătratele a două numere naturale consecutive, în progresie geometrică?

Marcel Chiriţă

57. Eliminaţi p şi q din egalităţile:

$$a = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k + \ldots \qquad (|p| < 1)$$
$$b = 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots \qquad (|q| < 1)$$
$$c = 1 + pq + (pq)^2 + \ldots + (pq)^k + \ldots .$$

58. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ un şir de numere reale pozitive şi P_n produsul primilor n termeni ai şirului.
Dacă $P_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n}$ pentru orice n, atunci şirul formează o progresie geometrică.

Ion Cucurezeanu

59. Şirul de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie dacă şi numai dacă pentru orice $n \geqslant 2$ avem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_n a_{n-1})^2.$$

60. Condiţia necesară şi suficientă ca rădăcinile ecuaţiei:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \; a \neq 0,$$

să fie în progresie geometrică este ca $ac^3 = b^3 d$.

61. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică cu raţia r şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ o progresie geometrică cu raţia q.

Să se calculeze sumele: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$; $S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$.

62. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$, o progresie geometrică ambele cu termeni pozitivi.
Dacă $a_1 = b_1$ şi $a_n = b_n$, atunci

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

63. Se consideră o progresie aritmetică $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şi progresia geometrică $b_1, b_2, b_3, \ldots$, ambele cu termeni pozitivi şi $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$. Demonstraţi că $a_n \leqslant b_n$ pentru orice n.

64. Se consideră o progresie aritmetică şi una geometrică, ambele cu termeni pozitivi. Dacă trei termeni oarecari ai progresiei aritmetice sînt respectiv egali cu termenii de acelaşi rang din progresia geometrică, atunci cele două progresii coincid.

Ion Cucurezeanu

65. Din nici o progresie geometrică infinită formată din numere reale pozitive distincte, nu se poate extrage o progresie aritmetică infinită.

Ion Cucurezeanu

66. Din progresia aritmetică infinită $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+nd,\ \ldots$ $d\neq 0$ se poate extrage o progresie geometrică infinită dacă şi numai dacă $\frac{a}{d}$ este raţional.

N. B. Vasiliev

67. Se construieşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel: a_1, a_2, a_3 sînt în progresie geometrică, a_2, a_3, a_4 sînt în progresie aritmetică, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică şi aşa mai departe. Să se calculeze termenul general al şirului în funcţie de a_1, a_2 şi n.

Horea Banea

68. Să se determine trei numere întregi în progresie aritmetică, astfel încît produsul oricăror două dintre ele să fie un pătrat perfect.

Ion Cucurezeanu

69. Să se determine partea întreagă a numărului

$$S_n=\sqrt[a_2]{\frac{a_2}{a_1}}+\sqrt[a_3]{\frac{a_3}{a_2}}+\ \ldots\ +\sqrt[a_n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt termenii unei progresii aritmetice cu $a_1\in\mathbf{N}^*$ şi $r\in\mathbf{N}^*$.

Laszlo Balog

70. Rădăcinile ecuaţiei $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, $a\neq 0$, sînt în progresie geometrică dacă şi numai dacă

$$(b^2-ac)(b^2+c^2-2ac)=b^2(a-c)^2 \text{ sau } b=0,\ c=-2a.$$

Ion Cucurezeanu

71. Dacă şirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots$ se împarte în cîteva progresii aritmetice, atunci în una (cel puţin) din aceste progresii primul termen se divide cu raţia.

A. V. Kelarev

72. Mulţimea $\mathbf{N}^+$ se partiţionează în $n\geq 2$ progresii de raţii $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Să se arate că $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ \ldots\ +\frac{1}{r_n}=1$.

Gabriel Istrate

Capitolul II

INDUCȚIA MATEMATICĂ

1. Să se demonstreze identitățile:

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1)$.

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

c) $(n+1)(n+2) \ldots (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$.

d) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

e) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n+2}{3(n+3)}$.

f) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$.

2. Să se arate că:

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^4 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

I. Tomescu

3. Să se arate că:

a) $3 \cdot 5 \cdot 17 \ldots (1 + 2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \ldots (1+x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^n - 1}$.

4. Să se demonstreze că: a) $2^n n! < (n+1)^n, \ n > 1$.

b) $n^n < (n!)^2 < 2^{n(n-1)}, \ n > 2$.

c) $(1-x)^n + (1+x)^n \leqslant 2^n, \ |x| \leqslant 1$.

d) $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots + \sqrt{5}}} < \sqrt{5} + 1$.

5. Să se demonstreze că: a) $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

b) $17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

c) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

6. Dacă $x + y = u + v$ și $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, atunci $x^n + y^n = u^n + v^n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

7. Pentru orice m impar și k întreg pozitiv

$$2^{k+2} \mid m^{2^k} - 1.$$

8. Pentru oricare numere naturale m și n, avem

$$m!\,n! \mid (m+n)!.$$

Generalizare: $m_1!\,m_2! \ldots m_k! \mid (m_1 + m_2 + \ldots + m_k)!$.

9. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$. Să se arate că

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1! a_2! \ldots a_n!} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

10. Dacă a, b, c sînt numere întregi şi $a + b + c \mid abc$, atunci $a + b + c \mid a^n + b^n + c^n$ pentru orice număr natural impar n.

11. Fie a, b, c trei numere întregi. Să se arate că dacă $a - b + c \mid ac$, atunci $a - b + c \mid a^n - b^n + c^n$ pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

G. Oboroceanu

12. Să se demonstreze că:

$$(a + b)^n \leqslant 2^n(a^n + b^n), \text{ unde } a, b \in \mathbf{R}, \ n \text{ natural } \geqslant 2.$$

13. Să se arate că:

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n+1} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}.$$

Ion Cucurezeanu

14. Fie $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$ (n radicali).
Demonstraţi:

$$\frac{2 - a_n}{2 - a_{n-1}} > \frac{1}{4}.$$

15. Să se arate că:

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

16. Să se demonstreze că pentru $n > 1$,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

17. Pentru orice număr natural $n > 1$, avem

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{2n}}.$$

18. Fie $a_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i} \leqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Dorin Arventiev

19. Fie $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Să se arate că:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$

Olimpiada bulgară, 1976

20. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, $n > 1$, atunci

$$\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n + \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n \leqslant 1.$$

21. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ şi $n > 1$, atunci

$$\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n.$$

Olimpiada poloneză, 1953—54

22. Dacă $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, atunci

1) $\sin(a_1 - a_2) + \sin(a_2 - a_3) + \ldots + \sin(a_{n-1} - a_n) + \sin(a_n - a_1) \leqslant 0.$

2) $\operatorname{tg}(a_1 - a_2) + \operatorname{tg}(a_2 - a_3) + \ldots + \operatorname{tg}(a_{n-1} - a_n) + \operatorname{tg}(a_n - a_1) \geqslant 0.$

Alin Pop

23. Pentru orice număr natural n,

$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) > \frac{2}{3} n^2$, unde $\sigma(k)$ este suma divizorilor pozitivi ai lui k.

Ion Cucurezeanu

24. Fie $S_n = a_1 + (a_1 + 1)a_2 + (a_1 + 1)(a_2 + 1)a_3 + \ldots + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_{n-1} + 1)a_n$.

Demonstraţi că:

$$S_n = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) - 1.$$

25. Fie şirurile de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ şi $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Să se demonstreze identitatea lui ABEL.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k + b_n S_n, \qquad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

26. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ îndeplinind condiţiile:

a) $f(p) = p$, dacă p este prim.

b) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Să se arate că $f(n) = n$.

27. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ îndeplinind condiţiile

a) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ pentru orice $m, n \in \mathbf{N}^*$.

b) $f(m) > f(n)$ dacă $m > n$.

c) $f(2) = 2$.

Să se arate că $f(n) = n$.

Olimpiada din Canada 1971

28. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ ce satisface condiţiile:

1) $f(1) = 1$.

2) $\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \ldots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n)+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Să se arate că $f(n) = n$.

29. Dacă n este par, k natural arbitrar şi

$$S_k = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^k)^n,$$

atunci cea mai mare putere a lui 2 care divide pe S_k este 2^{k-1}.

Ion Cucurezeanu

30. Fie $n > 2$ întreg şi P_n produsul numerelor impare inferioare lui 2^n. Să se demonstreze că cea mai mare putere a lui 2 care divide pe $P_n - 1$ este 2^n.

31. Dacă p este un număr natural de forma $4m + 1$, atunci suma $\binom{n}{1} + \binom{n}{3}p + \binom{n}{5}p^2 + \binom{n}{7}p^3 + \ldots$ se divide prin 2^{n-1}.

32. Să se demonstreze prin inducţie teorema lui Fermat: Dacă p este prim şi a întreg, atunci $a^p - a$ se divide prin p.

33. Dacă m şi n sînt numere naturale ($n > 1$), atunci

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2},$$

unde $\{k\}$ este partea fracţionară a lui k.

Ion Cucurezeanu

34. Demonstraţi că fiecare număr natural nedepăşind pe $n!$ poate fi reprezentat ca sumă a cel mult n termeni distincţi, fiecare din ei fiind divizor al lui $n!$

Olimpiada sovietică, 1968

35. Pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, există un număr natural m, care se poate reprezenta simultan ca sumă de 2, 3, ..., n pătrate de numere întregi nenule.

Marius Cavachi

36. Se consideră numărul: $A = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^n$ unde a şi n sînt numere naturale, ($a, n \geqslant 2$). Să se arate că există un număr natural k pentru care

$$A = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Olimpiadă Moscova, 1973

37. Să se demonstreze prin inducţie că termenul general u_n al şirului lui Fibonacci (şir definit prin condiţiile $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) este: $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

38. Demonstraţi, pentru şirul lui Fibonacci, relaţiile

1° $u_{n+p-1} = u_{n-1}u_{p-1} + u_n u_p$.
2° $u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$.
3° $u_{2n-1} = u_n u_{n+1} - u_{n-2}u_{n-1}$.

39. Într-un şir Fibonacci (definit prin condiţiile $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$) au loc relaţiile:

1° $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$.
2° $1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1}$.
3° $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$.
4° $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

5° $u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n-1}$.
6° $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$.
7° $u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$.

40. Fie $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ şirul lui Fibonacci.

Demonstraţi că: $\frac{u_2}{u_1u_3} + \frac{u_3}{u_2u_4} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n-1}u_{n+1}} = 2 - \frac{u_{n+2}}{u_nu_{n+1}}$.

41. Suma oricăror m termeni consecutivi ai şirului lui Fibonacci **nu** poate fi un termen al acestui şir dacă $m \geqslant 3$.

42. Orice număr natural este suma unor termeni distincţi ai şirului lui Fibonacci (şir definit prin condiţiile: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

V. E. Hogatt

43. Fie şirul $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ definit astfel

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}), \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Să se arate că:

$$x_n = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).$$

44. Se consideră şirul u_n definit prin condiţiile $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$. Să se demonstreze că u_n este o putere a lui 2 dacă şi numai dacă n este o putere a lui 2.

Ion Cucurezeanu

45. Fie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ un şir definit astfel $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$, oricare ar fi $n \geqslant 2$.
Să se arate că $[x_n] = n - 2$, $(\forall)\ n \geqslant 3$.

C. Caragea

46. Fie a şi $A > 0$ numere arbitrare date şi

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right), \ldots, a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right).$$

Demonstraţi că

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}$$

47. Şirul $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ şi $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ sînt definite astfel:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \quad (\forall)n \geqslant 0,$$

iar a_0 şi b_0 sînt numere pozitive date.

Demonstraţi că: $\frac{a_n - \sqrt{a_0b_0}}{a_n + \sqrt{a_0b_0}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{a_0b_0}}{a_0 + \sqrt{a_0b_0}}\right)^{2^n}$.

48. Fie un şir definit prin recurenţă astfel:

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 4.$$

Să se demonstreze că termenii săi sînt pătrate perfecte.

Ion Cucurezeanu

49. Fie $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ unde $\lfloor a \rfloor$ este cel mai apropiat întreg de a. Să se determine a_n.

Ion Cucurezeanu

50. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit astfel: $a_1 = 1,\ a_2 = 12,\ a_3 = 20$

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

Demonstraţi că pentru orice n, $1 + 4a_n a_{n+1}$ este un pătrat perfect.

Kvant, 1989

51. În şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ fiecare membru, începînd cu al treilea este suma celor două anterioare, unde $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1$. Cîte numere au în comun cele două şiruri?

52. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurenţă

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}, \quad a_1 = \frac{3}{2}.$$

Să se demonstreze că: $\sqrt{n-1} + \frac{1}{2} < a_n \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2}$.

Ion Cucurezeanu

53. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel:

$$x_1 = \alpha \in (0, 1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \left(\frac{x_n}{n}\right)^2, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Arătaţi că $x_n < \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Ambro Florin

54. Să se demonstreze că, oricare ar fi n natural, există un număr natural M de n cifre format numai cu cifrele 1 sau 2, care se divide cu 2^n.

55. Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verifică condiţiile

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1,\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2,\ \ldots,\ a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}.$$

Demonstraţi că în suma $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ se pot alege semnele $+$ şi $-$, aşa ca $0 \leqslant S \leqslant a_1$.

A şasea olimpiadă sovietică, 1966

56. Orice număr întreg k poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri sub forma $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2$ pentru un anumit întreg pozitiv m şi o anumită alegere a semnelor $+$ sau $-$.

P. Erdös, M. Surdny

57. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale pozitive iar A și G sînt respectiv media lor aritmetică și geometrică, atunci:

$$(1 + G)^n \leqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \leqslant (1 + A)^n$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

58. Numărul soluțiilor naturale nenule ale ecuației

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

cu $m \geqslant n$ (naturale) este C_{m-1}^{n-1}.

59. Dacă a, b, c sînt întregi și $a^2 + b^2 = c^2$, atunci expresiile

$$E_n = a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} \text{ și } F_n = (ab)^{2^n} + (bc)^{2^n} + (ac)^{2^n}$$

pentru $n \geqslant 2$ se divid prin $D = \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4)$.

60. Se dau numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n$ astfel încît sumele $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ și $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ să fie egale între ele și mai mici decît mn. Să se demonstreze că în egalitatea: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ se pot suprima o parte din termeni obținîndu-se o nouă egalitate.

K. Sibirski

Capitolul III

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI LOGARITMICĂ

§ 1. PROPRIETĂȚI

1. $a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$, $a, b, c \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

2. $a^{\log_a^b} = b$, $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

3. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^\alpha = \alpha$.

4. $a^{\log_b^c} = c^{\log_b^a}$, $a, b, c \in (0, \infty)$, $b \neq 1$.

5. $\log_a A \cdot B = \log_a |A| + \log_a |B|$; $a \in (0, \infty) - \{1\}$, $AB > 0$.

6. $\log_a A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \log_a |A_1| + \log_a |A_2| + \ldots + \log_a |A_n|$,
$a \in (0, \infty) - \{1\}$, $A_1 A_2 \ldots A_n > 0$.

7. $\log_a A^n = n \log_a A$, $a, A \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

8. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

9. $\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b} = \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

10. $\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|$; $\log_{a^{2m}} b^{2n} = \frac{n}{m} \log_{|a|} |b|$, $a \in (0, \infty) - \{1\}$, $b \neq 0$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \neq 0$.

11. $\log_a \frac{A}{B} = \log_a |A| - \log_a |B|$ $a \in (0, \infty) - \{1\}$, $AB > 0$.

12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$.

13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a, b \in (0, \infty) - \{1\}$.

14. $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$, $a, b \in (0, \infty) - \{1\}$.

15. $\log_a \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$, $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

§ 2. EXERCIȚII PROPUSE

1. a) Dacă $a = \lg 5$ și $b = \lg 3$, să se calculeze $\log_{30} 8$.

b) Dacă $\log_{40} 100 = a$, să se calculeze $\log_{16} 25$.

c) Dacă $\log_{12} 27 = a$, să se calculeze $\log_6 16$.

d) Dacă $\lg 2 = a$ și $\log_2 7 = b$, să se calculeze $\lg 56$.

e) Dacă $\log_{45} 25 = a$, să se calculeze $\log_{15} 27$.

f) Dacă $\log_6 15 = a$ și $\log_{12} 18 = b$, să se calculeze $\log_{25} 24$.

g) Dacă $\log_{30} 5 = a$ și $\log_{30} 3 = b$, să se calculeze $\log_{30} 7{,}\dot{2}$ și $\log_{30} 8$.

h) Dacă $\log_{154}111 = a$ și $\log_{154}7 = b$, să se calculeze $\log_{154}4$.

i) Dacă $\log_{108}N = a$ și $\log_{72}N = b$, să se calculeze $\log_2 N$ și $\log_3 N$.

j) Dacă $\log_{14}7 = a$ și $\log_{14}5 = b$, să se calculeze $\log_{35}28$.

k) Dacă $\log_{60}3 = m$ și $\log_{60}5 = n$, să se calculeze $\log_3 4 + \log_{12}2$.

l) Dacă $\log_{12}18 = a$ și $\log_{24}54 = b$, atunci $ab + 5(a - b) = 1$.

m) Dacă $\log_{30}3 = a$ și $\log_{30}5 = b$, să se calculeze $\log_{30}8$.

2. Să se arate că: 1°. $\log_3 2{,}6 \cdot \log_5 5{,}76 = \log_5 2{,}4 \cdot \log_3 6{,}76$.

$$2°.\ \frac{\log_3 12}{\log_{36}3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108}3} + 1 = \frac{\log_3 135}{\log_{15}3} - \frac{\log_3 5}{\log_{45}3} = 3.$$

3. Să se arate că următoarele numere sînt iraționale

$$\lg 2,\ \lg 5,\ \log_2 3,\ \log_3 5.$$

4. Să se arate că numerele:

$A = \log_{ab} c^d$, $B = \log_{ad} c^b$, $C = \log_{cd} a^b$, $D = \log_{cb} a^d$ au același semn.

5. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty) - \{1\}$. Să se arate că:

$$\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a = 1. \text{ Generalizare.}$$

6. Fie relațiile:

1) $2\lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$, să se deducă valoarea lui $\frac{x}{y}$.

2) $2\lg\left(x - \frac{2}{y}\right) = \lg x - \lg y$, să se deducă valoarea lui xy.

7. Să se elimine x din relațiile (sau să se determine o relație între a și b).

$$1°.\ a = \log_2 x,\ b = \log_{2x} 2.$$
$$2°.\ a = \log_{x^3} 3,\ b = \log_3 9x.$$

8. Să se arate că $a^{x^2} + a^{y^2} = 2a^{xy}$, dacă și numai dacă $x = y$, $(a > 1)$.

9. a) Dacă $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ și $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$,

atunci $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$, $x, y, z \in (0, \infty) - \{1\}$.

b) Dacă $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ și $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$,

atunci $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$ $a, b, c \in (0, \infty)$.

c) Dacă $60^a = 3$ și $60^b = 5$, atunci $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} \in \mathbf{N}^*$.

10. Să se arate că $1 + \log_b a = \log_{a+b} a$, dacă și numai dacă

$$\log_a x + \log_b x = \log_{a+b} x,\ \forall x \in (0,\infty) - \{1\}.$$

11. Dacă $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$, distincte și $b^2 = ac$, atunci, $\forall x \in (0, \infty) - \{1\}$.

a) $\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$, b) $\frac{\log_b(\log_b a)}{a^{\log_b a}} = \log_b a$.

12. Fie $a, b \in (1, \infty)$, $a > b$ și $a - b \neq 1$, $A = \log_a(a - b)$ și $B = \log_b(a - b)$. Să se arate că $a^2 + b^2 = 3ab$ dacă și numai dacă $A + B = 2AB$.

13. Să se determine o relație între numerele $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$ $abc \neq 1$, știind că $\log_a x_0 + \log_b x_0 + \log_c x_0 = \log_{abc} x_0$, unde

$$x_0 \in (0, \infty) - \{1\}.$$

14. Să se arate că:

1) $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow \lg \frac{a+b}{3} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$.

2) $a^2 + b^2 = 23ab \Leftrightarrow \lg \frac{a+b}{5} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$.

3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 11 \Leftrightarrow \lg \frac{|a-b|}{3} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$, $a, b \in (0, \infty)$.

15. Dacă $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$, atunci

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a}.$$

16. Dacă $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$ și $abc = 1$, atunci

$$\left(\frac{1}{\log_a x}\right)^3 + \left(\frac{1}{\log_b x}\right)^3 + \left(\frac{1}{\log_c x}\right)^3 = \frac{3}{\log_a x \log_b x \log_c x}, \quad \forall x \in (0, \infty) - \{1\}.$$

17. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ $c \pm b \neq 1$ și $a^2 + b^2 = c^2$, atunci

$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \log_{c-b} a$; reciproc este adevărat?

18. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}\left(\lg \frac{x}{y}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{y}{z}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{z}{x}\right) = \operatorname{tg}\left(\lg \frac{x}{y}\right) \operatorname{tg}\left(\lg \frac{y}{z}\right) \operatorname{tg}\left(\lg \frac{z}{x}\right)$$

oricare ar fi $x, y, z \in (0,1)$.

Andrei Gheorghe

19. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, există $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{Q} \cap (1,2]$, astfel încît $\lg(n+1) = \lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n$.

Etapa locală — Teleorman 1986

20. Fie $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$.
Să se arate că

1) $ma^{\log_c b} + nb^{\log_c a} = (m+n)c^{\log_c a \log_c b}$. 2) $a^{\sqrt[n]{\log_a b}} = b^{\sqrt[n]{\log_a^{n-1} b}}$

Gh. Andrei, Etapa locală — Constanța 1978

21. a) Fie $a, b, c \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $c \neq a, b$.
Să se arate că $ab = c$, dacă și numai dacă $\log_a \frac{a}{c} = \log_{b/c} b$.

b) Fie $a, b, c, x \in (0,1)$ sau $(1,\infty)$. Să se arate că $\log_a x$, $\log_b x$ $\log_c x$, sînt în progresie geometrică, dacă și numai dacă

$$\log_a b = \log_b c.$$

22. Să se arate că dacă $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ac} b$, $z = \log_{ab} c$, atunci

$$a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1.$$

23. Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$.

Să se arate că $[\log_n x] = [\log_n [x]]$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

24. Dacă numerele x, y, z strict pozitive și distincte satisfac egalitățile

$$\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y}, \text{ atunci } x^x y^y z^z = 1.$$

Țițimeaua Nicolae, Etapa locală — Constanța 1979

25. Dacă $x, y, z \in (0,\infty) - \{1\}$ sînt distincte și satisfac egalitățile

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(x+z-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z}, \text{ atunci } x^y y^x = z^x \cdot x^z = y^z \cdot z^y.$$

26. Dacă $\log_{bc} x$, $\log_{ac} x$, $\log_{ab} x$ sînt în progresie aritmetică, atunci și $\log_x^2 a$, $\log_x^2 b$, $\log_x^2 c$ sînt în progresie aritmetică.

Revista — Galați 1985

27. Să se arate că dacă $x = \log_a bc$, $y = \log_b ac$, $z = \log_c ab$, atunci $x + y + z + 2 = xyz$.

28. Să se arate că:

$$\log_a b \cdot \log_{ab} b = \log_a b - \log_{ab} b, \quad \forall\, a,b \in (0,\infty),\ a \neq 1,\ ab \neq 1.$$

29. Să se demonstreze egalitatea:

$$\log_a d \log_b d + \log_b d \log_c d + \log_c d \log_a d = \frac{\log_a d \log_b d \log_c d}{\log_{abc} d},$$

oricare ar fi $a, b, c, d \in (0, 1) \cup (1,\infty)$.

30. Fie numerele strict pozitive a, b, c.

Să se arate că a, b, c sînt în progresie geometrică, dacă și numai dacă numerele $\log a$, $\log b$, $\log c$ sînt în progresie aritmetică.

31. Fie $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ o progresie geometrică respectiv aritmetică cu termeni pozitivi.

În ce bază se poate lua logaritmul de mai jos astfel încît

$$\log_x a_n - b_n = \log_x a - b.$$

32. Să se arate că $\log_a b = \log_{a'} b'$ dacă și numai dacă

$$\log_a a' = \log_b b', \quad \forall\, a, b, a', b' \in (0,\infty) - \{1\}.$$

Andrei Gheorghe

Să se verifice egalitățile:

33. $\log_{a_1} a_2 \log_{a_2} a_3 \ldots \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_1} a_n$, $a_i \in (0,\infty) - \{1\}$, $i = \overline{1,n}$.

34. $$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots \frac{1}{\log_{a_n} x}},$$

$$x, a_1, a_2, \ldots a_n \in (0,\infty) - \{1\}.$$

35. $a^{\sqrt{\log_{a^b}}} + a^{\sqrt[3]{\log_{a^b}}} + \ldots + a^{\sqrt[n]{\log_{a^b}}} = b^{\sqrt{\log_{b^a}}} + b^{\sqrt[3]{\log_{b^a}}} + \ldots + b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1}a}}$.

36. 1) $\sum_{k=2}^{n} \log_a[\log_k(n-k+2)] = 0$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \log_{a_k} a_i} = 1$.

37. $(n-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{a_k} x} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{\log_{a_i a_j} x}$; $x, a_1, \ldots, a_n \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ şi $a_i a_j \neq 1$, $\forall\, i \neq j$.

38. Fie $a_i, x_i \in (0, \infty) - \{1\}$, $i = 1, \ldots, n$ şi $\sigma \in S_n$.

(S_n mulţimea permutărilor de ordin n), atunci

$$\log_{a_1} x_1 \log_{a_2} x_2 \ldots \log_{a_n} x_n = \log_{a_{\sigma(1)}} x_1 \log_{a_{\sigma(2)}} x_2 \ldots \log_{a_{\sigma(n)}} x_n =$$
$$= \log_{a_1} x_{\sigma(1)} \cdot \log_{a_2} x_{\sigma(2)} \ldots \log_{a_n} x_{\sigma(n)}.$$

39. $\frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \ldots + \log_3 n} + \ldots +$
$$+ \frac{1}{\log_n 1 + \log_n 2 + \ldots + \log_n n} = 1.$$

Etapa locală — Timiş 1977

40. Să se arate că oricare ar fi $a_k \in (0, \infty) - \{1\}$ şi $x_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$ are loc egalitatea:

$$x_1 \lg \frac{a_1}{a_2} + (x_1 + x_2) \lg \frac{a_2}{a_3} + \ldots + (x_1 + x_2 + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-1}) \lg \frac{a_{n-1}}{a_n} + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \lg a_n = \lg (a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}).$$

40.' Să se demonstreze inegalităţile:

a) $\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_2 3$,

b) $2\sqrt{2} < \log_2 3 + \log_3 4 < 3$,

c) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3} + 7 > \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} \frac{1}{4}$,

d) $\frac{5}{9} < \log_{17} 6 < \frac{13}{20}$,

e) $\sqrt[7]{17} < \frac{3}{2} < \log_{17} 71$,

f) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} < 3 < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$,

g) $\log_3 6 < \log_2 5$,

h) $\lg^2 19 > 2 \lg 6$,

i) $6 \lg^2 6 > 25 \lg 2 \lg 3$.

41. Fie A, $A = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$. Să se calculeze $[A]$.

Matematica v'şcole 1981

42. Să se demonstreze inegalitățile

1) $\frac{1}{\log_{17}34 - \log_{34}68} > 20$, (Olimpiada Cuba).

2) $6 \lg^2 6 > 25 \lg 3 \lg 2$, (G.M nr. 7/1985).

3) $\lg^2 9 + \lg^2 11 > \lg 98$, (G.M. nr. 5/1987).

4) $\log_3 7 \log_3 11 > \log_5^5 10$, (G.M. nr.4/1987).

5) $\lg 2 > 0{,}3$; $\lg 3 < 0{,}48$; $\lg^2 9 < \lg 8$.

R.M.T. nr. 1/1985

6) $\log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 9 < 3{,}3$,

7) $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

43. Se dau numerele $A = \log_a b$ și $B = \log_{na} nb$, unde $a, b, n \in (1, \infty)$ și $a < b$. Care dintre ele este mai mare?

Liviu Pîrșan

44. Să se arate că

$$\lg 1{,}2 + \lg 1{,}02 + \ldots + \lg \underbrace{1{,}00\ldots02}_{n} < 2 \lg (1{,}1)(1{,}01)\ldots(1{,}00\ldots01).$$

45. Pentru ce valori ale lui $a, b, c, d \in (0,\infty) - \{1\}$ are loc inegalitatea $(\log_c a - \log_d a)(\log_c b - \log_d b) > 0$.

46. Să se arate că

a) $\log_3(a^2 + ab + b^2) > 1 + \log_3 a + \log_3 b$, $a,b \in (0,\infty)$, $a \neq b$.

b) $3(\log_a^2 b + \log_b^2 a) + 12 > 8(\log_a b + \log_b a)$, $a,b \in (0,\infty) - \{1\}$.

c) $\log_2(a + b) > 1 + \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2}$, $a,b \in (0,\infty) - \{1\}$, $a \neq b$.

47. Să se compare numerele

a) $\log_a b$ și $\log_b a$,

b) $\log_a b$ și $\log_{a+1} b$,

c) $\log_a b$ și $\frac{b}{a}$.

48. Dacă $a,b \in (1,\infty)$, atunci au loc inegalitățile:

1) $\log_{a+1} b < \log_a b < \log_a(b + 1)$,

2) $\log_{a+1} b < \log_{a+1}(b + 1) < \log_a(b + 1)$.

3) Să se stabilească relația de ordine între numerele $\log_a b$ și $\log_{a+1}(b + 1)$.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța, 1980

49. Să se arate că

$$2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{a+c} < 1 + 2^{a+b+c+1}, \quad \forall\, a, b, c \in (0,\infty).$$

50. a) Dacă x, y, z sînt pozitive și în progresie aritmetică, atunci

$$2e^y \leqslant e^x + e^z.$$

b) Dacă x, y, z sînt pozitive, supraunitare și în progresie geometrică, atunci $\log_x y \geqslant \log_y z$.

Aristide Leonte

51. Pentru ce valori pozitive ale lui x are loc inegalitatea:

$$[\log_{12} x] \leqslant [\log_{11} x]?$$

52. Fie $a, b, c \in (0,\infty)$. Să se arate că:

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leqslant a^a b^b c^c.$$

Generalizare

53. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1,\infty)$ au loc inegalitățile.

1) $\log_a bc + \log_b ac + \log_c ab \geqslant 6$.

2) $\log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab \geqslant 8$.

3) $\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc \geqslant 9$.

4) $\log_a^n bc + \log_b^n ac + \log_c^n ab \geqslant 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5) Să se arate că dacă $a, b, c \in (1,\infty)$ sau $a, b, c \in (0,1)$.

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

54. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1,\infty)$ are loc inegalitatea.

$$\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ac} b \geqslant \frac{3}{2}.$$

55. Fie $a, b, c \in (1,\infty)$. Să se arate că

$$\frac{\log_2 a + \log_3 b + \log_4 c}{3} < \frac{\log_2 \frac{a+b}{2} + \log_3 \frac{b+c}{2} + \log_4 \frac{a+c}{2}}{3} \leqslant \log_2 \frac{a+b+c}{3}.$$

Gh. Andrei

56. Să se demonstreze că oricare ar fi $a > 2$ are loc inegalitatea

$$\log_a(a^2 - 1) < \log_{a-1} a + \log_{a+1} a.$$

Dan Crișan

57. Fie $a, b, c \in (0,\infty)$ și $a + b + c = 1$, atunci

$$\lg\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \lg\left(\frac{1}{b} - 1\right) + \lg\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geqslant 3 \lg 2.$$

58. Fie $a > 1$. Să se demonstreze inegalitățile:

1) $\log_2 \frac{a}{2} > \log_3 \frac{a}{3} > \ldots > \log_n \frac{a}{n}$.

2) $\log_3 a^3 > \log_4 a^4 > \ldots > \log_n a^n$,

Unde se află $\log_2 a^2$?

Andrei Ion Cristian

59. Să se găsească cea mai mică și cea mai mare valoare a produsului ab, știind că $\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b = 1$, $a, b \in (0,1)$

Matematica v'școle, 1987

60. Să se arate că oricare ar fi $a > 1$, are loc inegalitatea

$$\log_n(a+1) > \log_{a+1}(a+2).$$

61. Se consideră şirul $a_n = \log_n(n+1)$, $a_1 = 2$.

Să se arate că şirul este monoton şi mărginit.

Liviu Vlaicu

62. Fie $1 < a \leqslant e$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\log_a n! > 2(n-3), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

G. G. Niculescu

63. $\log^2_{n!} n + \log^2_{n!}(n-1) + \log^2_{n!}(n-2) > \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

Etapa locală, Galaţi, 1985

64. Fie $a > 2$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că

$$\log^2_{a^n}(a^n - 1) + \log^2_{a^n}(a^n + 1) > \log_{a^n} a^{\frac{(a^{2n}-1)^2}{2n}}.$$

G.M. Nr. 6/1986

65. Să se arate că $\log_2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \log_2(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \geqslant 2$, oricare ar fi

$$x \in \mathbf{R} - \{k\pi\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbf{Z}}.$$

66. Să se arate că

$$\ln(1 + \sin^2 x) \cdot \ln(1 + \cos^2 x) \leqslant \ln^2 \frac{3}{2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Matematica v'şcole 1986

67. Să se arate că

$$\log_{\sin^2 x}(1 + \cos 2x) + \log_{\cos^2 x}(1 - \cos 2x) \geqslant 0, \quad \forall x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Gheorghe David

68. Dacă $a, b, c \in (1,\infty)$,

atunci i) $\log_a(b^2 + c^2) + \log_b(a^2 + c^2) + \log_c(a^2 + b^2) > 6$,

ii) $\log_a(b^3 + c^3) + \log_b(a^3 + c^3) + \log_c(a^3 + b^3) \geqslant 9$.

Andrei Cristian

69. Fie $a, x, y \in (0,\infty)$, $a \neq 1$. Să se arate că

$$\frac{\log_a x + \log_a y}{2} < \log_a \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow a > 1,$$

$$\frac{\log_a x + \log_a y}{2} > \log_a \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 0 < a < 1.$$

(În cazul $a > 1$ funcţia logaritmică este concavă, iar dacă $0 < a < 1$, funcţia logaritmică este convexă.)

70. Să se arate că oricare ar fi $a,b \in (0,\infty) - \{1\}$ au loc inegalităţile

1) $|\log_a b + \log_b a| \geqslant 2$. 2) $\lg a \cdot \lg b < \lg^2(a+b)$

71. Să se demonstreze că pentru orice $a > 0$ și $b > 0$ are loc inegalitatea

$$a^a b^b > a^b \cdot b^a.$$

72. Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in (1,\infty)$, $1 < a < c < b$ avem inegalitatea

$$b^{a-c} \cdot c^{b-a} > a^{b-c}.$$

73. a) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încît $\frac{b+c}{2} \leqslant a$, atunci $\ln^2(1+a) \geqslant \ln(1+b)\ln(1+c)$.

b) Dacă $a, b \in (0,1)$, atunci $ab \leqslant a^{\sqrt{\log_a b}} \cdot b^{\sqrt{\log_b a}}$.

c) Dacă $a, b \in (0,1)$, atunci $a^{\sqrt[n]{\log_b a}} \cdot b^{\sqrt[n]{\log_a b}} \leqslant ab$, $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

C. Caragea, Gh. Andrei

74. Dacă $a, b, c \in (1,\infty)$, astfel încît $\frac{a}{b} > \frac{c}{a}$ atunci $\frac{\lg a}{\lg b} > \frac{\lg c}{\lg a}$.

75. Dacă $b > a > 1$ și $\alpha > 0$, atunci $\log_a b > \log_{a+\alpha}(b+\alpha)$.

76. Dacă $b^2 \geqslant ac$ și $c^2 \geqslant bd$, $a, b, c, d \in (1,\infty)$, atunci au loc inegalitățile

1° $\lg b + \lg c \geqslant \lg a + \lg d$.

2° $\lg b \cdot \lg c \geqslant \lg a \cdot \lg d$.

V. Matrosenco — Etapa locală 1986

77. Să se arate că

$$(a+b)\lg\frac{a+b}{2} \geqslant b\lg a + a\lg b, \quad a,b \in (1,\infty).$$

G.M. nr. 2/1986

78. Să se arate că oricare ar fi $x, y \in (0,1)$, $x + y = 1$ avem

a) $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\frac{1}{2}$,

b) $x\ln x + y\ln y \geqslant \frac{\ln x + \ln y}{2}$,

c) $x\ln x + y\ln y \geqslant \ln\frac{1}{2}$.

Andrei Gheorghe

79. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in (1,\infty)$, are loc inegalitatea

$$\log_a\frac{b^2+c^2}{b+c} + \log_b\frac{a^2+c^2}{a+c} + \log_c\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant 3.$$

80. Pentru ce valori ale lui y, inecuația

$x^2\log_2\frac{4(y+1)}{y} + 2x\log_2\frac{2y}{y+1} + \log_2\frac{(y+1)^2}{4y^2} \geqslant 0$ este satisfăcută pentru orice x real.

Adm. Politehnică, 1988

81. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c\, d \in (0,1)$ sau $a, b, c, d \in (1,\infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_d c^2}{c+d} + \frac{\log_a d^2}{a+d} \geqslant \frac{16}{a+b+c+d}.$$

I. Atanasiu

82. Dacă $a, b \in (0,1)$, atunci

1) $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 2.$

2) $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1.$

83. Să se arate că:

1) Există $a,b \in (1,\infty)$, astfel încît $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} > 1.$

2) Există $a,b \in (1,\infty)$, astfel încît $\log_a \frac{2ab}{a+b} \log_b \frac{2ab}{a+b} < 1.$

Constantin Carageа

84. Să se atate că dacă $a, b, c \in (0,1)$ atunci

1° $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ac} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ac} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ac} \geqslant 3.$

2° $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ac} \cdot \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ac} \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ac} \geqslant 1.$

85. Să se arate că oricare ar fi $a,b \in (1,\infty)$ are loc inegalitatea:

$$\log_a \frac{a+b+c}{3} + \log_b \frac{a+b+c}{3} + \log_c \frac{a+b+c}{3} \geqslant 3.$$

Generalizare $\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} M \geqslant n$, unde $M = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

86. Să se arate că dacă $a,b \in (0,1)$, atunci

$$\log_a \frac{2b}{a+b} + \log_b \frac{2a}{a+b} \geqslant 0.$$

Gheorghe David

87. Să se ordoneze numerele:

$$A = \log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6,$$
$$B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 5 \cdot \log_5 6,$$
$$C = \log_2 3 \cdot \log_5 6 + \log_3 4 \cdot \log_4 5.$$

Tudorel Lupu

88. Să se demonstreze că

$$2\sqrt{2n} < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 16 + \ldots + \log_{2n}(2n+1) + \log_{2n+1} 4n^2 < 3n.$$

Mircea Ganga, Etapa locală — Prahova, 1985

89. Fie $a,b \in (1,\infty)$. Să se arate că

a) $\sum_{k=1}^{n} \log_a b^k \log_a b^{k!} < (n+1)!\log_a^2 b$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \log_{a^{k+1}} b^k \cdot \log_{a^{k!}} b < \log_a^2 b$.

90. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1,\infty)$ sau $(0,1)$, atunci

a) $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_{n-1}} a_n} + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geqslant n$,

b) $\log_{a_3} \sqrt[n]{a_1 a_2} + \log_{a_n} \sqrt[n]{a_2 a_3} + \ldots + \log_{a_1} \sqrt[n]{a_{n-1} a_n} + \log_{a_2} \sqrt[n]{a_1 a_n} \geqslant 2$.

91. Dacă $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,\infty)$ și astfel încît $b^n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$, atunci

$$(\log_a b)^n \geqslant \log_a x_1 \log_a x_2 \ldots \log_a x_n.$$

D. M. Bătinețu — Giurgiu

92. Să se arate că

$$n\sqrt[n]{\log_{n+2} 2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\log_{k+2} n}{\log_{k+1} n} < n.$$

G.M. nr. 3/1985

93. Fie $a_k \in (0,1)$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sau $a_k \in (1,\infty)$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ să se arate că

$$\log_{a_2 a_3 \ldots a_n} a_1 + \log_{a_1 a_3 \ldots a_n} a_2 + \ldots + \log_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} a_n \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

94. Să se arate că oricare ar fi $a_k \in (0,1)$, $k = \overline{1, 2, \ldots, n}$ sau $a_k \in (1, \infty)$, $k = \overline{1, \ldots, n}$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\log_{a_1} a_2^m}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m} + \frac{\log_{a_2} a_3^m}{a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1}} + \ldots + \frac{\log_{a_n} a_1^m}{a_n + a_1 + \ldots + a_{m-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \quad m < n.$$

95. Să se determine minimul expresiei

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{n}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{n}\right), \text{ unde}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, precum și valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care se realizează minimul.

Titu Andreescu, Etapa finală 1984

96. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale strict pozitive.

a) Dacă $\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n < 0$ și $\lg x_1 \lg x_2 \ldots \lg x_n > 0$, atunci cel puțin două dintre numerele date sînt subunitare.

b) Dacă $\lg(x_1x_2 \ldots x_n) = p$ şi $\lg^2 x_1 + \lg^2 x_2 + \ldots + \lg^2 x_n = q$, să se exprime în funcţie de p şi q suma

$$S_n = \lg x_1 \lg(x_2x_3 \ldots x_n) + \lg x_2 \lg(x_3x_4 \ldots x_n) + \ldots + \lg x_{n-1} \lg x_n.$$

Adrian Ghioca, Etapa judeţeană, 1980

97. Să se determine numerele reale şi pozitive $x, x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ care verifică egalitatea:

$$|\log(xx_1)| + |\log(xx_2)| + |\log xx_n| + \left|\log\frac{x}{x_1}\right| + \left|\log\frac{x}{x_2}\right| + \ldots + \ldots + \left|\log\frac{x}{x_n}\right| = |\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n|.$$

Adrian Ghioca, Etapa judeţeană, 1983

98. Să se demonstreze că

$$\log_{x_1} x_1^{\frac{2}{x_1+x_2}} + \log_{x_2} x_2^{\frac{2}{x_2+x_3}} + \ldots + \log_{x_n} x_{n-1}^{\frac{2}{x_{n-1}x_n}} + \log_{x_1} x_n^{\frac{2}{x_n+x_1}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}},$$ unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ sau $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,\infty)$.

Petrişor Ioan

99. Să se studieze semnul funcţiei

$$f(x) = \log_{x-3}(16 - x).$$

100. Să se determine

$$\max\{\log_x(x+3), \log_{x+1}(x+4)\}, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

101. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ sînt distincte şi $A = \{\log_{x_1}x_2, \log_{x_2}x_3, \ldots \log_{x_{n-1}}x_n, \log_{x_n}x_1\}$, atunci $\min A < 1 < \max A$.

Stan Sava, Etapa locală — Constanţa, 1986

102. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in (1,\infty)$ are loc inegalitatea $\log_a b + \sqrt{\log_b c} + \sqrt[3]{\log_c a} > 2$.

103. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$ $\log_n(n+1) + \log_{n+1} n$ nu este număr întreg.

Etapa locală Suceava, 1988

104. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$ şi $1 < k \leqslant n - 1$ atunci:

$$\sqrt{\log_k n \cdot \log_{n/k} n} \geqslant 2.$$

Adrian Ghioca, Etapa locală — Prahova 1989

105. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (ab)^x - 3a^x - b^x + 8$, $a,b \in (0, \infty)$.

a) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 5$.

b) Pentru $a \neq 1$ şi $b = 1$, să se studieze bijectivitatea funcţiei.

Etapa locală, Prahova, 1986

106. Fie $f:(-a, a)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_a(a+x)\log_a(a-x)$.
Să se arate că $f(x)\leqslant 1$.

Liviu Pîrşan

107. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^x+b^x$, $a,b\in\mathbf{R}_+^*$.
Să se studieze monotonia funcţiei f.

108. Să se cerceteze bijectivitatea funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+^*$.

$$f(x)=\max\left(a^x+b^x,(a+b)^x\right) \text{ unde } a,b\in(0,\infty)-\{1\}.$$

Gheorghe Andre

109. Fie $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_a x^2+a^{\sqrt{x^2}}$
Să se cerceteze monotonia funcţiei.
Este funcţia f injectivă?

110. Fie funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_d(ax^2+bx+c)$, unde

$$a>0,\ b^2-4ac<0,\ d>0,\ d\neq 1 \text{ şi}$$

$$g(x)=a\log_d x+b, \text{ unde } a\neq 0,\ d>0,\ d\neq 1.$$

Să se cerceteze monotonia funcţiilor f şi g.

111. Fie $f:[1, 64]\to\mathbf{R}$ $f(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}$.

Să se determine valorile lui x pentru care funcţia are valori extreme.

112. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{8^x+27^x}{3\cdot 12^x+8\cdot 18^x+5\cdot 27^x}$.

Să se determine valoarea minimă a lui f şi valoarea lui x corespunzătoare acestui minim.

113. Se consideră funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^{b^x}+b^{a^x}$
şi $g:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$, $g(x)=a^{b^x}+b^{\log_a x}$,
unde $a,b\in(0,\infty)-\{1\}$. Să se cerceteze monotonia funcţiilor f şi g.

114. Se consideră funcţia $f:A\to B$

$$f(x)=\log_a(\log_b x)+\log_b(\log_a x),\ a,b\in(0,\infty)-\{1\},$$

1) Să se precizeze domeniul maxim de definiţie A.
2) Să se cerceteze monotonia funcţiei şi să se precizeze $f(A)$.

115. Să se studieze monotonia funcţiei $f:(0,\infty)-\mathbf{R}$

$$f(x)=\log_a x+\log_b x;\ a,b\in(0,\infty)-\{1\}.$$

116. Să se studieze monotonia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=a^{\log_b x}+b^{\log_a x}\ a,b\in(0,\infty)-\{1\}.$$

117. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^x+b^x+c^{-x}+d^{-x}$ unde $a,b,c,d\in\in(0,\infty)-\{1\}$ şi $ab=cd$. Să se determine Imf. Generalizare.

118. Să se studieze monotonia funcţiilor $f, g, h : (0,\infty) \to \mathbf{R}$:

1) $g(x) = x^x$,

2) $f(x) = x^{x+\frac{1}{x}}$. 3) $h_{(x)} = a^x + a^{\frac{1}{x}}$.

119. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x + \frac{a^x}{x}$.

1) Să se arate că dacă $a \in (0,1)$, funcţia f este injectivă.
2) Să se arate că ecuaţia $f(x) = 0$ nu poate avea soluţii subunitare dacă $a \in (0,1)$.

G.M. Nr. 1/1980

120. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = a^x - a^{-x}$.

1) Să se studieze monotonia funcţiei f.
2) Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

121. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x + a^{-x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1° Să se determine $\mathrm{Im} f$.
2° Să se studieze monotonia funcţiei f.
3° Să se arate că restricţiile funcţiei f,

$f_1 : [0,\infty) \to [2,\infty)$ şi $f_2 : (-\infty,0] \to [2,\infty)$ sînt bijective. Care sînt inversele acestor restricţii?

122. Fie $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = a^x + a^{1-x}$, $g(x) = a^x - a^{1-x}$.

1° Să se studieze monotonia funcţiilor f şi g.
2° Să se arate că g este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.
3° Să se arate că $2\sqrt{a} \leqslant f(x) \leqslant a + 1$, $\forall x \in [0,1]$.

123. Fie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$.

Să se arate că f este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$. Generalizare.

124. Să se arate că funcţia $f : I \to \mathbf{R}$ unde intervalul I este $[0,\infty)$ sau $(-\infty,0]$

$$f(x) = (a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x)\left(\frac{1}{a_1^x} + \frac{1}{a_2^x} + \ldots + \frac{1}{a_n^x}\right) \text{ este injectivă.}$$

$$a_k \in (0,\infty) - \{1\},\ k = \overline{1, \ldots, n}.$$

Dumitru Buşneag, Etapa judeţeană 1979

125. Să se determine funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = \max [(1 + a)^x,\ 1 + a^x]$ şi să se reprezinte grafic

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa 1979

126. Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = (1 + a)^x - a^x$, $a > 0$.

1° Să se studieze monotonia funcţiei.

2° Să se rezolve ecuaţia $1988^x - 1987^x = 1 + 3\left(1987^{\frac{x}{3}} + 1987^{\frac{2x}{3}}\right)$.

127. Fie funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g: (0,\infty) \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = (a-1)x + a^x + b.$$
$$g(x) = (a-1)x + \log_a x + b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbf{R}.$$

Să se cerceteze bijectivitatea funcţiilor f şi g.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa 1984

128. Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = (a-1)x^2 + bx + c + \log_a x$, unde $a \in (0,\infty) - \{1\}$ şi $b(a-1) \geqslant 0$. Să se studieze bijectivitatea funcţiei f.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa, 1985

129. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde

$$f(x) = (2a+1)^x - 2ax - 1 \quad (a > 0).$$

1° Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ şi să se studieze semnul f.

2° Să se rezolve ecuaţia $\sum_{k=1}^{n} \log_{2k+1}(2kx+1) = nx$.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa, 1986

130. Să se rezolve inecuaţiile:

1° $(1+a)^x + (1+b)^x \leqslant (a+b)x + 2$,

2° $\log_{2a+1}(2ax+1) + \log_{2b+1}(2bx+1) \geqslant 2x,\ a,b > 0$.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa, 1989

131. Fie $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = a^x b^{1-x} - a^{1-x} b^x$, $a,b \in (0,\infty) - \{1\}$, $a \neq b$

Să se arate că:

1° g este bijectivă.

2° Punctul $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ este centrul de simetrie al graficului funcţiei f.

3° $|g(x)| \leqslant |a-b|,\ \forall\, x \in [0,1]$.

132. Fie $f: [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x \cdot b^{1-x} + a^{1-x} b^x$, $a,b \in (0,\infty) - \{1\}$.

1° Să se studieze monotonia funcţiei f.

2° Să se arate că $2\sqrt{ab} \leqslant f(x) \leqslant a+b,\ \forall\, x \in [0,1]$.

3° Să se arate că dreapta $x = \frac{1}{2}$ este axă de simetrie a graficului funcţiei f.

133. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x b^{c-x} + a^{c-x} b^x$, $a, b \in (0,\infty) - \{1\}$ $a \neq b$, $c \in \mathbf{R}$.

1° Să se arate că f este descrescătoare strict pe $\left(-\infty, \frac{c}{2}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{c}{2}, \infty\right)$.

2° Să se determine valorile parametrului real m, astfel încît

$$a^{2x} b^c + b^{2x} a^c \geqslant m a^x b^x,\ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Gh. Miculescu

134. Fie $f: [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^{x+1}(b^{1-x} \cdot c + b \cdot c^{1-x}) + b^{x+1}(a^{1-x} \cdot c + a \cdot c^{1-x}) + c^{x+1}(b^{1-x} \cdot a + b \cdot a^{1-x})$, $a, b, c \in (0,\infty) - \{1\}$ distincte.

1° Să se arate că f este injectivă.

2° Să se determine $\min f(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$.

G.M. nr. 9/1984

135. Să se determine $a > 0$, $b > 0$, $c \geqslant 0$, $a \neq 1$, astfel încît $\log_a(bx + c) = b \log_a x + c$, oricare ar fi $x \in (0,\infty)$

I. V. Maftei, Tabăra națională de matem., 1986

136. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție monotonă cu proprietatea că $f(f(x)) = a^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $a > 1$. Să se arate că există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x_1) < 0$ și $f(x_2) > 0$.

Există $x_0 \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x_0) = 0$?

Gheorghe Andrei, în legătură cu probl. 1, G.M. 7/1986

137. Să se determine toate funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care satisfac relația

$$f(a^x + a^y) = f(x + y), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

În ceea ce urmează vom folosi următoarele afirmații:

Fie ecuațiile:

a) $f(x) = a$, *unde* f *este strict monotonă sau injectivă*

b) $f(x) = g(x)$, *unde* f *și* g *sînt funcții monotone de monotonii diferite.*

Să se arate că dacă ecuațiile au soluții, atunci ele sînt unice.

a) Dacă x_0 este soluție a ecuației $(f(x_0) = a)$ atunci ea este unică. Într-adevăr, f fiind injectivă, dacă $\exists\, x_1 \neq x_0$ a.î. $f(x_1) = a$, atunci $f(x_0) = f(x_1) = a$ absurd.

b) Dacă x_0 este soluție a ecuației adică $f(x_0) = g(x_0)$, atunci ea este unică. Presupunem f strict crescătoare și g strict descrescătoare. Într-adevăr, fie $x_1 \neq x_0$, a.î. $f(x_1) = g(x_1)$, atunci dacă $x_1 < x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$ și $g(x_1) > g(x_0)$.

Deci $f(x_1) < f(x_0) = g(x_0) < g(x_1)$, deci $f(x_1) < g(x_1)$, absurd. În mod analog dacă f este strict descrescătoare și g strict crescătoare.

Să se rezolve ecuațiile:

138. a) $2^{x+1} + 1 = 3 \cdot 2^{2x/3}$.

b) $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

c) $2^x - 6 = 3 \cdot 2^{2x/3} - 5 \cdot 2^{x/3}$.

d) $3^{x+1} + 3 = 9\sqrt[3]{3^x} + \sqrt[3]{9^x}$.

e) $3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x/2} - 9 = 10 \cdot 3^{3x/4} - 30 \cdot 3^{x/4}$.

f) $2^{2x+2} \cdot 10^{x+1} - 10 \cdot 2^{3x} \cdot 5^x = 1200$.

139. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^x \cdot \overset{x}{8^{\overline{x+2}}} = 6$.

b) $5^x \cdot \sqrt[x+1]{8^x} = 100$.

c) $3 \cdot 4^{x+2} = 4 \cdot \overset{\frac{2x+1}{x}}{3}$

140. Să se rezolve:

a) $3^x - 3^{\frac{2x+3}{3}} + 3^{\frac{x+3}{3}} = 1.$

b) $3^x - 3^{\frac{2x+6}{3}} + 3^{\frac{x+9}{3}} = 27.$

c) $3^{x-1} - 13 \cdot 3^{\frac{2x-4}{3}} + 13 \cdot 3^{\frac{x-2}{3}} - 3 = 0.$

d) $3^{3x} - 3^{3-3x} - 3^{x+2} + 3^{3-x} = 8.$

141. Rezolvați:

a) $3^{2x} + \frac{9}{3^{2x}} - 3\left(3^x + \frac{3}{3^x}\right) = -2.$

b) $3^{2x} - \frac{18}{3^{2x}} - \left(3^x + \frac{6}{3^x}\right) = 2.$

c) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$

d) $5^x - \frac{1}{5^{x-1}} + m\left(125^x - \frac{1}{125^{x-1}}\right) = -128.$ Să se rezolve știind că are o rădăcină $x_1 = 0.$

142. Să se rezolve ecuațiile:

a) $4 \cdot 9^x + 3 \cdot 16^x = 7 \cdot 12^x.$

b) $4 \cdot 81^x - 12 \cdot 36^x + 9 \cdot 16^x = 0.$

c) $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x = 0.$

d) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5 \cdot 6^x.$

e) $4^{x-1} - 2^{x-2}\sqrt{3^x} = 3^{x-2}.$

f) $5^{2x+1} + 6^{x+1} = 5^{2x} \cdot 6^x + 30.$

g) $2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} - 3 \cdot 5^x = 0.$

h) $\frac{27^x - 8^x}{18^x - 12^x} = \frac{7}{6}.$

i) $9 \cdot 2^{2x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} = 97 \cdot 6^x.$

j) $3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 6^{2x}.$

k) Să se rezolve ecuația: $2^{2x+1} - 2^x - 2x^2 - 3x - 1 = 0.$

Petre Năchilă, Etapa locală — Prahova, 1988

143. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^x = 14.$

b) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$

c) $\left(\sqrt[3]{8+3\sqrt{7}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{8-3\sqrt{7}}\right)^x = 16.$

d) $\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x = 62.$

e) $(7+4\sqrt{3})^{\frac{x}{4}} + (7-4\sqrt{3})^{\frac{x}{4}} = 194.$

f) $(\sqrt{3}+1)^x + (\sqrt{3}-1)^x = 4(\sqrt{2})^x.$

g) $(\sqrt{10}+\sqrt{6})^x+(\sqrt{10}-\sqrt{6})^x=\sqrt{10}\cdot 2^x$.

h) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^x+\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^x=(\sqrt{2a})^x,\quad a>\sqrt{b}>0$.

i) $\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^{2x}-2^{4x+1}=4\cdot 3^{4(x-1)}$.

Gheorghe Hînsă

j) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^x+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^x=2\sqrt{a}(\sqrt{a-b})^{x-1},\ a>b>0$.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța, 1979

144. Rezolvați: $\sqrt[2x]{8x}-2\sqrt[x]{8x}+6=0$ și $(8x)^{\frac{1}{2x}}-2(8x)^{\frac{1}{x}}+6=0$.

145. a) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

b) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

c) $2\left(9^x-7^{x-\frac{1}{2}}\right)=7^{x+\frac{1}{2}}-3^{2x-1}$.

d) $2\cdot 9^x-8^{x-\frac{1}{2}}=8^{x+\frac{1}{2}}-2\cdot 3^{2x-1}$.

146. a) $2^{|x+1|}-|2^x-1|=2^x+1$.

b) $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

c) $3^{|x-1|}-3|3^{x-2}-1|=2\cdot 3^{x-1}-3$.

d) $(x+4)3^{1-|x-1|}-x=(x+1)|3^x-1|+3^{x+1}+1$.

e) $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$.

f) $|3^{|x+1|}-3|+3^{|x+1|}=m\cdot 3^{-(x+1)}$ — discuție.

g) $|2^x-1|-|2^{-x}-1|=\lambda(2^x-2^{-x})$ — discuție.

147. Să se rezolve: a) $6^x-2^x=32$.

b) $3^x+4^x-6^x=1$.

c) $6^x+5^x=61^{\frac{x}{2}}$.

d) $3^x+4^x+5^x=6^x$.

e) $9\cdot 7^x+1=2^{\frac{6}{x}}$.

f) $(\sqrt{2})^x+2^x=3^x-(\sqrt{3})^x$.

g) $2^{x^2}+3^{x^2}=5^{x^2}$.

148. Rezolvați: a) $5^x-1=2^{x+1}(1+2^{x-1})$.

b) $9^x-5^x-4^x=2\sqrt{20^x}$.

c) $2^x+7^x=9^x-2\sqrt{14^x}$.

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^x-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x=1$.

149. a) $4^x(2-\sqrt{3})^x - 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})^x + 2 = 0$.

b) $3^x(3-2\sqrt{2})^x - 3(\sqrt{6}-\sqrt{3})^x + 2 = 0$.

c) $4^x(7+4\sqrt{3})^x - 2^{x+3}(2+\sqrt{3})^x + 4 = 0$.

150. Să se rezolve ecuațiile: $x^{x^2-6x+8} = x^{12}$.

$(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$.

$(x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{8x-30}$.

$(2x-5)^{2x^2-x} = (2x-5)^{14x-28}$.

151. Rezolvați: a) $2(x+1)(2x+1)^x - (2x+1)^{x+1} = (x-1)^x$.

b) $(3x-1)(3x-2)^x - (x+2)^x = (3x-2)^{x+1}$.

c) $(4x+5)(x+3)^{x-2} - (3x+2)^{x-1} = (x+3)^{x-1}$.

d) $(2x-3)^{x+3} = 5(x+1)^{x+3} - (3x+8)(2x-3)^{x+2}$.

152. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^x = 6 - x$.

b) $3^x = 11 - x$.

c) $2^{x^2} = 5 - 3x$.

d) $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$.

e) $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$.

f) $2^x = x + 4$.

g) $7^{x-2} = 6x - 11$.

h) $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

i) $3^{x+2} = 26x + 29$.

153. a) $x^{2x} - (x^2+x)x^x + x^3 = 0$.

b) $8 - x2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

c) $3 \cdot 4^{x+1} + (3x-7)2^{x+1} + 2 - x = 0$.

d) $3^{2x+1} + (3x-10)3^x + 3 - x = 0$.

e) $9^x + 9(30-x) = x \cdot 3^x + 13 \cdot 3^{x+1}$.

f) $x(2^{2x} + x \cdot 2^x - 2^{x+2} + 1) = 3 + 4^x - 2^{x+2}$.

g) $2^x(x-1) = x + 2, \quad x > -2$.

h) $x(4^x + 3 \cdot 2^x - 1) + 2^x(x^2 + 3 \cdot 2^x - 1) = 0$.

154. a) $2^{x+1}(3^{2x-1} - 2^{x-2}) + 3^{x-1}(1 + 2^x - 3 \cdot 2^{2x}) = 2^{x-1}$.

b) $27(2^x - 1) - 6(1 + 6^{x-1}) = 3(133 - 16 \cdot 3^{x-1})$.

c) $4 \cdot 2^{3x-5} + 0{,}75 \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 2^{-x-4} + 2^{-3(x+1)} = 1$.

d) $2^{3x} \cdot 5^x + 2^{2x} \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^{3x} = 5^{4x} + 2^{4x}$.

e) $\sqrt[3]{9^{x-1}} - \sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^{x-2}} - \sqrt{2^{x-2}}\,\sqrt[3]{3^x} + 2^{x-1} = 0$.

f) $3 \cdot 2^{3x+1} + 19 \cdot 2^x \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{3x+1} + 19 \cdot 3^x \cdot 2^{2x}$.

155. Să se rezolve: a) $2^{\frac{2x-1}{x-1}} + 2^{\frac{3x-2}{x-1}} = 24$.

b) $2^{\frac{3x-2}{x-1}} + 3^{\frac{2x-1}{x-1}} = 43$.

156. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{3^x+4^x}}+\sqrt{x-1}=\frac{6}{5}+\sqrt{x-2}.$$

Chircor Mihail

157. a) $2^{|x-2|\sqrt{x^2-4x+5}}+|x-2|\sqrt{x^2-4x+5}=3.$

b) $2^{|2x-1|\sqrt{x^2-x+1}}+|2x-1|\sqrt{x^2-x+1}=3.$

Constantin Caragea, Etapa locală — Constanţa, 1985

c) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}=2^{\sqrt{x-3}}.$

d) $2\sqrt{x-1}=x\cdot 2^{|x-2|}.$

Gh. Bordea, Etapa locală — Constanţa, 1988

158. Să se rezolve:

a) $4^x+16^x+9^x=6^x+8^x+12^x.$

b) $8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x.$

c) $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x.$

Aurel Doboşan

d) $9^x+2(12^x+15^x+20^x)+16^x+25^x-36^x=0;$

Oncioiu Eugen

e) $9^x+36^x+2\cdot 32^x=4\cdot 24^x$

f) $3\cdot 8^x+9^x+54^x=5\cdot 12^x$ } *Constantin Caragea*

g) $1+2^{2x-1}=2^{2x-1}\cdot 3^x(1+2^x+2^{2x})^x$

D. M. Bătineţu

h) $2^x+3^x+12^x+18^x=35\cdot 6^{x-1}.$

159. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $a^{x-\frac{1}{x}}+b^{x-\frac{1}{x}}=2,\ a,b\in(0,1)$ sau $a,b\in(1,\infty).$

b) $a^{x-\frac{1}{x}}+b^{x-\frac{1}{x}}=a\sqrt{a}+b\sqrt{b},\quad a,b\in(0,1)$ sau $a,b\in(1,\infty)$

c) $a^xb^{\frac{1}{x}}+b^xa^{\frac{1}{x}}=2(ab)^{\frac{1}{x}},\ a,b\in(1,\infty).$

d) $a^xb^{\frac{1}{x}}+b^xa^{\frac{1}{x}}=2ab,\ a,b\in(1,\infty).$

e) $a^xb^{\frac{1}{x}}+b^xa^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab}),\quad a,b\in(1,\infty).$

160. Să se rezolve ecuaţia: $3^{\sqrt[24]{x}}+3^{\sqrt[8]{x}}+3^{\sqrt[6]{x}}=3^{1+\sqrt[8]{x}}.$

Nicolae Dinu

161. Să se rezolve a) $2^{x^3}+3^{x^4}=5^{x^5}.$

b) $2^{2^x}+4^{4^x}=6^{6^x}.$

162. Rezolvaţi:

$$\frac{2^{2x-1}}{2^{x+1}+2^{2x+1}+3(2^x+1)}+\frac{2^{x-1}}{2^x+1}+\frac{2^{2x}}{2^{x+1}+3}=2.$$

163. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + 2^x)^n + (1 + 2^{-x})^n = 8, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

164. Rezolvați:

$$\frac{n^{3x+1}(n+1) - n(n+1)^{3x+1}}{n^{2x}(n+1)^x - n^x(n+1)^{2x}} = 3n^2 + 3n + 1, \; n \in \mathbf{N}^+.$$

G.M. nr. 6/1985

165. Să se rezolve:

$$\sqrt{2x + 2^x} - \sqrt[3]{(0,3)^x - 3x} = \sqrt{(0,2)^x - 2x} - \sqrt[3]{3x + 3^x}.$$

166. Să se rezolve ecuația:

$$3 \cdot 5^{2x+1} - 7 \cdot 2^{4x+1} = 19.$$

Matematica v'școle 1987

167. Să se determine $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încît

$$2 \cdot 4^x + 2^x \cdot 3^{y+1} + 9^y = 20.$$

Etapa locală — Prahova 1985

168. Rezolvați

$$\frac{4^x}{9^{1/x}} + \frac{9^x}{4^{1/x}} = \frac{275}{6}.$$

169. Să se afle soluțiile pozitive ale ecuațiilor

a) $4^x + 4^{1/x} = 18.$

b) $(1,5)^x + (0,5)^x = 2,5.$

Gh. Andrei, C-tin Caragea

170. Să se rezolve ecuația

$a^x + b^x = 2$ unde, $a, b \in (0, \infty) - \{1\}$ și $a + b = 2$. Generalizare.

Gh. Andrei, C-tin Caragea

171. Să se rezolve ecuația: $(4^x + 2)(2 - x) = 6.$

Matematica v'școle, nr. 1/1987

172. Să se rezolve ecuația: $(4^x + 9^{1/x})(9^x + 4^{1/x}) = 1577.$

173. Să se rezolve:

a) $1 + 3^x = 8^x \sin 75.$

G.M. nr. 11–12/1987

b) $6(\sqrt{7} - 2)^x - (\sqrt{7} + 2)^x = 5 \cdot 3^{x/2}.$

R.M.T. nr. 1/1979

c) $\frac{1 + 2^x}{3^x} = (1 + 2^x + 4^x)^x.$

G.M. nr. 10/1987

d) $2^x + 3^x + 4^x = 11x^2, \; x \in \mathbf{R}.$

e) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$(4 - x)^{4-x} + (5 - x)^{5-x} + 10 = 4^x + 5^x.$

Etapa locală Teleorman 1986

f) $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x}{3}}+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x}{3}}+\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+$
$+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=66.$

Andrei Ion Cristian

g) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}\right)^{x}+$
$+\left(\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}=4.$

174. Să se afle soluțiile naturale ale ecuațiilor:

a) $3^{2x-1}=x^{9-2x}-5.$

b) $2^{3x-5}=x^{13-3x}-65.$

G.M. nr. 12/1979, Etapa județeană, 1984

Să se rezolve: c) $2^{2x-1}=x^2.$

d) $(2x)^{\frac{x^2}{2}}=16,\ x\in\mathbf{R}_+^*.$

e) $(2^x+3^x-5^x)(2^x+5^x-3^x)(3^x+5^x-2^x)=30^x.$

Etapa locală — Cluj

f) $x^2+x-1=xe^{x^2-1}+(x^2-1)e^x.$

175. a) $\left(\frac{1}{a}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{ab}\right)^{x}-\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}}{ab}\right)^{x}=1.$

b) $a^xb^x[a^xb^x+2(a^{2x}+b^{2x})]=a^{4x}+b^{4x},\ a,b\in\mathbf{R}_+^*-\{1\}.$

c) $b\cdot a^{4x+1}+2a^{2x+1}b^{2x+1}+a\cdot b^{4x+1}=a^{3x+2}\cdot b^x+$
$+a^{3x}b^{x+2}+a^{x+2}b^{3x}+a^x\cdot b^{3x+2}.$

d) $4^x\cdot x^3+(4^x-3^{x+1})x^2+4(3^{x+1}-4^{x+1})x+$
$+4(5\cdot 4^x-3\cdot 3^x)=0.$

Laura Constantinescu

e) $\frac{(a+1)^x+1}{a^{x-1}}-\frac{a^x+1}{(a+1)^{x-1}}=1.$

Marcel Chiriță

f) $(x-n^2-1)^{\sqrt{2n-x}}=(2n^2+2)^{n+1},\ n\in\mathbf{N}^*.$

Stănescu Vasile

176. Să se rezolve ecuația

$(4+a^x)^{2n}+(4+a^{-x})^{2n}=50$ știind că $a>0$ și $n\in\mathbf{N}^*.$

G.M. nr. 6/1989

177. Să se rezolve ecuația

$$\frac{a^x}{x}+xa^{\frac{1}{x}}=2a,\ a>0,\ a\neq 1.$$

178. Rezolvați $a^x+b^x=2c^x$ știind că „a" este media geometrică a numerelor b și c.

179. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{a^{x^2}}{b^{2x}}+\frac{b^{x^2}}{a^{2x}}=\frac{2}{\sqrt{ab}},\ a,b\in(1,\infty).$$

Titu Andreescu

180. Să se rezolve:

$$(a^x + a^{-x})(1 + x^2) = 2,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Etapa locală, București, 1985

181. Să se rezolve ecuația:

$$a^{x-2} = (1 - a)x + 4a - 3,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Etapa locală — Giurgiu 1987

182. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $a^x - b^x = \sqrt{(ab)^x - b^{2x}},\ a > b > 1.$

b) $a^{2x-2} - b^x a^{x-2} - b^{x-2} a^x + b^{2x-2} = 0.$

c) $a^{2x+1} b^{1-x} - a^{x+2} - a^x b^2 + a b^{x+1} = 0.$

d) $a^{2x} - (a^{2c} + b^{2c}) a^{x-c} b^{x-c} + b^{2x} = 0.$

e) $\frac{a}{(a+b)^{x+2}} + \frac{b}{(a+b)^{2x+3}} = 1.$

f) $(x - 1)a^{x(x-1)} - x^2[a^{x(x-1)} - 1] - (x - 1) = 0.$

g) $\frac{1}{a^{(x-1)(x-2)}} + \frac{1}{a^{(x-1)(x-3)}} = \frac{2a^2}{a^{(x-2)(x-3)}}$

h) $a^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} + a^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{6}}\right) a^{\frac{1}{(x-2)(x-3)}}.$

183. Să se rezolve ecuațiile:

a) $a^x - 1 = (a - 1)^x,\ a > 1.$

b) $(a^x - 1)^n = (a^n - 1)^x,\ a > 1,\ n \in \mathbf{N}^*.$

c) $[(a + 1)^n - a^n]^x = [(a + 1)^x - a^x]^n,\ a > 0,\ a \neq 1,\ n \in \mathbf{N}^*.$

d) $(a^x - b^x)^n = (a^n - b^n)^x,\ a > b > 0,\ n \in \mathbf{N}^*.$

184. a) $1^x + 2^x + \ldots + n^x = (C_{n+1}^2)^x.$

b) $1^x + 2^x + \ldots + n^x = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{2x}{3}}.$

c) $3^x + 3^{-\frac{x+1}{2}} + 3^{-\frac{x+2}{3}} + \ldots + 3^{-\frac{x+n-1}{n}} = \left(\frac{n+8}{3}\right)^x,\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$

D. M. Bătinețu

d) $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^x,$
$a_i \in (0, \infty) - \{1\},\ i = \overline{1, 2, \ldots, n}.$

e) $1^x + 2^x + \ldots + n^x + 1^{-x} + 2^{-x} + \ldots + n^{-x} = 2n \cos x$

185. Să se rezolve ecuația:

$$x^{2n} + (1^x + 2^x + 3^x + \ldots + n^x)(1^{-x} + 2^{-x} + \ldots + n^{-x}) = n^2,$$
$$n \in \mathbf{N}^*,\ n \geqslant 2.$$

186. Să se rezolve ecuația:

$$2^x + 3^x + \ldots + n^x + 2^{-x} + 3^{-x} + \ldots + n^{-x} = 2n - 2,$$
$$n \in \mathbf{N}^*,\ n \geqslant 2.$$

Concurs „Spiru Haret", 1989

187. Să se rezolve:

a) $4^x + 3(2^x + x^3) = x^2 + (x+1)(x+2)2^x$, $x \in \mathbf{N}$.

Gh. Andrei

188. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + a_1)^x + (1 + a_2)^x + \ldots + (1 + a_n)^x = n + a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$.

Gheorghe Andrei, Concursul „Spiru Haret", 1989

189. Să se rezolve: a) $x(e^{x^2} - e^{2x}) = 2 - x$.

b) $(2x - x^2)(e^{1^2} - e^{2x}) = e^x$.

190. Să se rezolve ecuația:

$$(a_1 + a_2a_3 \ldots a_n)^x + (a_2 + a_1a_3 \ldots a_n)^x + \ldots + (a_n + a_1a_2 \ldots a_{n-1})^x = \\ = \ln \sqrt{a_1 - x} + \ln \sqrt{a_2 - x} + \ldots \ln \sqrt{a_n - x} + n,$$

unde $a_i \in (0, \infty)$ și $a_1a_2 \ldots a_n = 1$.

Gheorghe Andrei, test tabără județeană

191. Să se rezolve în $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ecuațiile:

a) $5^{2x} - 3 \cdot 2^{2y} + 5^x \cdot 2^{y-1} - 2^{y-1} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$.

b) $5^{2x} - 5^x \cdot 3^{y+2} + 9 \cdot 3^y + 8 \cdot 9^y - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$.

192. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$2^{x^3+y-2} - 2^{x^3+2} = 1984.$$

N. Chiriţoiu

193. Să se rezolve: a) $2^{x-1} + 2^{y-1} = 2^{\frac{x+y}{2}}$

b) $2^{x-1} + 2^{y-1} + 2^{z-1} = 2^{\frac{x+y+z+5}{4}} - 1$.

V. Pătragenaru

194. Rezolvați:

a) $2^x + 3^y + 4^z = 2050$, $x, y, z \in \mathbf{N}$.

Mihail Mogoşanu

b) $2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 1920$ unde $x < y < z < t$ și $x, y, z, t \in \mathbf{N}$.

Mircea Mărculescu

c) $3^x + 3^y + 3^z = 513$.

195. Să se rezolve în $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ ecuația:

$$2^x + 1 = 3^y.$$

G.M. Nr. 1/1979

196. Să se rezolve în numerele naturale ecuația:

$$3^x - y^3 = 1.$$

Titu Andreescu, Etapa județeană 1982

197. Să se rezolve în numerele naturale:

$$2^x \cdot 5^y + 1 = 3^z.$$

Dorinel Anca

198. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$3^x \cdot 2^y + 1 = z^2.$$

D. Acu

199. Să se rezolve în $\mathbf{N}^2$ ecuația: $\left(\frac{a+1}{2}\right)^x = \frac{a^y+1}{2}$ unde $a > 1$ este un număr natural.

I. Cucurezeanu

200. Să se rezolve în $\mathbf{N}^3$ ecuația $x^2 + 5^y = 3^z$.

I. Cucurezeanu

201. Să se arate că ecuația $x^3 + 7 = y^4$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

I. Cucurezeanu

202. Rezolvați $3^x + y^2 = 5^z$ în numere naturale.

I. Cucurezeanu

203. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$3^x - y^3 = 5^z.$$

I. Cucurezeanu

204. Rezolvați ecuația $3^x + 2^y = z^2$.

Erwin Just

205. Să se rezolve în numerele întregi ecuația:

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z.$$

Olimpiada Bulgaria, 1984

206. Pentru y impar, ecuația $3^x + 2^y = 5^z$ admite în numerele întregi mai mari ca zero, numai soluția $x = y = z = 1$.

207. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

208. Să se rezolve în $\mathbf{N}$ ecuația:

$x^x + y^x = y^{x+y} - 1$ în cazul y este număr par.

Petre Stîngăscu

209. În $\mathbf{Z}_+^4$ să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^3 + 7y = 2^u \\ y^3 + 7x = 2^v \end{cases}$$ are soluția unică $x = y = 1$, $u = v = 3$.

Ion Cucurezeanu

210. Să se rezolve ecuația $2^x + 7^y = z^3$.

I. Cucurezeanu

211. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$2^{x^2-2x+1} + 2^{y^2-2y+2} + 2^{z^2-4z+5} = 1057.$$

Petre Năchilă

212. Să se rezolve ecuația:

$$(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^x + (|x| - \sqrt{x^2 - 1})^x = 2(2x^2 - 1)$$

G.M. Nr. 9/1989

213. Să se rezolve ecuația:

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Marius Cavachi

214. Să se rezolve ecuația:

$$a^{x-1} + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}} = a + 1, \text{ unde } a \in \mathbf{N},\ a \geqslant 2.$$

G.M. Nr. 11–12/1989

215. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + a)^x = x + a^x,\ a > 1.$$

Constantin Caragea

216. Să se rezolve ecuația:

$$4^x \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} \cdot 9^x = 210.$$

217. Să se rezolve:

$$e^x - e^{-x} = 2\ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

218. a) Să se determine două soluții întregi ale ecuației:

$$3^{2x!} = 2^{3x!} + 1.$$

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale.

Dan Seclăman, etapa finală, 1985

219. Să se rezolve:

$$x^{x^a} = a,\ a > 0.$$

220. Să se rezolve:

$$x^{a^x} = a^{x^a},\ a \in (0,1).$$

I. V. Maftei, Titu Andreescu, etapa județeană, 1983

221. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$

b) $2^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\operatorname{ctg}^2 x} = 4.$

222. $(\operatorname{tg} x)^x + (\operatorname{ctg} x)^x = 2 \sin 2x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

223. $x^{2\lg y} - 2y^{\lg x} + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 1.$

224. $4^{\sin^2 x} + 3^{\operatorname{tg}^2 x} = 4^{\cos^2 x} + 3^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

225. $\sqrt{2^{x-\pi/4} + 2^{\pi/4-x}} = |\sin x + \cos x|.$

226. Rezolvați:

$$2^{2\lg x} - 2 \sin y + 2{,}5 = 2^{\lg x + 1} + 0{,}5 \cos 2y.$$

Matematică — Sofia

227. $\cos[\pi \log_2(x-4)] \cos[\pi \log_2(x-1)] = 1.$

228. 1) $4 \log_{\sec x \operatorname{cosec} x} \sin x \cdot \log_{\operatorname{cosec} x \sec x} \cos x = 1,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

2) $\log_{\sin x \cos x} \sin^2 x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos^2 x = 1.$

229. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\lg(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \lg(1 + \operatorname{ctg}^2 x) = 2 \lg 2.$

b) $\lg(1 + \sin^2 x) \lg(1 + \cos^2 x) = \lg^2 \frac{3}{2}.$

c) $\lg(1 + \sec^2 x) + \lg(1 + \operatorname{cosec}^2 x) = 2 \lg 3.$

Gheorghe Andre

230. $\log_{\sec x} 13{,}25 = \log_{\operatorname{tg} x} 12{,}25,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

C. Ionescu Țiu

231. a) $2 \log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x)$ b) $\log_{\sqrt{3}} \sin x = \log_{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x$

232. Să se rezolve:

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 3.$$

Laurențiu Panaitopol

233. Să se rezolve în numerele naturale ecuația:

$\left(\frac{a-1}{2}\right)^x = \frac{a^y - 1}{2}$, $a > 1$ este un număr natural dat.

I. Cucurezeanu

234. Să se rezolve în **N** ecuația:

$$5^x - 4^x = y^2.$$

N. Papacu — Slobozia

235. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6.$

b) $a^{\log_{\sqrt{b}} x} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0.$

c) $\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2 \log_{1/4}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1.$

d) $2x - \log(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^x.$

e) $\sqrt{\log_x 5 \sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \log_{\sqrt{5}} x} = \sqrt{6}.$

f) $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{1,25}(2+5x-x^2)}.$

g) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}.$

h) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2.$

i) $x^2 \log_3 x^2 - (2x^2+3) \log_9(2x+3) = 3 \log_3 \frac{x}{2x+3}.$

j) $2 \log_4(x+1)^2 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x-2)^2 + \log_{1/2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = 2.$

k) $\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2 \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$

l) $10^{2x}\lg^2 x + 2 \cdot 10^x = 1 + 2 \cdot 10^{2x}\lg x.$

m) $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{1/6}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x.$

236. Pentru ce valori reale ale parametrului a ecuațiile au soluții:

a) $[1 + (a + 2)^2] \log_3(2x - x^2) + [1 + (3a - 1)^2] \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) =$
$= \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$

b) $[1 + (3a + 4)^2] \log_2(-2x - x^2) + [1 + (a - 2)^2] \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) =$
$= \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \log_2(-2x - x^2).$

237. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^{\log_5^2} + 2^{\log_5 x} = 8.$

b) $3^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9.$

c) $x^{\log_5 x} + 5^{\log_5^2 x} = 10.$

d) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$

e) $x^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = x + 3^{\log_3^3 x}.$

f) $3^{\log_3^2 x^3} + x^{2\log_3 x} = 90.$

238. Să se rezolve ecuația:

$b^{\log_a x} + c^{\log_a x} = x$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ și $b^2 + c^2 = a^2.$

Generalizare.

239. $\sqrt{\lg x^2 - \lg^2 x} + \sqrt{\lg x^2 - \lg^2 x + 3} + \sqrt{\lg x^2 - \lg^2 x + 8} = 6.$

Revista Matematică — Bulgaria

240. a) $\log_2(4^{x^2} + 4) = (x^2 - 2) \pm \log_2(2^{x^2} + 14).$

b) $2\lg^3 x^2 - 12\lg^2 \sqrt{x^2} + 1 = 0.$

241. Să se rezolve ecuația $\log_{x + \frac{1}{x}} 4 = x + \frac{1}{x}.$

242. Să se rezolve ecuația:

$\log_2^2 x + \log_2 x + \log_2(x^2 + a) + a + \frac{3}{4} = 0,$ pentru $a \geqslant \frac{1}{4}.$

Vasile Mocanu

243. a) $\frac{1}{\sqrt{2\log_{|x+a|} a}} + \frac{1}{\sqrt{2\log_{|x-a|} a}} = \frac{1}{\sqrt{\log_{|x^2-a^2|} a}}$ $a > 0,\ a \neq 1.$

Etapa județeană, 1976

b) $\sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{ax} + \log_x \sqrt[a^2]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[a^2]{\frac{a}{x}}} = a$

244. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^{2\log_3 3} + x^2(1 - 3^{\log_3 x}) = 1.$

b) $x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3x^2.$

c) $(x+1)^{\log_3|x-2|} + 2|x-2|^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3.$

d) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x.$

e) $7^{\log_3(x-1)} - 5^{\log_7(x+1)} = 2.$

245. Să se rezolve ecuația

$$4a^2 \log_{2a} x \log_{a^2+1} x = (a^2+1)^2 x^2 (\log_{a^2+1} x - \log_{2a} x), \quad a \in (0, \infty) - \left\{1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Etapa locală, Suceava, 1985

246. Să se rezolve ecuația

$$x + \log_a x = 1 + a \log_a x, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

Andrei Gheorghe, Etapa locală — Constanța

VIII. **247.** Rezolvați: $\log_a(1 + \log_a x) = a(1 - x), \quad a > 0, \ a \neq 1.$

Mircea Lascu

248. Să se arate că ecuația nu are soluții în intervalul $[1, \infty)$

$$e^x x^3 \ln^3 x + e^{2x} = 3x e^x \ln x - 1.$$

249. Să se rezolve:

a) $\log_{11}^x 7 + \log_{13}^x 5 = 2 \log_{15}^x 17.$

b) $\log_7^x 5 + \log_7^x 4 = 2 \log_7^x 3.$

c) $\log_7^x 2 + \log_7^x 3 + \log_7^x 4 + \log_7^x 9 = 3 \log_7^x 6.$

d) $\log_5^x 4 + \log_5^x 9 = 2 \log_5^x 6.$

250. Să se rezolve ecuația $\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x^{12}}.$

251. Să se rezolve ecuația $\log_{z^2}(x^2 - 2ab) + \log_z(x^2 - 2ab) = 3$ dacă $z^2 = a^2 + b^2$.

252. Să se rezolve ecuația:

$$\log_n x + \log_{\sqrt{n}} x + \log_{\sqrt[3]{n}} x + \ldots + \log_{\sqrt[n]{n}} x = \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

253. Rezolvați:

a) $\log_2(2x+2) + \log_3(3x+3) + \ldots + \log_n(nx+n) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^x.$

b) $\log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^x.$

254. Să se rezolve $\log_2(x+2) = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1}$, unde $x \in \mathbf{N}, \ x \geqslant 2.$

255. Să se rezolve ecuația $\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^4-2x^2+1}$

Ioan Crișan

256. Să se rezolve: a) $\log_2(x^2+1)-\log_2 x=2x-x^2$.

b) $\log_2(x^2+1)-\log_2 x=3x^2-2x^3$.

257. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{xy}\frac{z^2}{xy}+\log_{xz}\frac{y^2}{xz}+\log_{yz}\frac{x^2}{yz}=0$$

știind că x, y, z sînt în aceeași poziție față de 1.

258. Să se rezolve ecuația

$$4^{\sqrt{\log_2 x}}\cdot 4^{\sqrt{\log_2 y/2}}\cdot 4^{\sqrt{\log_2 z/4}}\cdot 4^{\sqrt{\log_2 t/2}}=xyzt.$$

Tudorel Lupu

259. Într-un sistem de axe de coordonate este dusă o dreaptă ale cărei puncte aparțin mulțimii soluțiilor inecuației

$$\log_4\frac{4^x}{|x+y|}\log_{|x+y|}\frac{(x+y)^x}{4}\cdot(2x^2-10\cdot 2^{x+y}\cdot x+2xy+y^2-3)\geqslant 0.$$

Să se găsească ecuația acestei drepte.

Matematica v'școle, 1986

260. $\log_3(2x+1)+\log_5(4x+1)+\log_7(6x+1)=3x$

261. Să se rezolve ecuațiile: 1) $a^{[x]}=[a^x]$.

2) $\log_a[x]=[\log_a x]$, $a\in\mathbf{N}$, $a\geqslant 2$.

262. Fie $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$.

a) Pentru ce valori ale lui $x\in(0,\infty)$ are loc egalitatea

$$[\log_a x]+\left[\frac{1}{3}+\log_a x\right]=[2\log_a x]?$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$[\log_3 x]+\left[\frac{1}{3}+\log_3 x\right]=3.$$

M. Neacșu G.M. 8/1985

263. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sum_{k=2}^{n}\left[\left\lfloor\frac{1}{k}\right\rfloor^x-\log_k(1+x)\right]=n-1$.

b) $\sum_{k=2}^{n}\log_k(kx+k)=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^x$

264. Fie $a, b, c\in(1,\infty)$. Dacă ecuația

$$\log_a x+\log_b x+\log_c x=9\log_{abc}x$$

are două soluții distincte, atunci ea are o infinitate de soluții.
Generalizare.

Georgică Marineci, Etapa locală — Argeș, 1985

265. Să se rezolve ecuația:

$$(x+1)\lg 4^x = x\lg(2^{x+1}+x).$$

Marcel Chiriță

266. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{2-x}\left(x+\frac{5}{2}\right) = \cos\frac{4x+1+8\pi}{24} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{33}{x^2+10x+21}}.$$

267. Să se rezolve:

$$\log_3(x^2-3x+3)\log_5\frac{7}{3}(1+\log_{7/3}3) = \log_5(x^2-3x+3)\cdot$$
$$\cdot\log_{7/3}(x^2-3x+3)\cdot\log_3\frac{7}{3}.$$

268. Să se rezolve: a) $2^x = \ln(ex+e)$.

b) $a^{\sqrt[n]{\log_a x}} + x^{\sqrt[n]{\log_x^{n-1} a}} = 2a.$

Gheorghe Andrei

269. Să se rezolve:

a) $3^x + 4^x + 5^x \geqslant 6^x$.

b) $(3-2\sqrt{2})^x + 1 \leqslant 6(\sqrt{2}-1)^x$.

Ion Cheșcă — Călărași, Etapa locală 1984

c) $5^{2x-5} + 5 \leqslant 5^{x-1} + 5^{x-3}$.

d) $35^x - 25^x \leqslant 28^x - 20^x + 21^x - 15^x$.

I. V. Maftei, Sorin Rădulescu, Etapa locală Buc., 1984

e) $2^{3x} + 3^{2x} - 211^x \geqslant 0$.

f) $2^x + 3^x + 4^x - 5^x \geqslant 9^x + 10^x - 15^x$.

Titu Andreescu

g) $2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} \geqslant 2^{x+1}$.

h) $(2+\sqrt{3})^x - \frac{\sqrt{6}}{2^x}(\sqrt{6}+\sqrt{2})^x + 1 \leqslant 0$.

g) $4^x + 9^x + 16^x + 25^x \leqslant 2^x(1+2^x)(3^x+5^x)$

Petre Năchilă

270. Rezolvați:

a) $|x|^{2x^2-3x+1} \leqslant 1$.

b) $x^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$.

Etapa județeană, 1981

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{x-2}(x^2-4x+3)} < 1$.

d) $\log_2\left(\log_3\frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant \log_2\left(\log_3\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Examen definitivat, 1966

271. a) $\log_{ax} x - \log_{a^2x} x + \log_{a^3x} x > 0$.

b) $\log_a x + \log_{ax} x + \log_a x \log_{\frac{a}{x}} x \geqslant 0$.

c) $\log_{a^2x} x^5 + \log_{\frac{x}{a^2}} x^7 + \log_{\frac{a}{x^2}} x \cdot \log_a x \geqslant \log_{\frac{x}{a^2}} x \cdot \log_{a^2x} a$.

d) $\dfrac{2\log_a^2 x - 3\log_a x + 1}{x^2 - 1} > 0$.

e) $\sqrt{\dfrac{\log_a x^2 + \log_{x^2} a - 2}{\log_a x^2 + \log_{x^2} a + 2}} < 1$.

Andrei Gheorghe, Etapa locală — Constanța, 1978

272. a) $x^{\log_a x + 1} > a^2 x$.

b) $\log_{\frac{1}{a}}(x + 1) > \log_a(1 - 2x)$.

c) $(ax)^{\log_a x^2} \leqslant ax^3$.

d) $(x + 1)^{\log_a (ax + a)^2} \leqslant (ax + a)^4$.

e) $(x + 1)^{\log_{a^2}(x+1)^2} \leqslant \left(\dfrac{a}{x + 1}\right)^6$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.

273. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \leqslant (a + b + c)^x,\ a, b, c, a + b + c \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}.$$

Generalizare

Gheorghe Andrei

274. Să se determine perechile (x, y) care verifică inecuația:

$$\log_2 x + \log_x 2 \leqslant 2 \sin y.$$

275. a) Să se rezolve ecuația $x + \log_a x = 1 + a \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$.

b) Să se rezolve inecuația $x + \log_a x \geqslant 1 + a \log_a x$.

c) Să se arate că pentru orice $a_i \geqslant n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ are loc inegalitatea $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \log_{n+1}(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța 1987

276. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\dfrac{6}{2x + 1} > \dfrac{1 + \log_2(x + 2)}{x}$.

b) $\dfrac{2 + \log_3 x}{x - 1} < \dfrac{6}{2x - 1}$.

c) $\dfrac{2^{x+1} - 7}{x - 1} < \dfrac{10}{3 - 2x}$.

Admitere U.R.S.S

277. Să se rezolve inecuația

$5^x\log_2 x + x \cdot 3^x - 4^x\log_2 x \geqslant 3^x\log_2 x + x5^x - x4^x.$

C. Ursu

278. Să se rezolve inecuațiile în mulțimea numerelor întregi.

a) $3x + 1 < 2\log_2(x + 4)$.

b) $3x - 2 < 2\log_2(x + 3)$.

279. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $2^x + a^x \geqslant 3^x + 4^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Admitere — fac. fizică 1989

280. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că:

$a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geqslant n$, $\forall x \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

281. Să se arate că:

a) $\ln x \ln y < \ln^2 (x + y)$, $\forall\, x, y \in (1,\infty)$.

b) $\ln \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x\ln x + y\ln y}{x+y}$, $\forall\, x, y \in (0,\infty)$.

282. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x^{y+1} = 16, \\ x^{2y-3} = 8. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 648, \\ x + y = 7. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x+y} = 6^y, \\ 3^x = 32^{y+1}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 15, \\ \sqrt{2^x} - 3^y = 3. \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64. \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250, \\ 2^x \cdot 5^x = 40. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3^{1-x-y} = 4^{-y}, \\ 2^{2x-1} = 3^{3y-x}. \end{cases}$ i) $\begin{cases} 8^{2x} + 27^{y/3} = 5, \\ 2^{12x} - 3^{2y} = -5. \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^{x^2} = y, \\ x^{4x-1} = y^4. \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^{-y}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)2^{y-x} = 3. \end{cases}$ l) $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36, \\ \sqrt{4^{-x}} \cdot \sqrt[10]{256^y} = 4. \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y-2}} = 36, \\ 9^{\sqrt[3]{x}} + 4^{\sqrt[4]{y-4}} = 97. \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2 \cdot 15^x + 15^y = 5^x \cdot 3^{-y}, \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3 \cdot 9^x. \end{cases}$

o) $\begin{cases} x \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot 2^y = -3y \cdot 4^{x+y} \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$ p) $\begin{cases} x^{x+y} = y^n, \\ y^{x+y} = x^{2n} \cdot y^n. \end{cases}$

r) $\begin{cases} x^y = y^x, \text{ unde } m \neq n,\ mn > 0. \\ x^m = y^n, \end{cases}$ s) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 18, \\ 3^{xy} = 81. \end{cases}$

ș) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$ t) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2^x + 2^y = 3. \end{cases}$

ț) $\begin{cases} 2^y - 3^x = 1. \quad x, y \in \mathbf{Z}. \\ 1{,}5y - 2^{\frac{-x+y}{x}} = 1 \end{cases}$ u) $\begin{cases} 2^y - 3^x = 1. \\ 1{,}5y - 2^{\frac{x-y}{y}} = 1, \end{cases}$ $x, y \in \mathbf{Z}$

283.

a) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2^x + 2^y + 2^z = 7, \\ 2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z} = \frac{7}{4}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71, \\ 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21, \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 3^y + 4^z = 6, \\ 4^x + 9^y + 16^z = 14, \\ 8^x + 27^y + 64^z = 36. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3^x + 4^y + 5^z = 16, \\ 9^x + 16^y + 25^z = 110, \\ 27^x + 64^y + 125^z = 862. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^{xy} - 2 \cdot 4^{xz} + 64 = 0, \\ 2^{y(x+z)} + 2 \cdot 2^{x(y+z)} - 20 \cdot 2^{xy} = 0, \\ 2^{xy} + 2^{z(x+y)} - 24 \cdot 2^{yz} = 0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^x 3^y + 2^z = 124, \\ 3^y \cdot 2^z + 2^x = 436, \\ 2^z 2^x + 3^y = 91, \text{ unde } x, y, z \in \mathbf{N}. \end{cases}$

284. a) $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \geqslant y. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2^{y+1} \geqslant 12, \\ 4x + 4^y \leqslant 32. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x+2} + 2y + 1 = 0, \\ y^2 \geqslant 5 \cdot 4^x + \frac{5}{4}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leqslant 2y. \end{cases}$ e) $\begin{cases} 9 \log_2^2 x + 1 = \log_2 y, \\ 2 \log_2 x^3 \geqslant \log_2 y. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^{x-y} - 2 \cdot 6^{x-y} - 6^{-2y} = 0, \\ 2^{-x-y} - 2 \cdot 3^{x+y} + 3 \cdot 9^x = 0. \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3^{2x+1} + 2^{y+1} = 31, \\ \log_3(x+2) - \log_2(y+1) = 0 \end{cases}$

285. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} y + \lg x = 1, \\ x^y = \frac{1}{100}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 12, \\ \log_x y + \log_y x = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 81, \\ 3(2 \log_{y^3} x - \log_{x^{-1}} y) = 10. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^y = 5^{12}, \\ \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7. \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = 16, \\ \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 y + \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg^2 a^2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 36x + y = 100, \\ \lg \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}} + \lg \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}} = \lg \frac{1}{2}. \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x - y \log_x y = (x + y) \log_x y. \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^{\frac{1}{\ln y}} \cdot y^{\frac{1}{\ln x}} = e^2, \\ xy = e^2. \end{cases}$ k) $\begin{cases} xy = 2 - y, \\ y = \log_3(x + 2). \end{cases}$

l) $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81 \sqrt[3]{3}, \\ xy = 9 \sqrt[3]{9}. \end{cases}$ m) $\begin{cases} 3x - 2^y + 2 = 0, \\ 2 \log_3(x + 7) = y + 1. \end{cases}$

n) $\begin{cases} a^x b^y = ab, \\ 2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \log_{\sqrt{a}} b. \end{cases}$ o) $\begin{cases} x^y = 625^3, \\ \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7. \end{cases}$

p) $\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b}, \\ b^{\lg x} = a^{\lg y}. \end{cases}$ r) $\begin{cases} xy = 40, \\ |x|^{\lg|y|} = 4. \end{cases}$ s) $\begin{cases} x^3 y^2 = a^{13}, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{130}{9} \lg^2 a. \end{cases}$

ş) $\begin{cases}\log_3(\lg x+\lg y)-\log_9(\lg y)=1,\\ \log_9(\lg x-\lg y)-\log_3(\lg y)=0.\end{cases}$

t) $\begin{cases}x-y=2\sqrt{3},\\ (1+2\log_{|xy|}2)\log_{x+y}|xy|=1.\end{cases}$ ţ) $\begin{cases}2\log_2 x-3^y=15,\\ 3^y\log_2 x-2\log_2 x=3^{y+1}.\end{cases}$

u) $\begin{cases}\log_{|xy|}(x-y)=1,\\ 2\log_5|xy|\log_{|xy|}(x+y)=1\end{cases}$

v) $\begin{cases}2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)=\log_{y+2}(x^2-2x+1)=6,\\ \log_{1-x}(y-5)-\log_{2+y}(x+4)=1.\end{cases}$

w) $\begin{cases}y\cdot x^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}},\\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1.\end{cases}$ x) $\begin{cases}\log_{12}x\left(\frac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right)=\log_2 x,\\ \log_2 x\cdot\log_3(x+y)=3\log_3 x.\end{cases}$

y) $\begin{cases}2\log_4(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\frac{x}{y}-2\right),\\ 5+\log_2\frac{y}{x}=\frac{6}{\log_2\frac{x}{y}}.\end{cases}$

z) $\begin{cases}\log_a^2 x+\log_a^2 y-\log_a^2(x+y-a)=1,\\ \log_{\frac{1}{a}}x\log_{\frac{1}{a}}y+\log_{\frac{1}{a}}(x+y-a)=0.\end{cases}$

286. Să se rezolve sistemele

a) $\begin{cases}\lg x+\lg y=2,\\ 2^{\lg x}\cdot 3^{\lg y}=\sqrt{54}.\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log_x y+\log_{3x}y^2=4,\\ \log_y x+\log_{3y}x=\frac{7}{6}.\end{cases}$

c) $\begin{cases}y\log_2(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0,\\ x\log_2(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0.\end{cases}$ d) $\begin{cases}abxy=ax+b, \quad a\neq b.\\ \log_y\frac{4}{a^3b^3x^3}+2\log_y(ax+b)=4.\end{cases}$

e) $\begin{cases}|\log_3 x+i\log_3 y|=1,\\ (\log_3 x+i\log_3 y)^3=\log_3^3 x+i\log_3^3 y.\end{cases}$

Gh. Andrei, etapa locală — Cta, 1986

f) $\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^y=\frac{5}{6},\\ \log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{27}}y=\frac{1}{6}.\end{cases}$ *V. Chiriac*

g) $\begin{cases}3^x-2^y=23,\\ \log_3 x+\log_2 y=2.\end{cases}$ *Etapa finală 1986*

h) $\begin{cases}x+y=54,\\ \log_3 x\log_3 y=9.\end{cases}$ i) $\begin{cases}x+y=30,\\ \log_5 x\log_5 y=2.\end{cases}$

j) $\begin{cases}y-x=4,\\ \log_2 x\cdot\log_4 y=3,\end{cases}$ k) $\begin{cases}2^x+2^y=8,\\ \log_2 x+\log_2 y=4.\end{cases}$

l) $\begin{cases}x+y=3,\\ \log_2^2 x+\log_2^2 y=1,\end{cases}$

Gh. Andrei

m) $\begin{cases} \log_2^2 x + \log_4^2 y = 2, \\ x^{\log_4 x} + y^{\log_4 y} = 6. \end{cases}$ *C. Caragea, Consiunța, Etapa locală, 1986*

n) $\begin{cases} \log_3^3 x + \log_9^3 y = 2, \\ x^{\log_3^2 x} + y^{\log_9^2 y} = 12. \end{cases}$ *Gheorghe Andrei*

o) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ x^{\log_3 x} \cdot y^{\log_3 y} = 84. \end{cases}$

p) $\begin{cases} \log_x(ax + by)\log_y(bx + ay) = 4, \\ \log_x(bx + ay) + \log_y(ax + by) = 4. \end{cases}$

Matematica v'şcole, 1985

r) $\begin{cases} \log_x(2x + 3y)\log_y(2y + 3x) = 4, \\ \log_x(2y + 3x) + \log_y(2x + 3y) = 4. \end{cases}$

s) $\begin{cases} 4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y, \\ \log_2 x^2 \geqslant \log_2 y. \end{cases}$

287. Rezolvați următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 6, \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 162, \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = \sqrt[4]{48}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lg x \lg y = \lg(2xy), \\ \lg y \lg z = \lg(10yz), \\ \lg x \lg z = \lg(40xz). \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a(x + y - z) = \log_a 6, \\ \log_a y + \log_a z + \log_a(y + z - x) = \log_a 60, \\ \log_a z + \log_a x + \log_a(z + x - y) = \log_a 24. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_a x \log_a z + \log_a y = 3, \\ \log_a y \log_a z - \log_a x = 4, \\ (1 + \log_a z)\log_a x + (\log_a z - 1)\log_a y = 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} (xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} = a, \\ (yz)^{\lg x} + (xy)^{\lg z} = b, \\ (xz)^{\lg y} + (yz)^{\lg x} = c. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} xz = y^2, \\ 100\,(yz)^{\lg x} = (zx)^{\lg y} = (xy)^{\lg z}. \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^\alpha y^\beta z^\gamma = d, \\ \dfrac{\lg x}{a} = \dfrac{\lg y}{b} = \dfrac{\lg z}{c}. \end{cases}$

i) $\begin{cases} xyz = 100, \\ x^{\lg y} y^{\lg z} z^{\lg x} = 10^{-1}. \\ x^{\lg y \lg z} y^{\lg x \lg z} \cdot z^{\lg x \lg y} = 10^{-6}. \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2^{\lg x} + 3^{\lg y} + 4^{\lg z} = 21, \\ 4^{\lg x} + 9^{\lg y} + 16^{\lg z} = 269, \\ 8^{\lg x} + 27^{\lg y} + 64^{\lg z} = 4131. \end{cases}$

k) $\begin{cases} xz = y^2, \\ \log_2 x + \log_4 y + \log_8 z = 3. \end{cases}$

l) $\begin{cases} \log_a x + a\log_x a = 2\log_a y, \\ \log_a y + a\log_y a = 2\log_a z, \\ \log_a z + a\log_z a = 2\log_a x, \end{cases}$

unde $a, x, y, z \in (0,1)$ sau $a, x, y, z \in (1,\infty)$.

m) $\begin{cases} \log_3^3 x - \log_3^3 \frac{x}{27} = \log_3^3 y, \\ \log_3^3 y - \log_3^3 \frac{y}{27} = \log_3^3 z, \\ \log_3^3 z - \log_3^3 \frac{z}{27} = \log_3^3 x. \end{cases}$

Gheorghe Andrei

n) $\begin{cases} 3^{2x+1} + 3^{2y+1} + 3^{2z+1} = 81, \\ \log_3(2x+1) + \log_3(2y+1) + \log_3(2z+1) = 3. \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2^{x+y+1} = 4^y + 1, \\ 2^{y+z+1} = 4^z + 1, \\ 2^{z+x+1} = 4^x + 1. \end{cases}$

Fie sistemul:

p) $\begin{cases} \left[\frac{a + \log_2 x}{2}\right] = \frac{1 + \log_2 y}{2}, \\ \left[\frac{3 + \log_2 y}{3}\right] = \frac{1 + \log_2 y}{2}. \end{cases}$

a) Să se rezolve.

b) Să se arate că admite o soluție de forma (x, x).

c) Să se arate că soluțiile din $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $x > 0$ se pot pune sub forma unui șir (x_n, y_n) $n \in \mathbf{N}^*$ cu $x_n < x_{n+1}$ și $y_n < y_{n+1}$ $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$ și să se calculeze suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \log_2 \frac{y_k}{x_k}$.

Florin Pand

ANALIZĂ COMBINATORIE

§ 1. PROPRIETĂȚI

1. $n! = (n-1)!n$.

2. $n \cdot n! = (n+1)! - n!$.

3. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

4. $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad 0 \leqslant k \leqslant n$.

5. $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.

6. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

7. $A_{n+1}^{k+1} = (n+1)A_n^k$.

8. $A_n^{k+1} = (n-k)\,A_n^k$.

9. $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$; $0 \leqslant k \leqslant n$.

10. $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$.

11. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

12. $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k$ sau $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

13. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$.

14. $C_{u+1}^k = \frac{n+1}{n-k+1} C_n^k$.

15. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

16. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

17. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

18. $C_n^1 + C_n^2 + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^4 + \ldots + C_{n+m}^{m+2} = C_{n+m+1}^{m+2}$

19. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

20. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$.

21. $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

22. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

23. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

24. $C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \ldots + C_n^p C_m^0 = C_{n+m}^p$

25. $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n$

26. $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$.

27. $(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - \ldots (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots$
$\ldots + (-1)^n C_n^n b^n$.

28. $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k$.

29. $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}$.

30. $A_m^m + A_{m+1}^m + \ldots + A_{m+n}^m = \frac{A_{m+n+1}^{m+1}}{m+1}$.

§ 2. Exerciții propuse

1. Să se calculeze sumele:

a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

b) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$.

c) $\frac{0!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{5!}{4!} + \ldots + \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!}$.

d) $\frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + \frac{2!}{4!} + \ldots + \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$.

e) $\frac{2!}{0!} + \frac{3!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \ldots + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

f) $\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!1!}$.

g) $\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{2^0}{n!}$.

h) $\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + (-1)^k \frac{2^{n-k}}{k!(n-k)!} +$
$+ \ldots + (-1)^n \frac{2^0}{n!}$.

i) $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \ldots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

j) $\frac{1}{0!+1!} + \frac{1}{1!+2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!+n!}$.

k) $\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+m}{(n+m+1)!}$.

l) $\frac{k!}{0!} + \frac{k!k}{1!} + \frac{(k+1)!k}{2!} + \ldots + \frac{(n-1)!k}{(n-k)!}$.

m) $n! + \frac{n!n}{1!} + \frac{(n+1)!n}{2!} + \ldots + \frac{(2n-1)!n}{n!}$.

n) $\frac{k!}{0!} + \frac{(k+1)!}{1!} + \frac{(k+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!}$.

o) $\frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \ldots + \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$.

p) $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-2}{k!}$.

q) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$.

r) $A_m^m C_n^m + A_{m+1}^m C_n^{m+1} + \ldots A_n^m C_n^n = A_n^m \cdot 2^{n-m}$.

s) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)C_n^{k+1}}{C_n^k}$.

t) $\sum_{k=1}^{n} k!(k-1)^2$.

ţ) $\sum_{k=1}^{n} k!(1+k^2)$.

u) $\sum_{k=1}^{n} (n-k) A_n^{k-1}$.

v) $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! (C_n^k)^3$.

x) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$.

z) $\sum_{k-1}^{n} \frac{k^3+k^2-2k-1}{(k+1)!)^2}$.

2. Să se verifice egalităţile:

a) $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k(k+1)! = (n-2)! - 2^{n+1}$.

b) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k!(2n-k)! = \frac{(2n+1)!}{n+1}$, $(k \leqslant 2n)$.

c) $\frac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \ldots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \ldots + C_{2n-1}^n} = 2$.

d) $\frac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n$.

e) $\frac{k!}{0!} + \frac{(k+1)!}{1!} + \frac{(k+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!} = k!\, C_{n+k+1}^n$.

f) $\sum_{k=0}^{p-1} (n-2k)^2 A_n^{2k} = \sum_{k=1}^{2p} A_n^k$, $(2p \leqslant n)$.

g) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k+p)!} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+p)!}\right]$.

3. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1}, \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1}, \end{cases}$ b) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10. \end{cases}$ c) $\begin{cases} C_{2x}^{y+1} = 5x, \\ C_{2x-1}^y = 10. \end{cases}$

d) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y+1} = \frac{5}{3}. \end{cases}$ e) $\begin{cases} A_{2x}^{3y} : A_{2x}^{3y-1} = 8, \\ C_{2x}^{3y} : C_{2x}^{3y-1} = \frac{8}{9}. \end{cases}$

f) $C_{1+x}^{1+y} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$. g) $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$.

h) $\begin{cases} A_{2x}^{3y} - 8A_{2x}^{3y-1} = 0, \\ 9C_{2x}^{3y} - 8C_{2x}^{3y-1} = 0. \end{cases}$ i) $\begin{cases} \frac{A_x^{y-3}}{A_x^{y-2}} = \frac{1}{8}, \\ \frac{C_x^{y-3}}{C_x^{y-2}} = \frac{5}{8}. \end{cases}$

j) $\begin{cases} xA_{x-1}^{y+1} Px - y = 15\,P_{x-1}, \\ 9C_{x+1}^y = 16\,C_x^{y+1}. \end{cases}$ k) $\begin{cases} C_x^{y+1} : C_x^y = \frac{5}{4}, \\ C_{x-1}^y : C_{x-1}^{y-1} = \frac{5}{3}. \end{cases}$

l) $\begin{cases} A_{5x}^{y-2} : A_{5x}^{y-3} = \frac{1}{7}, \\ C_{5x}^{y-2} : C_{5x}^{y-3} = \frac{7}{4}. \end{cases}$ m) $C_{x+1}^{y+1} = \frac{8}{3} C_{x+1}^y = 12\,C_{x+1}^{y-1}$.

n) $\frac{C_{x+1}^{y+1}}{5} = \frac{C_{x+1}^y}{5} = \frac{C_{x+1}^{y-1}}{3}$.

o) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y, \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1}. \end{cases}$ p) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3}, \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}. \end{cases}$

q) $\begin{cases} 7C_x^1 y^{x-1} z = A_8^4, \\ C_x^2 \cdot y^{x-2} z^2 = A_{10}^3, \\ 11C_x^3 \cdot y^{x-3} z^3 = A_{12}^4. \end{cases}$ r) $\begin{cases} C_n^1 \cdot x^{n-1} y = 240, \\ C_n^2 \cdot x^{n-2} y^2 = 720, \\ C_n^3 x^{n-3} y^2 = 1080. \end{cases}$

s) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \frac{n-1}{k-1} y = \frac{k}{n-1}, \\ xC_{n-2}^{k-2} - \frac{n-1}{k} y = \frac{k-1}{n-1}. \end{cases}$

t) $\begin{cases} \div\ C_{x-1}^{y-1},\ C_{x-1}^y,\ C_x^y, \\ \div\div A_x^y,\ A_x^{y+1},\ A_{x+1}^{y+1}, \end{cases}$ u) $\begin{cases} xC_{n-1}^k + \frac{n}{k} y = \frac{k+1}{n}, \\ xC_{n-1}^{k-1} - \frac{n}{k+1} - y = \frac{k}{n}. \end{cases}$

4. Să se demonstreze că numărul

$$\frac{2k(2k+2)(2k+4)\ldots 4n}{2^{n-2k+2}(2n-2k+4)\ldots 4n\cdot k(k+1)\ldots(n-k-3)}+1$$ este natural și pătrat perfect.

G.M. nr. 78/1987

5. În aranjamentele de n litere luate cîte k:

a) Cîte încep cu o literă dată?
b) Cîte conțin o literă dată?
c) Cîte încep cu două litere date?
d) Cîte conțin două litere date?
e) Cîte încep cu p litere date?
f) Cîte conțin p litere date?

6. În combinările de n obiecte luate cîte k:

a) Cîte conțin p obiecte date?
b) Cîte nu conțin nici unul din q obiecte date?
c) Cîte conțin un obiect dat aparținînd la p obiecte date?
d) Cîte conțin un obiect dat, dar nu conțin altul tot dat?
e) Cîte conțin cel puțin un obiect dat din p obiecte date?

7. Judecînd în două moduri deduceți o formulă care generalizează o formulă din manual:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

8. Cîte puncte de intersecție rezultă prin intersecția a n drepte din același plan, dintre care p trec prin același punct și q sînt paralele? (Restul se presupun concurente numai două cîte două.)

9. a) Să se afle numărul diagonalelor ce se pot duce într-un poligon convex cu n laturi?

b) Să se afle numărul punctelor de intersecție a diagonalelor situate în interiorul poligonului.

10. Fie dată o mulțime A cu m elemente și o mulțime B cu n elemente ($m, n \in \mathbf{N}^*$). Să se găsească numărul de permutări ale mulțimii $A \cup B$ astfel încît primul element al unei astfel de permutări să fie din A, iar ultimul din B. (Se presupune $A \cap B = \emptyset$.)

11. Să se demonstreze egalitatea:

$$C_n^1 a(1-a)^{n-1} + 2C_n^2 a^2(1-a)^{n-2} + \ldots + kC_n^k a^k(1-a)^{n-k} + \ldots + nC_n^n a^n = na.$$

12. Să se demonstreze inegalitatea:

a) $\sqrt{C_n^{k-1}C_n^k} + \sqrt{C_n C_n^{k+1}} < C_{n+1}^{k+1}$, $n \geqslant 2k$. b) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{C_n^{k-1}C_n^k} \leqslant 2^n - 1$.

c) $\sqrt{(n+1)C_{2n}^n} \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{C_n^0 C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

13. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ o progresie aritmetică cu suma S_{n+1}. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n}{n+1} S_{n+1}.$$

14. Să se arate că dacă n și k sînt numere naturale $n \geqslant k+3$ atunci coeficienții binomiali C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3} nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Concurs S.U.A. — 1969. Admitere Facultatea de matematică, 1987

15. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} C_x^3 \cdot x^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 x^4 2^{x-4} < 0, \\ C_x^5 \cdot x^5 \cdot 2^{x-5} - C_x^4 x^4 2^{x-4} < 0. \end{cases}$$

Admitere facultăți tehnice, 1987

16. Să se rezolve ecuația:

$\left[\frac{C_{3x-1}^{3x-3}}{7}\right] = 0$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

17. Să se rezolve ecuația:

$$C_{7x}^{x^2+10} + C_{5x+4}^{x^2+3x-4} = 379.$$

18. Să se rezolve ecuațiile:

a) $A_x^y = x + y$, $(x, y \in \mathbf{N})$. b) $x! + y! = (x+y)!$ $(x,y \in \mathbf{N})$.

c) $A_x^y = xy + x + y$.

Gh. Andrei, 1992

19. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + \ldots + C_x^{x-10} = 1023$.

b) $C_{x-10}^{x-11} + C_{x-9}^{x-11} + \ldots + C_{x-1}^{x-11} = 65$.

c) $C_{x-12}^1 + C_{x-11}^2 + \ldots + C_{x-1}^{12} + C_x^{13} = 559$.

Gheorghe Andrei

20. a) $x! + 1 = (x+1)^2$; b) $(x-3)! + x = x^2$; c) $(x-2)! + 3 = x^2$.

d) $(x+2)! + 15(x-1)! = 5[x! + (x+1)!]$.

e) $4!\,(x-5)! + 1 = x^2$. f) $x! = 3[x + 3\,(x-2)!]$.

21. $(x!)! = 20(x!)^2$.

22. $(x+y+1)! = 720\, C_{x+y+1}^{x+1}$, $x, y \in \mathbf{N}^*$.

23. $\sin \frac{\pi}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}$.

24. $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{(x+1)!} = \frac{6}{x!}$.

Gheorghe Andrei și Constantin Caragea, Tabăra națională de matematică Năvodari, 1987

25. $3C_m^x + 2C_{m-1}^{x+1} = C_m^{x+2} - 2C_{m-1}^x$, $m \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

26. $C_{2n}^{n-2} = C_{3n+1}^{n-2}$.

L. Panaitopol

27. $C_n^x + k = C_{n+k}^x$.

28. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{2n+1-2k} = 0.$

29. Să se rezolve ecuația:

$$A_x^0 + A_x^1 + 2A_{x+1}^2 + 3A_{x+2}^3 + \ldots + nA_{x+n-1}^n = A_{n+2-x}^{n+2-x}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

G.M. nr. 5—6/1988

30. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_x^0 + C_x^1 + \ldots + C_x^n = 2^n.$

b) $C_x^0 - C_x^1 + C_x^2 - C_x^3 + \ldots + (-1)^n C_x^n = 0.$

c) $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots +$

$$+ (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x+n-1)}{n!} = 0.$$

d) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} + \ldots +$

$$+ \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} = 0, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

31. Să se arate că rădăcinile polinomului

$$\varphi = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \text{ sînt simple.}$$

32. a) Să se afle acel termen al dezvoltării binomului $\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n$ care, după efectuarea simplificărilor, conține pe 2^5, știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este 128.

b) Dacă $n = 100$, cîți termeni raționali conține dezvoltarea.

33. Să se determine numerele naturale n. astfel încît în dezvoltarea binomului $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^n$ să avem 10 termeni raționali.

Maria Elena Panaitopol

34. Care este cel mai mare termen al dezvoltării: $(1 + \sqrt{2})^{50}$?

35. Dacă $x_1 = 9$ și $x_{n+1} = 9^{x_n}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^+$, arătați că ultimele două cifre ale lui x_3 sînt aceleași cu ultimele două cifre ale lui x_4. Care sînt aceste cifre?

Olimpiada de matematică — Anglia

36. Găsiți restul împărțirii lui:

$$11^{100} + 13^{200} + 17^{300} \text{ la } 7.$$

37. Găsiți resturile împărțirilor:

a) $3^{80} + 7^{80}$ la 11.

b) $3^{100} + 5^{100}$ la 7.

c) $2^{100} + 3^{100}$ la 5.

d) $5^{2p} + 7^{2h}$ la 12, unde p și $h \in \mathbf{N}$.

38. Să se arate că numărul:

$$E = 2^{6n} + 2^{2n+4} \cdot 3^n + 2^2 \cdot 3^{3n+2} + 3 \cdot 7^{2n+1}$$

este divizibil cu 37, n fiind natural.

39. Găsiți ultima cifră a lui 1000! diferită de zero.

40. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului: $19^{70} - 18^{70}$.

41. Să se determine coeficientul termenului care conține pe x^{50} din expersia:

$$x^{100} + x^{99}(1 + x) + x^{98}(1 + x)^2 + \ldots + x(1 + x)^{99} + (1 + x)^{100}.$$

42. Să se determine coeficientul termenului care conține pe x^5 din expresia: $(x^3 - 3x - 2)^4(x^3 - 3x^2 + 4)^5$.

43. Să se determine coeficientul lui x^m din dezvoltarea:

$$(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + \ldots + (1 + x)^n.$$

C.d.P.

44. Să se arate că în dezvoltarea:

a) $[(n - p + 1)x - p](x + 1)^n$ lipsește termenul în x^p.

b) $[(p - 2)x^2 + nx - p](x + 1)^n$ coeficientul lui x^p este nC_n^{p-2}.

45. Se cere coeficientul lui x^5 din dezvoltările:

a) $(1 + x + x^2 - x^3)(1 - x)^9$.

b) $\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^7 (1 + x - x^{11} + x^{17})$.

46. Se cere coeficientul lui x^{14} din dezvoltarea:

$$(x^4 - 3x + 1)^8.$$

47. Să se calculeze coeficienții lui x^{n-1}, x^{n-2} și x^{n-3} din produsul

$$(x + 1)(x + 2) \ldots (x + n).$$

48. Se dă numărul 34965. Să se afle:

a) Cîte numere putem forma permutînd cifrele numărului dat?

b) Care este suma acestor numere?

c) Aranjînd în ordin crescător acele numere, al cîtelea în șir este numărul dat?

49. a) Să se arate că $(a + b)!$ este divizibil la $a!b!$

b) Să se arate că $(a + b + c)!$ este divizibil cu $a!b!c!$ Generalizare.

50. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$$
$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$$
$$S_3 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$$
$$S_4 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots$$
$$S_5 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots$$
$$S_6 = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots$$

51. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

$$S = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} C_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

52. $(C_m^n)^2 = (C_{m-1}^{n-1})^2 + \frac{m+n}{m-n}(C_{m-2}^{n-1})^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{(m-n)(m-n-1)}(C_{m-3}^{n-1})^2 + \ldots +$

$$+ \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(2n+1)}{(m-n)!}(C_{n-1}^{n-1})^2.$$

53. Să se calculeze sumele:

$S_1 = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha,$

$S_2 = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha,$

$S_3 = 1 + C_n^1 \cos\alpha + C_n^2 \cos^2\alpha + \ldots + C_n^n \cos n\alpha,$

$S_n = C_n^1 \sin\alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \ldots + C_n^n \sin n\alpha.$

54. Fie: $a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$

$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$

$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots.$

Să se arate că: $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$.

55. Să se calculeze sumele coeficienților din dezvoltarea $(1+x)^m$ luate din p în p.

56. Să se calculeze suma:

$$C_n^1 + 2(n-1)C_n^2 + 3(n-1)^2C_n^3 + \ldots + n(n-1)^{n-1}C_n^n.$$

G.M. nr. 4/1987

57. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{n}{n+1}.$$

58. Să se arate că:

$$C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{5}C_n^4 + \ldots = \frac{2^n}{n+1}.$$

59. Să se arate că pentru $p, n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$C_{p-2}^0 + C_{p-1}^1 + C_p^2 + C_{p+1}^3 + C_{p+2}^4 + \ldots + C_{p+n}^{n+2} = C_{p+n+1}^{n+2}, \quad p \geqslant 3.$$

60. Să se arate că:

$$C_n^{2k}C_n^0 - C_n^{2k-1}C_n^1 + \ldots + (-1)^{k-1}C_n^{k+1}C_n^{k-1} + (-1)^k \frac{1}{2}(C_n^k)^2 = (-1)^k \frac{C_n^k}{2}.$$

$$1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

G.M. – 10/1982

61. Să se arate că:

$$1 + \frac{C_n^1}{C_{2n}^1} + \frac{C_n^2}{C_{2n}^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{C_{2n}^n} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Gh. Bordea

62. Să se arate că:

$$C_n^k + C_{n+1}^k + \ldots + C_{n+m}^k = \begin{cases} C_{n+m-1}^{k-1} - C_n^{k+1}, & k \leqslant n-1, \\ C_{n+m+1}^{n+1}, & k = n. \end{cases}$$

63. Să se arate că:

$$C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_n^{p+1} + \ldots + C_n^{n-p} C_n^n = C_{2n}^{n+p}, \text{ unde } n, p \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}.$$

64. Să se arate că:

a) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^3)^2 - (C_n^4)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(C_n^n)^2 =$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ este par} \end{cases}$$

b) $(C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

65. Să se arate că:

a) $C_p^0 C_n^q + C_p^1 C_n^{q-1} + \ldots + C_p^q C_n^0 = C_{n+p}^q$.

66. Să se arate că:

$$(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

67. Să se calculeze suma:

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^m C_n^m.$$

68. Să se arate că oricare ar fi k, m, n numere naturale există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ astfel încît:

$$C_{n+k}^{m+k-1} = C_n^{m-1} + a_1 C_n^m + a_2 C_n^{m+1} + \ldots + a_{k-1} C_n^{m+k-2} + C_n^{m+k-1}.$$

Să se determine coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ pentru $k = 7$.

Mircea Becheanu — Etapa finală 1983

69. Demonstrați că dacă numerele reale sau complexe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt rădăcinile ecuației

$$x^n - na_1 x^{n-1} + C_n^2 a_2^2 x^{n-2} + \ldots (-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n a_n = 0,$$

atunci $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

A.M.M.

70. Fie $1 \leqslant k \leqslant \min\{p, q\}$, unde p și q sînt două numere prime. Să se arate că $C_{p+q}^k - C_p^k - C_q^k$ se divide prin $pq (k \in \mathbf{N})$.

Mihail Beneze G.M. 5/1985

71. Să se arate că:

a) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} = C_n^k$,

b) $C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (n-k+1)C_{k-2}^{k-2} = C_n^k$.

c) $C_{k-3}^{k-3} C_{n-k+2}^2 + C_{k-2}^{k-3} C_{n-k+1}^2 + \ldots + C_{n-3}^{k-3} C_2^2 = C_n^k$.

72. Să se demonstreze identitatea:

$$(C_{2n+1}^0)^2 - (C_{2n+1}^1)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 \ldots - (C_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0.$$

73. Dacă C_1, C_2, C_3, C_4, sînt patru coeficienţi consecutivi din dezvoltarea $(x+1)^n$ avem:

$$\frac{C_1}{C_1+C_2} + \frac{C_3}{C_3+C_4} = \frac{2C_2}{C_2+C_3}.$$

74. Determinaţi valoarea sumei:

$$S_n = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2C_n^5 - 3^3C_n^7 + \ldots.$$

75. Să se arate că:

a) $\sum_{0\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j-1} C_n^i C_n^j = C_{2n-1}^n$;

b) $\sum_{0\leq i<j\leq n} C_n^i C_n^j = 2^{2n-1} - C_{2n-1}^n$.

76. Să se arate că:

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x-1} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x-n} = \frac{(-1)^n n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}.$$

77. $\frac{C_n^1}{x+1} - \frac{2C_n^2}{x+2} + \frac{3C_n^3}{x+3} - \frac{4C_n^4}{x+4} + \ldots = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

78. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

79. Să se calculeze suma

$$S = \frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}.$$

80. $\frac{n!h^n}{x(x+h)\ldots(x+nh)} = \frac{1}{x} - \frac{C_n^1}{x+h} + \frac{C_n^2}{x+2h} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+nh}$.

81. Să se calculeze suma:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{k+i+2}.$$

Bogdan Trentu

82. a) Să se arate că:

$$\frac{2n-k}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{C_{2n+1}^k} - \frac{1}{C_{2n}^k}.$$

b) Notînd $S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{C_{2n}^k}$ şi $S_1 = \sum_{k-0}^{2n} (-1)^k \frac{2n-k}{C_{2n}^k}$

şi folosind eventual: a) să se arate că: $S_1 = 2n + 1 - S$;

b) $S_1 = nS$; c) Să se calculeze S şi S_1.

83. Să se arate că:

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n = 4^n.$$

84. Să se calculeze suma:

$$S_{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2u-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

85. Să se demonstreze că dacă $p + q = 1$, atunci

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \ldots (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \ldots = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}.$$

Kvant — 1986

86. Să se calculeze sumele:

$$S_p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p(p+1) + \ldots + n(n+1) \ldots (n+p-1),$$

$$S_p^1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p(p+1)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1) \ldots (n+p-1)}.$$

87. Să se demonstreze identitatea:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{C_{k+m}^k} = \frac{k!}{k-1} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+2) \ldots (n+k)} \right],$$

$\forall k \geqslant 2,\ k, n \in \mathbf{N}^*$.

George Oborceanu

88. Să se calculeze suma:

$$S_k = C_0^0 + \frac{1}{4} C_2^1 + \frac{1}{16} C_4^2 + \ldots + \frac{1}{4^k} C_{2k}^k.$$

89. Să se demonstreze identitatea:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} \right)^2 - 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1} \right)^2 = 1.$$

I. Tomescu

90. Să se arate că pentru orice numere întregi și strict pozitive m, n există un număr întreg strict pozitiv p astfel încît

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}.$$

I. Tomescu

91. Fie $n, a, b \in \mathbf{N}^*$ astfel încît există $A \in \mathbf{N}$ cu proprietatea $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^n = \sqrt{A+1} + \sqrt{A}$; arătați că $|a - b| = 1$.

Vasile Zidaru, 1981

92. Să se demonstreze că în scrierea numărului $(\sqrt{2501} + 50)$ ca număr zecimal primele 3962 cifre după virgulă sînt zerouri.

D. M. Bătinețu, G.M. 1981

93. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1^x + 2^x + \ldots + n^x = (C_{n+1}^2)^x$.

b) $1^x + 2^x + \ldots + n^x = (C_{n+1}^2)^{\frac{2}{3}x}$ unde $n \in \mathbf{N}^*$.

94. Demonstrați că $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ este număr întreg care se divide cu $n + 1$.

95. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}^*$, atunci C_{2n}^k este divizibil cu $2^{n-1} + 1$ unde $k = 2^{n-1}$.

Liviu Pîrșan G.M./1982

96. Să se arate că numerele $P = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$; $Q = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, $M = \frac{(kn)!}{k!(n!)^k}$ sînt naturale.

97. Dacă $m, n \in \mathbf{N}$, atunci $\frac{[(m \cdot n)!]^2}{(m!)^{n+1} \cdot (n!)^{m+1}} \in \mathbf{N}$.

Matematica v'școle, 1978

98. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{N}^*$, atunci

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!} \in \mathbf{N}^*.$$

99. Să se arate că numărul $C_{np}^k - nC_p^k$ se divide prin p^2, unde p este un număr prim, $n \in \mathbf{N}^*$ și $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Mihail Bencze

100. Să se demonstreze că numărul $C_{np}^p - n$ se divide cu p^2, p fiind un număr prim, $p \geqslant 3$.

Lucian Cosma

101. Dacă $n \in \mathbf{N}$ fie $x_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. Se cere:

a) $x_n \in \mathbf{N}$ și x_n se divide cu $2^n (\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

b) x_{2n+1} se divide cu 3, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

c) Partea întreagă a lui $(3 + \sqrt{5})^n$ este un număr natural impar.

C. I. Țiu

102. Dacă n este întreg și pozitiv, să se arate că partea întreagă din dezvoltarea $(3 + \sqrt{7})^n$ este un număr fără soț.

103. Se consideră suma: $S_m^k = 1^k C_m^1 + 2^k C_m^2 + \ldots + m^k C_m^m$.
Să se demonstreze relația de recurență:
$S_m^k = m(S_m^{k-1} - S_{m-1}^{k-1})$ apoi să se deducă:
$S_m^1 = m \cdot 2^{m-1}$; $S_m^2 = m(m+1)2^{m-2}$;
$S_m^3 = m^2(m+3)2^{m-3}$.

104. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^n \cos (k+1)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Gheorghe Bordea

105. Să se liniarizeze $\sin^{2p}\theta$, $\sin^{2p+1}\theta$, $\cos^{2p}\theta$, $\cos^{2p+1}\theta$ (adică să se exprime ca sume de sin $k\theta$ și cos $k\theta$ la puterea întîi).

106. Să se demonstreze egalitatea: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = (C_{2n}^n)^2$.

Olimpiada S.U.A., 1982

107. $C_k^k C_m^k + C_{k+1}^k C_m^{k+1} x + C_{k+2}^k C_m^{k+2} x^2 + \ldots + C_m^k C_m^m x^{m-k} = C_m^k (1+x)^{m-k}$.

108. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{s} C_{m+i}^m \cdot C_{s+m-i}^n = C_{s+m+n+1}^{m+n+1}.$$

Caragea Constantin

109. Să se arate că: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \notin \mathbf{N}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

110. Fie $A_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$ și

$$B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

a) Să se arate că $A_n \notin \mathbf{N}$, $B_n \notin \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

b) $\{A_n\} \neq \{B_n\}$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, unde $\{x\}$ reprezintă parte fracționară a lui x.

Costel Chiteș

111. Să se demonstreze inegalitatea:

$$(n!)! \geq [(n-1)!]^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

O.J.M. 1976

112. Să se demonstreze inegalitățile

a) $(n!)^2 > n^n$; b) $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

113. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq k$, cel mai mare divizor al numerelor

$$C_n^k,\ C_{n+1}^k,\ \ldots\ C_{n+k}^k \text{ este } 1.$$

Olimpiada S.U.A., 1974

114. Să se arate că pentru orice număr prim p

$$C_{2p}^p - 2 \text{ este divizibil cu } p^2.$$

Olimpiadă Jugoslavia, 1970

115. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît pentru orice

$$k \in \{1, 2, \ldots n-1\} \text{ numerele } C_n^{k-1},\ C_n^k,\ C_n^{k+1}$$

să fie în progresie aritmetică.

Olimpiada Jugoslavia, 1974

116. Să se arate că:

1. $\frac{C_{2m}^{m}}{m+1}$ este număr natural.

2. Să se determine valorile lui k pentru care numărul $\frac{kC_{2n}^{n+m}}{n+m+1}$ este natural pentru orice $n \geqslant m$.

Olimpiada Australia — 1982

117. Să se demonstreze că pentru orice $n, m \in \mathbf{N}$ numărul:

$$S_{mn} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)} \text{ este divizibil cu } m!\,(n+1)$$

Olimpiadă Anglia — 1981

118. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$, n numere prime.
Să se determine numărul divizorilor numărului $P = p_1 p_2 \ldots p_n$ cuprinşi între 1 şi p.

119. Să se demonstreze că pentru orice $m, n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant m < n$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m C_n^k = 0.$$

O.I.M. G.M. 1981

120. Să se arate că:

a) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2 = \frac{(1^2+2^2+\ldots+n^2)-(1+2+3+\ldots+n)}{2}$.

b) $C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_n^3 = \frac{(1^3+2^3+\ldots+n^3)-3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+2(1+2+3+\ldots+n)}{6}$.

121. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} C_n^k = \frac{2(2^{n+1}-1)}{(n+1)(n+2)}$, $n \geqslant 2$.

V. Popuţa

122. Să se arate că: $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!\,(C_n^k)^3 = n!\,C_{2n}^{n}$.

123. Să se demonstreze că:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[C_n^k \sum_{i=1}^{n} i^{n-k} \right] = (n+1)^n - (n+1).$$

Marin Vlada

124. Să se demonstreze că:

$$A_{m,n} = \left(\frac{6+7\sqrt{5}}{4}\right)^m \left(\frac{1+2\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{6-7\sqrt{5}}{4}\right)^m \left(\frac{1-2\sqrt{5}}{3}\right)^n \in \mathbf{Q},$$

oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Baraj 1985

125. Să se demonstreze că:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

Concurs S.U.A.

126. Să se demonstreze că:

$$(1-C_n^2+C_n^4-\ldots)^2+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\ldots)^2=2^n.$$

Matematica v'şcole — 1965

127. Să se demonstreze egalitatea

$$C_n^m+2C_{n-1}^m+3C_{n-2}^m+\ldots+(n+1-m)C_m^m=C_{n+2}^{m+2}.$$

Olimpiada Anglia — 1985

128. Se consideră numerele:

$$C_n^0+C_n^3+C_n^5+\ldots$$
$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots$$
$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots$$

Să se arate că două dintre ele sînt egale, iar al treilea diferă de ele prin 1.

129. Se consideră numerele:

$$a_n=1-C_n^3+C_n^6-\ldots$$
$$b_n=-C_n^1+C_n^4-C_n^7+\ldots$$
$$c_n=C_n^2-C_n^5+C_n^8-\ldots$$

Să se arate că pentru orice $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}^*$ au loc egalităţile:

1) $a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-b_nc_n-c_na_n=3^n$.

2) $a_n^3+b_n^3+c_n^3=3a_nb_nc_n$.

D. Mihet

130. Să se arate că nu există un număr m astfel încît jumătate din numerele $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \ldots, C_m^m$ să fie pare şi jumătate impare.

131. Dacă $x=1+i\sqrt{3}$, $y=1-i\sqrt{3}$, $z=2$ să se arate că pentru orice număr prim $p>3$, $x^p+y^p=z^p$.

A.M.M

132. Fie p un număr prim, $n\in\mathbf{N}$ şi

$$S_n=(p+i\sqrt{p})^n+(p-i\sqrt{p})^n.$$

Să se arate că 1) S_n este număr întreg.

2) S_n se divide cu $2p^2$, pentru orice $n\geqslant 3$.

Gh. Ivan

133. Să se demonstreze inegalitatea.

$$(1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+nC_n^{n-1}+(n+1)C_n^n)^2\leqslant\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{31}C_{2n}^n.$$

Gh. Ivan

134. Să se arate că: $C_{2n+1}^1 C_{2n+1}^2 \ldots C_{2n+n}^n < \left(\frac{4^n}{n+1}\right)^{n+1}$

135. Să se arate că:

$$C_n^1 - \frac{1}{2} C_n^2 + \frac{1}{3} C_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} C_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

136. Să se calculeze:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k - nx)^2 x^k (1 - x)^{n-k}.$$

137. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea:

$$C_n^0 (x+n)^n - C_n^1 (x+n-1)^n + C_n^2 (x+n-2)^n + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n = n!$$

Vasile Popa

138. Să se calculeze:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} [n + (-1)^{k+1} C_n^k] = n - 1.$$

G.M. nr. 9/1984

139. Fie $n > m$; $n, m \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că

1) $\frac{A_m^0}{A_n^0} + \frac{A_m^1}{A_n^1} + \frac{A_m^2}{A_n^2} + \ldots + \frac{A_m^m}{A_n^m} = \frac{A_{n+1}^m}{A_n^m}$.

2) $\frac{C_m^0}{C_n^0} + \frac{C_m^1}{C_n^1} + \frac{C_m^2}{C_n^2} + \ldots + \frac{C_m^m}{C_n^m} = \frac{C_{n+1}^m}{C_n^m}$.

Gh. Andrei, etapa locală — C-ța, 1993

140. Să se arate că următoarele numere sînt întregi

1) $\frac{C_p^k}{p}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p prim,

2) $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$,

3) $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$,

4) $\frac{C_{nk}^n}{k}$,

5) $\frac{C_{2kn}^{kn}}{1+kn}$,

6) $\frac{C_{m+n}^n}{m+n}$, $(m, n) = 1$,

7) $\frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$,

8) $\frac{(3n)!}{3!(n!)^3}$,

9) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$,

10) $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}$,

11) $\frac{(pn+1)!}{(n!)^p}$,

12) $\frac{(2n)!(2m)!}{m!n!(m+n)!}$.

O.I.M. — 1972

141. Să se arate că oricare ar fi $k, n, p \in \mathbf{N}^*$, $k < n$ au loc egalitățile:

1) $(C_n^k)^p = (C_{n-1}^{k-1})^p + \frac{n^p - k^p}{(n-k)^p} (C_{n-1}^k)^p$.

2) $(C_n^k)^p = \frac{n^p}{k^p + (n-k)^p} [(C_{n-1}^k)^p + (C_{n-1}^{k-1})^p]$.

Traian Mureșan

142. Să se demonstreze că, pentru orice $k \in \mathbf{N}$ și $n \in \mathbf{N}^*$ are loc egalitatea $\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r)^n = 0$.

Ioan Tomescu

143. Fie $p \geqslant 3$ un număr prim, n un număr natural, iar q cîtul împărțirii lui n la p. Să se demonstreze că numărul

$$C_{n+p}^n + (q+1)(p-1) \text{ este divizibil cu } p.$$

Mircea Becheanu -- etapa finală, 1987

144. Să se demonstreze că, pentru orice n impar, mulțimea $\left\{C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{\frac{n-1}{2}}\right\}$ conține un număr impar de numere impare.

Titu Andreescu

145. Să se arate că dacă $m, n, p \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant m < n < p$ și p — prim, atunci

1) $C_{np}^n \equiv (-1)^{n+1} p \pmod{p^2}$,
2) $C_{np+m}^{np+n} \equiv (-1)^{n+m+1} p \pmod{p^2}$.

Mihai Onucu Drîmbe

146. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît

$$(n! + 1)! = 721(3n^3 + 2n^2)!$$

Ion Cucurezeanu

147. Să se demonstreze că

$$\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{p+1}} - \sqrt[n]{A_n^p} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p, \ (\forall)\ p, n \in \mathbf{N},\ p \leqslant n.$$

148. Să se afle x, y, z și u numere naturale care satisfac ecuația

$$x! + y! + z! = u!.$$

Olimpiada Canada — 1983

149. Să se rezolve ecuațiile:

$$\begin{aligned} &(y+1)^x - 1 = y! \qquad x, y \in \mathbf{N}. \\ &x! = y^{2z} \end{aligned}$$

Olimpiada Bulgaria — 1976

150. Să se rezolve ecuația:

$$1! + 2! + \ldots + (x+1)! = y^{z+1}.$$

Olimpiada U.R.S.S. — 1975

151. Să se rezolve ecuațiile:

$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$.

152. Să se rezolve ecuația:

$\overline{xyz} = x! + y! + z!$, unde $x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$, $x \neq 0$.

C.d.p.

153. Să se rezolve ecuația:

$$C_x^y = x + y;\ x, y \in \mathbf{N},\ x \geqslant y.$$

G.M. 1915

154. Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor naturale:

$$\frac{x!(x+y+1)!}{A_x^x + A_{x+1}^x + A_{x+2}^x + \ldots + A_{x+y}^x} = 720.$$

155. Să se arate că:

$$\sum_{k=m}^{n} x^k A_k^m \cdot C_n^k = x^m (1+x)^{n-m} A_n^m,\ 1 \leqslant m \leqslant n \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Nicolae Pavelescu

156. Să se demonstreze identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k.$$

157. Să se demonstreze identitățile:

a) $\sum_{k=0}^{n} (p+k) C_n^k = 2^{n-1}(n+2p).$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p+k) C_n^k = 0.$

S. Strătilă

158. Să se determine ultimele două cifre din scrierea zecimală a numărului $(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{1986}$.

Baraj — 1986

159. Să se arate că:

$C_n^0 x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \ldots + C_n^n x_n = x_{2n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, unde x_n este șirul lui Fibonacci.

Șerban Mihăiescu

160. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ o progresie aritmetică.
Să se demonstreze că:

1) $a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0,$

2) $a_1^2 - C_n^1 a_2^2 + C_n^2 a_3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n^2 + (-1)^n C_n^n a_{n+1}^2 = 0.$

Generalizare

Etapa județeană, 1979

161. Dacă p este număr prim și $n \in \{1, 2, 3 \ldots p\}$ avem

$$(n-1)!(p-n)! = \mathfrak{M}_p + (-1)^n.$$

A. Simionov, G.M. vol. XIV

162. Dacă p este prim, $p \geqslant 3$, avem

1) $[1!2! \ldots (p-1)!]^2 = \mathfrak{M}_p + (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

2) $\sum_{k=0}^{p-1} k!(p-k-1)! + 1 = \mathfrak{M}_p.$

G. Nichifor, G.M. vol. XIV

163. Dacă p este prim și $1 \leqslant k \leqslant p-1$, atunci

a) $C_{p+k}^{p} \equiv 1 \pmod{p}$.

b) $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$. C.d.p (1)

164. Să se arate că:

$$A_m^m C_n^m + A_{m+1}^m C_n^{m+1} + \ldots + A_n^m C_n^n = A_n^m \cdot 2^{n-m}, \quad m, n \in \mathbf{N}^*, \ n \geqslant m.$$

165. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 2y^2 = 1$ are o infinitate de soluții naturale.

166. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{N}^*$ și $x^2 - y = 1$, atunci

$$[(x + \sqrt{y})^n] \text{ este impar.}$$

G.M. nr. 12/1982

167. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (n-2k)^2 \cdot A_n^{2k} = \sum_{k=1}^{2m} A_n^k, \quad 2m \leqslant n.$$

G.M. nr. 6/1979

168. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_m^{2k+1}}{C_m^{2k+1} + C_m^{2k+2}} = \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_m^{2k}}{C_m^{2k} + C_m^{2k+1}}.$$

Mihaly Bencze

169. Să se arate că:

$$C_n^l + C_m^l + C_p^l + \sum_{\substack{i+j=l \\ 0<i,\ j\leqslant l-1}} (C_n^i C_m^j + C_m^i C_p^j + C_n^i C_p^j) + \sum_{\substack{i+j+k=l \\ 0<i,\ j,\ k\leqslant l-2}} C_n^i C_m^j C_p^k = C_{n+m+p}^l$$

170. $$\sum_{k_p=0}^{n} \sum_{k_{p-1}=0}^{k_p} \ldots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k=0}^{k_2} C_{k+s}^k = C_{n+p+s}^n.$$

G.M. nr. 12/1979

171. Fie $f(n) = 2\sum_{k=1}^{n} k C_{2n}^{2k}$. Să se arate că: $\sqrt[n]{\frac{f(1)f(2)\ldots f(n)}{n!}} = 2^n$

G.M. nr. 7/1981

172. Să se arate că:

a) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^2 \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\left(1 + \cos^n \frac{\pi}{n}\right).$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^2 \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\left(1 - \cos^n \frac{\pi}{n}\right).$$

G.M. nr. 3/1985

173. Să se determine condiția minimă necesară și suficientă pentru ca ecuația: $x^n - C_n^1 \cos a_1 x^{n-1} + C_n^2 \cos a_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cos a_{n-1} x + (-1)^n C_n^n = 0$; $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$; $a_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\forall)$ $k \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ să aibă toate rădăcinile reale și pozitive.

George Müller

174. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(C_{ki}^{i})^{p} + (C_{ki-1}^{i})^{p}}{(C_{ki}^{i})^{p-1} + (C_{ki-1}^{i})^{p-1}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki}^{i}\right)^{p} + \left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki-1}^{i}\right)^{p}}{\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki}^{i}\right)^{p-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki-1}^{i}\right)^{p-1}}.$$

Dumitru Acu

175. Să se arate că:

a) $\frac{C_{2n}^{k}}{C_{n+k}^{k}} < \left(\frac{n}{k}\right)^{k}$; b) $\frac{C_{2n}^{n}}{C_{n+k}^{n}} < \left(\frac{n}{k}\right)^{n}$, $n, k \in \mathbf{N}^*$, $n > k$

G. G. Niculescu

176. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $S_n = 1 + a + \ldots + a^n$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} S_{k-1} = \begin{cases} (n+1)2^n \text{ dacă } a = 1, \\ \dfrac{2^{n+1} - (1+a)^{n+1}}{1-a}, \text{ dacă } a \neq 1. \end{cases}$$

D. M. Bătineţu

177. Fie $a = 4k - 1$, $k \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că:

$S_n = 1 - C_n^2 a + C_n^4 a^2 - C_n^6 a^3 + C_n^8 a^4 - \ldots$ se divide cu 2^{n-1} oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

Dorel Miheţ, Etapa judeţeană, 1984

178. Oricare ar fi numerele naturale $n \neq 0$, $p \leqslant n$ se verifică identitatea:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (n-k) C_{n+1}^{k} C_{n-k}^{p-k} = \begin{cases} n, \text{ dacă } p = 0, \\ (-1)^{p+1}, \text{ dacă } 1 \leqslant p \leqslant n. \end{cases}$$

Să se particularizeze pentru $p = n$ și $p = n - 1$.

Eugen Onofraș

179. Pentru ce valori naturale ale lui m și n poate avea loc egalitatea:

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n ?$$

Olimpiadă U.R.S.S., 1983

180. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît

$$(3 + \sqrt{3})^n + (1 - 2\sqrt{3})^n \in \mathbf{Z}.$$

181. Să se arate că pentru orice număr natural n, are loc inegalitatea $(2n + 1)^n \geqslant (2n)^n + (2n - 1)^n$.

Olimpiada U.R.S.S. — 1987

182. Să se arate că:

a) $A_m^m + A_{m+1}^m + \ldots + A_{m+p}^m = \frac{m+p+1}{m+1} A_{m+p}^m$.

b) $A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + \ldots + A_{n+1}^{n+1} = (n+1)(A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 + \ldots + A_n^n)$.

Gh. Andrei

183. Să se determine a_n, dacă $a_0 = a_1 = 1$ şi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} = 2^n a_n .$$

184. Să se determine a_n, dacă $a_0 = a_1 = 1$ şi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = a_{n+1} .$$

185. Să se arate că $C_{np}^{mp} - C_n^m \vdots p$, unde $n \geq m$ şi p prim.

186. $C_{C_3^2}^2 + C_{C_4^2}^2 + \ldots + C_{C_n^2}^2 = \dfrac{n(n^2-1)(n^2-4)}{40}$,

$$C_{A_2^2}^2 + C_{A_3^2}^2 + \ldots + C_{A_n^2}^2 = \frac{n(n^2-1)(3n^2-7)}{30} .$$

G.M. nr. 7/1982

187. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ este o progresie artimetică cu raţia $r \neq 0$ şi cu $a_i \neq 0$, atunci pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{a_{p+k}} = \frac{n!\, r^n}{a_p a_{p+1} \cdots a_{p+n}} .$$

Virgil Nicula

188. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{p+k} = \frac{1}{p C_{n+p}^p} .$$

G.M. nr. 9–10/1982

189. Dacă $m, n, p \in \mathbf{N}^*$ astfel încît

$(2+\sqrt{3})^{2p-1} = 1 + m + n\sqrt{3}$, atunci m este pătratul unui număr întreg.

Olimpiada S.U.A. 1982

190. Să se determine valorile lui $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care

$$(n! + 1)! = 121\,(n^3 - n)!$$

Ion Cucurezeanu

191. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ se consideră numerele $C_{2^n}^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots 2^n - 1$. Să se arate că: a) toate aceste numere sînt pare,
b) unul singur dintre numerele considerate nu este multiplu de 4.

Etapa finală, 1988

192. Dacă $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, să se demonstreze egalitatea:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 + C_{k+1}^{k+1} S_0 .$$

193. Fie $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ şi $S_n = 1 + \dfrac{1+q}{2} + \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n$

Să se arate că

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 S_1 + C_{n+1}^3 S_2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} S_n = 2^n S_n .$$

Olimpiada — Ungaria, 1923

194. Să se demonstreze că:

$$1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^k \geqslant 0, \ (\forall)\, k \leqslant n$$

$$\text{și } (\forall)\, x \in \left(-\infty, \frac{1}{n}\right].$$

195. Care este cel mai mare divizor comun al numerelor

$$C_{2n}^1, \ C_{2n}^3, \ \ldots, \ C_{2n}^{2n-1} ?$$

A.M.M.

196. Să se demonstreze că

$$\frac{C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}}{2^n} = \frac{C_k^k}{2^k} + \frac{C_{k+1}^k}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{C_{n-1}^k}{2^{n-1}} + \frac{C_n^k}{2^n}.$$

Andrei Ion Cristian

197. Fie p un număr prim, $p \geqslant 2$. Să se demonstreze că numerele $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ sînt toate divizibile cu p, dacă și numai dacă n este de forma p^k, cu $k \in \mathbf{N}^*$.

198. Pentru ce numere naturale n și k coeficienții binomiali C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1} formează o progresie aritmetică.

Olimpiada — Ungaria, 1973

199. Dacă n și m sînt prime între ele, atunci C_n^m se divide cu n.

200. Să se determine n-natural astfel încît $(2n)! + 1$ să se dividă cu $n! + 1$.

L. Panaitopol

201. Numărul natural $n > 1$ este prim, dacă și numai dacă pentru orice k natural, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, coeficientul binomial C_n^k se divide cu n.

Olimpiada Polonia — 1970

202. Pentru ce valori ale lui n toți coeficienții din dezvoltarea binomului $(a + b)^n$ sînt impari.

A.M.M. D.M. Browne

203. Dacă p este un număr prim și n-natural, atunci în împărțirea $C_{np}^p : p$ obținem același rest ca și la împărțirea $n : p$.

204. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n - 2k}{n} C_n^k\right)^2.$$

A.M.M. — 1965

205. Să se demonstreze identitatea:

$$C_m^m C_n^m + C_{m+1}^m C_n^m + \ldots + C_n^m C_n^n = C_n^m \cdot 2^{n-m}.$$

206. Să se demonstreze identitatea:

$$C_{m-1}^0 + C_m^1 + C_{m+1}^2 + \ldots + C_{m+n-1}^n = C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m.$$

Gh. Andrei

207. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale astfel încît $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ să fie impare.

M. Cavachi

Capitolul V

POLINOAME

1. Se dă polinomul $f = x^4 - 4x^3 + (3 + m)x^2 - 12x + 12$, $m \in \mathbf{R}$.
a) Care sînt valorile lui m pentru care $f(x) \geqslant 0$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.
b) Să se determine m, astfel încît ecuația $f(x) - f(1 - x) = -4x^3$ să aibă rădăcini reale.

Dumitru C. Nica

2. Fie polinomul $f \in \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$ dat de $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, unde $3a \in \mathbf{Z}$, $2b \in \mathbf{Z}$, $a + b + c \in \mathbf{Z}$ și $d \in \mathbf{Z}$.
Să se arate că $\forall\, \alpha \in \mathbf{Z}$ avem $f(\alpha) \in \mathbf{Z}$.

Liviu Pîrsan

3. Fie $f \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$ și $x \in \mathbf{Z}$ fixat. Să se arate că există $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît: $f(x) + f(x + 1) + \ldots + f(x + k) \vdots 10$.

Vasile Zidaru

4. Să se arate că: a) Restul împărțirii polinomului f prin $(x - a)(x - b)$, unde $b \neq a$ este:

$$r = \frac{(x - a)f(b) - (x - b)f(a)}{b - a}.$$

b) Restul împărțirii lui f la $(x - a)^2$ este

$$r = f'(a)\, x + f(a) - af'(a).$$

5. Polinomul $f \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$ are trei rădăcini întregi care dau resturi distincte prin împărțire la 3. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{Z}$, $f(x)$ este divizibil cu 3.

Admitere 1985

6. Fie $f = a_0\mathrm{X}^{2n} + a_1\mathrm{X}^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\mathrm{X} + a_{2n}$
Să se demonstreze că restul împărțirii polinomului f la $\mathrm{X}^2 - 1$ este o constantă dacă și numai dacă

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = 0.$$

7. Fie f un polinom cu coeficienți complecși astfel încît oricare ar fi g un polinom de gradul doi cu coeficienți complecși, restul împărțirii lui f la g este un polinom de gradul întîi. Să se arate că f este un polinom de gradul întîi.

Marcel Țena

8. Fie polinoamele nenule $f, g, h \in \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$.
Arătați că dacă polinomul $f(x^3) + xg(x^3) + x^2h(x^3)$ se divide cu $x^6 - 6x^3 + 8$, atunci polinoamele f, g, h se divid cu $x^2 - 6x + 8$.

V. Țifui

9. Dacă f_1, f_2, f_3, f_4 sînt polinoame astfel încît
$f_1(x^5) + xf_2(x^5) + x^2f_3(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)f_4(x^5)$, $x \in \mathbf{R}$
atunci $f_k(1) = 0$, $k = \overline{1,4}$.

Concurs S.U.A., 1976

10. Pentru ce valori ale lui m, polinomul

$$(X-1)^m + X^m + 1 \text{ se divide cu } X^2 - X + 1?$$

11. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbf{Z}[X]$ polinomul

$$f = X^{14} + X^{10} + 1.$$

Petre Orbulescu și Aurel Doboșan

12. a) Să se determine polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît:

$$P(x^3) = |x|P(x^2) + x^2P(-|x|) + x^3, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

b) Să se determine polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît să existe $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbf{Q}$ să avem:

$$P\left(x + \frac{1}{n}\right) + P\left(x - \frac{1}{n}\right) = 2P(x).$$

13. Fie $p \in \mathbf{N}$ și $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît $f(p) = 6$; $f(p+1) = 18$; $f(p+2) = 54$.
Determinați numărul soluțiilor în numere întregi ale ecuației $f(x) = 2$.

Vilia Bantă

14. Fie un polinom f cu coeficienți întregi.

a) Să se arate că dacă $f(0) = f(1) = 1$, atunci

$$f = X(X-1)f_1 + 1.$$

b) Fie x_0 un număr întreg și $f(x_n) = x_{n+1}$. Să se arate că pentru $x_0 \geqslant 1$ numărul x_n este prim cu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

15. Să se demonstreze că dacă $f(X^n)$ este divizibil cu $X - 1$ atunci este divizibil și cu $X^n - 1$.

16. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$X^m - 1 \text{ și } X^n - 1.$$

17. Să se demonstreze că nu există polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f \neq 0$ astfel încît:

$$f(X+2) + f(X) = \sqrt{2}f(X+1).$$

D. M. Bătinețu

18. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea:

$$f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^*.$$

Marcelina Popa G.M. 4/1987

19. a) Să se determine un polinom f cu coeficienți întregi astfel încît

$$(X-3)f(X) = (X-1)f(X-1).$$

b) Care este valoarea de adevăr a propoziției: $\exists n \in \mathbf{N}$ astfel încît $f(n) = 1981$?

Mihaela Banyai

20. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît

$$Xf(X) = (X-2)f(X+1).$$

21. Să se determine toate polinoamele f cu coeficienți reali care satisfac egalitatea:

$$X[f(X) - b] = (X - a) f(X + a),$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$. Discuție.

Bogdan Vernescu

22. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ pentru care există $a, b \in \mathbf{R}$, distincte, astfel încît:

$$(X - a) f(X - b) = (X - b) f(X - a).$$

Liviu Vlaicu

23. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Dacă există $k \in \mathbf{R}$, fixat, astfel încît $f(x - 1) f(x + 1) (x + 1) f(x) = k$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, să se determine f.

Gheorghe Bordea

24. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că

$$\sin f(x) = f(\sin x) \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

C. Cocea

25. Să se determine polinoamele f și g care îndeplinesc simultan condițiile: $(X + 1) f(X - 1) - X^2 g(X + 1) = X^2 - X - 1$,

$$f(X + 1) - (X + 2) g(X + 3) = -1.$$

Sermin Pirnac

26. Să se arate că există $f, g \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît $2x + 1 + (3x + 1) f(x) = g^2(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ dar nu există $f, g \in \mathbf{Q}[X]$ cu această proprietate.

Maria Elena Panaitopol

27. Polinomul $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$ are valori întregi pentru orice valoare întreagă dată lui X. Poate fi unul din coeficienți egal cu $\frac{1}{13}$?

28. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că

$$f(x^2) = f^2(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

29. Se dă polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$. Să se determine polinomul $g \in \mathbf{C}[X]$ dacă $|g(x)| \leqslant |f(x)|$, $\forall\, x \in \mathbf{C}$.

Gheorghe Bordea

30. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ care satisfac relația:

$$f(x^3 + 1) = f^3(x) + 1, \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \text{ și } f(0) = 0.$$

L. Tuțescu și D. Săvulescu

31. Fie n un număr natural, $n \geqslant 2$. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $f(0) = 0$ și $f(x^n + 1) = [f(x)]^n + 1$, $\forall x \in \mathbf{N}$.

Dorinel Anca

32. Să se găsească polinoamele f şi g cu coeficienţi reali care verifică simultan condiţiile:

1° $f(g(x)+1) = g(f(x)) + 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.
2° $g(f(x)+1) = f(g(x)+1)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.
3° $f(0) = g(0) = 0$.

D. Săvulescu şi L. Tuţescu

33. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ care satisfac condiţia:

$$\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R},\ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0;\ n > 2)$$
$$f\left(\frac{a_1}{a_1 + \ldots + a_n}\right) + f\left(\frac{a_2}{a_1 + \ldots + a_n}\right) + \ldots + f\left(\frac{a_n}{a_1 + \ldots + a_n}\right) = 0$$

şi $f(0) = 0$.

Dan Tanasie

34. Să se determine toate polinoamele unitare $f \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ cu proprietatea că: $|f(x)| = 1$, $\forall\, x \in \mathbf{C}$, cu $|x| = 1$.

Patrick Popescu—Pampu

35. Să se determine polinoamele neconstante $f \in \mathbf{R}[\mathbf{X}]$ astfel încît

$$f(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1) = [f(\mathrm{X})]^2 - f(\mathrm{X}) + 1 \text{ şi } f(0) = 0.$$

Ioan Toderiţă

36. Fie $f = 2x^2 - 7x + 8$. Să se arate că orice funcţie $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(h(x)) = h(f(x))$, $x \in \mathbf{R}$, are cel puţin un punct fix.

37. Fie polinomul $f \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$, $f = a_0\mathrm{X}^n + a_1\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{X} + a_n$, $a_0 \neq 0$.

1) Să se arate că dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a)$ divide numărul $f(a + f(a))$.
2) Să se arate că există $a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a)$ să nu fie număr prim.

38. Fie P un polinom cu coeficienţi naturali. Să se găsească funcţiile $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = P(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{N}$ ştiind că există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît numărul $f(k + f(k))$ este prim.

Cristinel Mortici

39. Fie f un polinom cu coeficienţi numere întregi şi $f(19) \cdot f(88) = 5$. Să se arate că $f(k) \neq 1988$, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$. Generalizare.

Emeric Horvath

40. Să se afle $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încît suma coeficienţilor polinomului $f = a(1-b)(3x^2-4)^{k+1} - b(1-2x)^k - a(2x-3x^2)^{k+2} + 1$ să fie zero, pentru $\forall\, k \in \mathbf{N}$.

Dumitru Mihai

41. Fie f un polinom cu coeficienţi reali pozitivi. Să se arate că dacă inegalitatea $f\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{f(x)}$ este adevărată pentru $x = 1$, atunci ea este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Titu Andreescu

42. Dacă $x_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ și f este un polinom cu coeficienți în numere pozitive, să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right) \geqslant nf\left(\frac{1}{n-1}\right).$$

Mihail Bencze

43. Fie f un polinom cu coeficienți numere reale pozitive și $0 \leqslant c \leqslant a \leqslant b$. Să se arate că

$$f(b+c) - f(a+c) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant f(b-c) - f(a-c).$$

N. Papacu

44. Un polinom $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i} \in \mathbf{Z}[X]$ cu $a_0 = 1$, se numește alternat dacă $a_{i+1} - a_i$ este impar, $i = \overline{0, n-1}$. Să se arate că dacă f se descompune în produs de două polinoame alternate neconstante, atunci există $a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a) = 0$.

Marian Diaconescu

45. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ și să considerăm funcția polinomială $\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

a) $\tilde{f}$ este funcție pară dacă și numai dacă $\tilde{f}(i\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.

b) $\tilde{f}$ este funcție impară dacă și numai dacă.

$$\tilde{f}(i\mathbf{R}) \subset i\mathbf{R}$$

(s-a notat $i\mathbf{R} = \{ix | x \in \mathbf{R}\}$).

Marcel Țena

46. Să se afle abscisele punctelor de minim ale funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d), \text{ unde}$$
$$a + b = c + d \ (a, b, c, d \in \mathbf{R}).$$

47. Se dă curba $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Să se afle o dreaptă astfel încît punctele ei de intersecție M_1, M_2, M_3 și M_4 cu curba de mai sus să determine pe această dreaptă trei segmente egale $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$. În ce condiții admite problema soluții?

48. Arătați că un polinom nenul:

$f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ care are coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ în progresie geometrică, $(n \geqslant 2)$ cu rația $q \neq 0$ nu poate avea ca rădăcină pe q.

C. *Gîdea*

49. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă pentru $k \in \mathbf{Z}$ fixat $f(k)$, $f(k+1)$, $f(k+2)$ sînt multipli de 6, atunci $f(m)$ este multiplu de 3, oricare ar fi $m \in \mathbf{Z}$.

Olimpiada Polonia

50. Să se găsească un polinom $P \in \mathbf{Z}[X]$ de gradul cel mai mic care să admită rădăcinile $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Concurs — Suedia — 1972

51. Să se arate că:

a) $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1 \vdots (X^2+X+1)^2$.

b) $(X+1)^{3n+2} + X + 2$ și $(X+1)^{2n-1} + (-1)^n(X+2)^{n+1}$ se divid la X^2+3X+3.

c) $(X^{n-1}-1)(X^n-1)(X^{n+1}-1) \vdots (X-1)(X^2-1)(X^3-1)$.

d) $(x+y)(y+z)^2(z+x)^3 - x^2y^3z \vdots x+y+z$.

52. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul n, care satisfac relația: $f(1)+f(X)+f(X^2)+\ldots+f(X^n) = (1+X+\ldots+X^n)f(X)$.

53. a) Fie $f=(X+1)^m+X^m+1$ și $g=(X+1)^m-X^m-1$

Pentru ce valori ale lui m fiecare din polinoamele f și g este divizibil cu $(X^2+X+1)^2$?

b) Să se arate că $(X+1)^m-(X+1)^n \vdots X^2+X+1 \Leftrightarrow m-n \vdots 6$

54. Să se arate că:

$$f=(X^8+X^6)^{2n+1}+(X^4+X^2+1)^{2n+1}+X^{10p+5}+1,$$

se divide cu polinomul $g=X^4-X^3+X^2-X+1$ pentru orice $n,p \in \mathbf{N}$.

G.M. nr. 1/1988

55. Fie polinomul:

$f=(X^3+X)^m-X^m-X^3$. Să se determine $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît.

a) f să fie divizibil la X^2+1.

b) f să fie divizibil la X^4+X^2+1.

Gh. Andrei

56. Să se arate că următoarele polinoame sînt reductibile în $\mathbf{Z}[X]$:

a) $f=(1+X+\ldots+X^n)^2-X^n$.

b) $f=1+X+X^{n+3}+X^{n+4}+\ldots+X^{2n+1}$.

c) $f=(X^n-2)^n-X-2$.

d) $f=\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{2n+1-2k}$.

57. Să se arate că polinomul $f=aX^3+bX^2+bX+c$ cu a, b, c întregi unde ab număr par, iar ac impar, nu are toate rădăcinile raționale.

G.M. nr. 5/1985

58. Fie $f=X^3+aX^2+bX+c$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $ac+bc$ este număr impar. Să se arate că polinomul este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

59. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ și astfel încît $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=7$ pentru $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, distincte. Să se arate că $f(m) \neq 14$, oricare ar fi $m \in \mathbf{Z}$.

60. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît există $a \in \mathbf{Z}^*$ cu proprietățile $f(a) \neq 0$ și $f(f(a))=a$. Să se arate că există $m, n \in \mathbf{Z}$ astfel ca $f(m)$ și $f(n)$ divid pe $f(m+n)$.

Cristinel Mortici

61. Dacă polinomul $P \in \mathbf{Z}[X]$ ia valoarea 1 pentru trei valori întregi ale lui X, atunci el nu are nici o rădăcină întreagă.

62. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$.

Dacă $f(a)$, $f(b)$, $a + b$ sînt impare, atunci f nu are rădăcini întregi. Dacă în plus a_0 este impar, atunci f nu are rădăcini raționale.

63. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ și astfel încît $f(k)$ și $f(k + 1)$ sînt impare. Să se arate că f nu are rădăcini întregi.

64. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$.

Dacă a_0, a_n și $P(1)$ sînt impare, atunci polinomul nu are rădăcini raționale.

65. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ care are cel puțin o rădăcină rațională și dacă există $a, b \in \mathbf{Z}$ distincte astfel încît:

$$|P(a)| = |P(b)| = 1 \text{ atunci:}$$

1° $|a - b| \leqslant 2$.

2° f nu are două rădăcini raționale distincte.

66. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, care admite o rădăcină întreagă. Să se arate că pentru orice număr natural n, $f(0)f(1) \ldots f(n)$ este divizibil cu $(n + 1)!$

Admitere 1986

67. Să se determine polinoamele f și g care îndeplinesc condițiile a) și b) simultan.

a) $(X + 1)f(X - 1) - X^2g(X + 1) = X^2 - X - 1$;

b) $f(X + 1) - (X + 2)g(X + 3) = -1$.

68. Fie polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, astfel încît $f \circ g = g \circ f$, atunci

$$f(f(X)) - g(g(X)) \text{ este divizibil la } f - g.$$

69. Fie a, b, c numerele reale strict pozitive distincte și $f(x)$ un polinom de gradul șase care verifică condițiile:

$$f(a) = f(-a),\ f(b) = f(-b),\ f(c) = f(-c).$$

Să se arate că $f(x) = f(-x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

S. J. Maizus, matematica v'școle

70. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, grad $f = n > 1$.

Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_m)$ este un polinom de grad zero, dacă și numai dacă resturile împărțirii polinomului f la $X - a_k$, $k = \overline{1, m}$, $k \leqslant n$ sînt egale.

($a_k \in \mathbf{C}$, distincte)

71. Fie $c \in \mathbf{C}$. Considerăm polinoamele:

$f_k(z) = (c - z)^k - z^k$, $k \in \mathbf{N}^*$. Demonstrați că pentru $m \in \mathbf{N}^*$ există $a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1} \in \mathbf{C}$ astfel încît $f_{2m} = a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_{2m-1}f_{2m-1}$.

72. Fie polinoamele $f = X^n + 4$ și $g = X^{2n} + 9X^n + 81$, $n \in \mathbf{N}^*$ să se arate că:

a) f se descompune în produs de două polinoame cu coeficienți întregi, dacă și numai dacă n este multiplu de 4.

b) g se descompune în produs de două polinoame cu coeficienți întregi, dacă și numai dacă n este par.

Gheorghe Andrei S.M. nr. 11-12/1989

73. Să se arate că polinomul: $f = (1 - X)(1 - X^2) \dots (1 - X^n)$ este divizibil la polinomul $g = (1 - X)(1 - X^2) \dots (1 - X^p)(1 - X)(1 - X^2) \dots (1 - X^q)$ unde $p + q < n$.

74. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = (X^4 + 1)^n + X^{2n+3}$ să se arate că:

a) f este reductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

b) pentru $n \geqslant 2$, f nu are rădăcini reale.

L. Panaitopol

75. Fie $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polinom cu coeficienți întregi cu grad $f \geqslant 3$, iar $(u_n)_{n \geqslant 1}$ șirul cu termen general $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$. Să se demonstreze că dacă $f(1) = f(4) = f(16) = 0$, atunci numerele $a_0 + a_2 + \dots + a_{2\left[\frac{n}{2}\right]}$, $a_1 + a_3 + \dots a_{n-u_n}$ se divid cu 85.

D. M. Bătineţu

76. Se consideră un polinom f cu coeficienți întregi și un număr natural $k \geqslant 2$. Dacă există un număr întreg x astfel încît $f(x + 1), f(x + 2), \dots$ $\dots f(x + k)$ sînt toate nedivizibile cu k, demonstrați că f nu are rădăcini întregi.

Toma Albu

77. Un număr $\frac{p}{q}$ rațional care este rădăcină a unui polinom cu coeficienți întregi în care coeficientul termenului de grad maxim este egal cu 1, este un număr întreg.

78. Se consideră polinomul $P(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$, unde p este un număr prim mai mare decît 2.

Să se arate că pentru orice n par, polinomul $-1 + \prod_{k=0}^{n-1} P(X^{p^k})$ este divizibil cu $X^2 + 1$.

M. Becheanu, Baraj 1981

79. Fie m și n numere naturale nenule. Să se arate că m divide n (în inelul $\mathbf{Z}$) dacă și numai dacă

$$X^{m-1} + C_m^1 X^{m-2} + C_m^2 X^{m-3} + \dots + C_m^{m-1} \text{ divide}$$
$$X^{n-1} + C_n^1 X^{n-2} + C_n^2 X^{n-3} + \dots + C_n^{n-1}$$
(în inelul $\mathbf{Z}[X]$).

Marcel Ţena

80. Se consideră polinoamele $f_k \in \mathbf{C}[X]$, $k = \overline{1, n}$.

Să se arate că polinomul: $f = f_1(X^{n+1}) + X f_2(X^{n+1}) + \dots + X^{n-1} f_n(X^{n+1})$ este divizibil la polinomul $g = X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$, dacă și numai dacă toate polinoamele f_k se divid la $X - 1$.

(Generalizarea problemei 9).

Gheorghe Andrei

81. Fie $f, g \in \mathbf{C}[X]$ două polinoame unitare. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ și $b_1, b_2, \dots, b_m$ sînt rădăcinile polinoamelor f și g să se arate că:

$$\frac{f(b_1) \cdot f(b_2) \dots f(b_m)}{g(a_1) \cdot g(a_2) \dots g(a_n)} = (-1)^{mn}.$$

82. Fie $f, g \in \mathbf{R}[X]$. Dacă există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel că $f(a) = g(b)$ și $f(b) = g(a)$, să se arate că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o soluție.

83. Să se arate că polinomul:

$$f = X(X + 2)(X + 4) \ldots (X + 2n) + (X + 1)(X + 3) \ldots$$
$$\ldots (X + 2n + 1) \text{ are toate rădăcinile reale.}$$

84. Să se arate că rădăcinile polinomului:

$$f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$$

sînt $1, 2, \ldots, n$.

85. Fie polinomul cu coeficienți reali:

$$f = X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + a_2 X^{2n-2} + \ldots + a_{2n-2} X^2 + a_{2n-1} X + 1,$$

($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$) între ai cărei coeficienți există relațiile:

$$\frac{a_{2k-1}^2 + a_{2k+1}^2}{4} \leqslant a_{2k}; \quad |a_{2p+1}| \geqslant 2, \text{ unde } k = \overline{1, n-1} \text{ și } p = \overline{1, n-2}.$$

Să se demonstreze că:

$$f(x) \geqslant 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Constantin Caragea și Marius Crăciun

86. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$ dat de $f = (3X^2 - 5)(3X^2 - 10)$. Dacă $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît:

$$f_1(f(x)) + xf_2(f(x)) + x^2 f_3(f(x)) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)f_4(x), \quad (\forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că ecuațiile $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ admit o rădăcină comună. Să se afle rădăcina comună.

Florin Rotaru

87. Se consideră polinomul:

$f = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+1} X^k$. Să se arate că ecuația $f(x^2) = f^2(x)$ nu are rădăcini reale.

Dorin Andrica

88. Fie f un polinom cu coeficienți complecși. Să se demonstreze că funcția polinomială asociată este pară (respectiv impară) dacă și numai dacă există un polinom g cu coeficienți complecși astfel încît $f(x) = g(x) \cdot g(-x)$ (respectiv $f(x) = xg(x) \cdot g(-x)$), $\forall\ x \in \mathbf{C}$.

89. Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$, $a_n \neq 0$ și $\hat{f} = \frac{1}{a_n} f$.

Să se arate că dacă polinomul f admite odată cu orice rădăcină complexă și conjugata acesteia drept rădăcină, atunci polinomul $\hat{f}$ are coeficienții reali.

Romeo Ilie

90. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{R}[X]$, n polinoame de gradul $n-2$. Demonstrați că dacă oricare $n-1$ dintre ele au o rădăcină comună, atunci toate cele n polinoame au o rădăcină comună ($n \geqslant 3$).

Dorel Miheț

91. Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, cu toate rădăcinile reale, pentru care, funcția polinomială $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este monotonă.

Gheorghe Bordea

92. Fie $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ un polinom cu coeficienți reali care are toate rădăcinile reale conținute în intervalul $(-1, 1)$. Să se arate că:

$$-1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots}{a_0 + a_2 + a_4 + \ldots} < 1.$$

Mircea Becheanu

93. Fie o mulțime $\mathcal{M} \subset \mathbf{C}$. Să se determine polinoamele $f \in \mathcal{M}[X]$ cu proprietatea că funcțiile polinomiale $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ sînt bijective, dacă a) $\mathcal{M} = \mathbf{R}$; b) $\mathcal{M} = \mathbf{C}$.

94. Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$. Să se arate că dacă $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, atunci $f(x) = [\varphi_1(X)]^2 + [\varphi_2[X]]^2$, unde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}[X]$.

95. Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului:

$$f = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) - 1 \text{ unde } a_1, a_2, \ldots, a_n$$

sînt numere întregi distincte.

96. Pentru ce numere întregi, distincte oricare două, polinomul:

$(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) + 1$ poate fi reprezentat ca produsul a două polinoame neconstante cu coeficienți întregi?

97. Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului

$$f = (X - a_1)^2(X - a_2)^2 \ldots (X - a_n)^2 + 1, \text{ unde}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi distincte.

98. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom care admite ca rădăcină $x = \frac{n}{m}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}^*$, $(m, n) = 1$. Să se arate că există $g \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît

$$f = (mX - n)g.$$

99. Să se demonstreze că dacă $\frac{p}{q}$, fracție rațională ireductibilă, rădăcină a polinomului cu coeficienți întregi

$$f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n, \text{ atunci:}$$

1) q este un divizor al lui a_0. 2) p este un divizor al lui a_n 3) $p - mq$ un divizor al lui $f(m)$ pentru orice m întreg.

În particular $p - q$ este un divizor al lui $f(1)$, iar $p + q$ este un divizor al lui $f(-1)$.

100. Să se demonstreze că dacă un polinom cu coeficienți întregi ia valorile ± 1 pentru două valori întregi x_1 și x_2, atunci el nu are rădăcini întregi dacă $|x_1 - x_2| > 2$.

Dacă $|x_1 - x_2| \leqslant 2$, atunci singura rădăcină rațională poate fi numai

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

101. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ cu proprietatea că $\exists\, a \in \mathbf{Z}$, astfel încît

$$f^2(a) = f^2(a + 5) = 4.$$

Să se arate că nu are rădăcini raționale.

Daniel Lesnic

102. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ numere complexe distincte și $c_1, c_2, \ldots c_n, c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că polinomul

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{(X - a_1) \ldots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \ldots (X - a_{n+1})}{(a_i - a_1) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_{n+1})}$$

este unicul polinom de grad $\leqslant n$ astfel încît $f(a_i) = c_i$, $i = \overline{1, n+1}$ (f este polinomul ce rezultă prin metoda de interpolare a lui Lagrange).

103. Să se afle polinomul de gradul $2n$ care prin împărțire cu $X(X - 2) \ldots (X - 2n)$ dă restul 1, iar prin împărțire cu $(X - 1)(X - 3) \ldots (X - 2n + 1)$ dă restul -1.

104. Să se demonstreze că un polinom de gradul $k \leqslant n$ care ia valori întregi pentru $n + 1$ valori întregi consecutive ale variabilei, ia valori întregi pentru toate valorile întregi ale variabilei.

105. Să se demonstreze că un polinom de gradul n, care ia valori întregi pentru $x = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, ia valori întregi pentru toate pătratele numerelor naturale.

106. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere diferite.

Să se arate că:

$$E = \frac{(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)} + \frac{(x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_n)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n)} + \ldots + \frac{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1})}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})} \text{ este constantă.}$$

107. Orice polinom din $\mathbf{Z}[X]$ este suma a două polinoame ireductibile din $\mathbf{Z}[X]$.

108. Polinomul $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + 1$ are coeficienții nenegativi și n rădăcini reale. Atunci $f(2) \geqslant 3^n$.

109. Fie α un număr complex care este rădăcină a unui polinom cu coeficienți raționali. Să se demonstreze că există $f \in \mathbf{Q}[X]$ de grad minim a.î. $f(\alpha) = 0$, iar dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$ are proprietatea $g(\alpha) = 0$, atunci f divide g în $\mathbf{Q}[X]$. În plus f este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.

110. Pentru $f,g \in \mathbf{Z}[X]$ polinoame nenule, considerăm mulțimea $D_{f,g} = \{(f(k), g(k)) \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că polinoamele f și g sînt relativ prime în $\mathbf{Q}[X]$ dacă și numai dacă $D_{f,g}$ este mulțime finită.

Marian Andronache

111. Fie $T(Z)$ un polinom cu coeficienți întregi avînd o rădăcină în comun cu $P(Z) = Z^n - 1$. Presupunînd că pentru orice rădăcină u_i a lui $P(Z)$ avem $|T(u_i)| \leqslant 1$, atunci $T(Z)$ se divide cu $Z^n - 1$.

American Math. Manthly

112. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom avînd toate rădăcinile întregi. Să se demonstreze că $\exists\, c \in \mathbf{N}$ astfel încît $\forall\, p \in \mathbf{Z}[X]$, numărul rădăcinilor distincte ale polinomului $f \circ p$ să fie mai mic decît $c + \operatorname{grad} p$.

113. Fie $P(Z)$ un polinom de grad cel puțin 2 cu coeficienți complecși nu toți reali. Atunci ecuația $P(Z)\,P(-Z) = P(Z)$ are soluții în ambele semiplane, $\operatorname{Im} z < 0$ și $\operatorname{Im} z > 0$.

American Math. Manthly

114. Se dă polinomul $f = a_0X^{2n} + a_1X^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}X + a_{2n}$ cu $a_0 = a_{2n} = 1$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, 2n-1}$. Dacă toate rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt reale și au același semn, atunci $|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{2n}| \geqslant 2^{2n}$.

115. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^n - C_n^1X^{n-1} + C_n^2X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_1X + a_0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$. Știind că toate cele n rădăcini ale lui f sînt reale, să se determine a_i, $i = \overline{0, n-3}$.

G.M. 5/1982

116. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ cu rădăcinile $x_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, așa încît $f = \sum_{k=1}^{n} (S - x_k)(X - x_k)^n$, unde $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și S este suma rădăcinilor polinomului.

Marius Burtea

117. Fie $f \in \mathbf{Q}[X]$ un polinom ireductibil de grad 3, avînd rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că pentru orice polinom $g \in \mathbf{Q}[X]$ avem fie $g(x_1) \neq g(x_2) \neq g(x_3)$, fie $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) \in \mathbf{Q}$.

T. Albu

118. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$. Știind că $a_n = 1$, $a_{n-1} = -C_n^1$, $a_{n-2} = C_n^2$ și că toate cele n rădăcini ale lui f sînt reale, să se determine a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-3$.

G.M. Nr. 5/1982

119. Se consideră polinomul $f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-3}X^3 + a_n \in \mathbf{R}[X]$ $(a_n \neq 0)$. Să se arate că f nu are toate rădăcinile reale.

Corneliu Avram

120. Fie $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ polinoame cu coeficienți complecși, astfel încît $\operatorname{grad} f_i = i$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

a) Dacă f este un polinom din $\mathbf{C}[X]$, $\operatorname{grad} f = n$, atunci există în mod unic numerele complexe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ astfel încît

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n.$$

b) Dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ și $a \in \mathbf{C}$ să se arate că avem:

$$f = f(a) + \frac{X-a}{1!}f'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(X-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

121. Fie f un polinom de grad n cu coeficienți raționali. Să se demonstreze că $f(m) \in \mathbf{Z}$, $\forall\, m \in \mathbf{Z}$, dacă și numai dacă există $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ $a_n \neq 0$, astfel încît:

$$f = a_0 + a_1\frac{X}{1!} + a_2\frac{X(X-1)}{2!} + \ldots + a_n\frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

122. Arătați că dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ este un polinom de gradul n, atunci există numerele reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$ determinate în mod unic, astfel încît:

$$f = a_0 + a_1X + a_2X(X-1) + \ldots + a_nX(X-1)\ldots(X-n+1).$$

Admitere 1983

123. Un polinom de grad n cu coeficienți reali ia valori întregi în $n+1$ termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătați că polinomul ia valori întregi în orice termen al progresiei aritmetice, iar dacă progresia are doi termeni raționali atunci coeficienții polinomului sînt numere raționale.

Mircea Becheanu

124. Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$. Pentru $a, b, \lambda \in \mathbf{R}$ definim polinoamele $f_1 = f - a$, $f_2 = f - b$, $f_3 = f - \lambda$. Dacă toate rădăcinile polinoamelor f_1 și f_2 sînt reale și distincte, să se arate că pentru $\lambda \in [a, b]$, și rădăcinile polinomului f_3 sînt reale și distincte.

125. Dacă un polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul 5 are rădăcinile în progresie aritmetică, să se arate că și polinomul $f'' \in \mathbf{R}[X]$ admite rădăcinile în progresie aritmetică și cele două polinoame au o rădăcină comună.

Florin Rotaru

126. Rădăcinile polinomului $f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ sînt în progresie aritmetică. Să se determine $f'(x_i)$.

127. Să se demonstreze că un polinom admite cel puțin tot atîtea rădăcini complexe ca și derivata sa.

128. Dacă $f, g \in \mathbf{R}[X]$ sînt polinoame de grad n, iar polinomul $h(X) = f(X) \cdot X^{n+4} + a(n+2)X^{n+3} + b(n+3)X^{n+2} + c(n+2)X^{n+1} + g(X)$ are toate rădăcinile reale, atunci $b^2 \geqslant ac$ (unde $a, b, c \in \mathbf{R}$).

Radu Nicolescu și C. Caragea

129. Să se arate că polinomul $f = (X-1)(X-2)\ldots(X-n) + X(X-2)(X-3)\ldots(X-n) + \ldots + X(X-1)(X-2)\ldots + (X-n+1)$, are numai rădăcini simple oricare ar fi n natural.

I. Ursu

130. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ și $a_1, \ldots, a_m$ numere întregi distincte. Să se determine cel mai mic număr natural m astfel încît dacă

$f(a_1) = \ldots = f(a_m) = k$, k întreg fixat, atunci
$f(x) \neq p + k$ pentru orice număr prim p.

Daniela Tilică

131. Este posibil ca polinoamele $(X+1)^m + X^m + 1$ și $(X+1)^m - X^m - 1$ să fie divizibile cu $(X^2+X+1)^3$?

132. Să se determine multiplicitatea rădăcinii „a", a polinomului $g = \frac{X-a}{2}[f'(X)+f'(a)] - f(X) + f(a)$ unde f este un polinom.

133. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ știind că $f+1$ este divizibil cu $(X-1)^{n+1}$, iar $f-1$ este divizibil cu $(X+1)^{n+1}$, $\operatorname{grad} f = 2n+1$.

134. Dacă numerele a_i, $i = \overline{1,n}$ sînt reale, să se arate că ecuația:

a) $\frac{a_1}{a_1-x} + \frac{a_2}{a_2-x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n-x} = 0$ are toate rădăcinile reale.

b) $\frac{a_1}{a_1-x} + \frac{a_2}{a_2-x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n-x} = n$ are rădăcinile reale.

135. Fie $f(X) = (X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_n)$, $x_i \in \mathbf{C}$, $x_i \neq x_j$, $\forall\, i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x-x_i} = \frac{xf'(x)-xf(x)}{f(x)} \quad \forall\, x \in \mathbf{C} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

136. Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f. În ipoteza că rădăcinile sînt reale și distincte să se arate că:

a) $\frac{x_1^2}{f'(x_1)} + \frac{x_2^2}{f'(x_2)} + \frac{x_3^2}{f'(x_3)} = 1$ unde $f'(x)$ este derivata lui $f(x)$.

b) $\frac{g(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{g(x_2)}{f'(x_2)} + \frac{g(x_3)}{f'(x_3)} = 0$, dacă g este un polinom de gradul întîi.

137. Să se demonstreze că pentru orice polinom f cu rădăcinile simple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avem relația:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} = 0.$$

138. Fie polinomul $f = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $n \geqslant 2$. Să se arate că:

1) f nu are rădăcini multiple.

2) f nu are rădăcini raționale.

139. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît:

$$f = f' + X^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

140. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $f = af' + bX^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a, b \in \mathbf{C}^*$.

141. Să se găsească toate polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ cu proprietatea că $f' \mid f$.

G.M. nr. 5/1987

142. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ de gradul $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $\forall\, m = \overline{0,n}$, $0 < f(m) \leqslant n$ atunci $\exists\, c \in (0,n)$, $f'(c) = 0$.

Cătălin Mocuță

143. Să se determine toate polinoamele de gradul n, care verifică relația:

$$[f(X)]^2 = f'(X)\ \ f''(X)\ \ldots f^{(n)}(X).$$

Gheorghe Berinde

144. Să se determine toate polinoamele de gradul n care verifică relația:

$$[f(x)]^2 = f'(X)\ \ f''(X)\ \ldots f^{(k)}(X) \text{ unde } k \in \mathbf{N}.$$

Constantin Caragea

145. Să se determine polinoamele f, g cu coeficienți reali știind că: 1) $f^2(x) = f'(x^4)$; 2) $g^2(x) = g'(x^3)$.

Aurel Doboșan

146. Să se determine polinoamele $f(X)$ cu coeficienți reali știind că

$$f^2(X) = f'(X^k) \text{ unde } k \in \mathbf{N} \setminus \{2\}, \text{ fixat.}$$

Radu Gheorghiu

147. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(X)$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $\lambda f(X) + f'(X)$ sînt, de asemenea, reale pentru oricare λ real.

148. Fie f un polinom cu coeficienți reali și fără rădăcini multiple. Demonstrați că dacă $f + \lambda f'$ nu are rădăcini reale, atunci nici f' nu are rădăcini reale ($\lambda \in \mathbf{R}$).

Dorel Miheț

149. Fie f un polinom cu coeficienți reali.
Dacă f nu are rădăcini reale este adevărat că polinomul $f + \alpha f'$ nu are rădăcini reale, pentru $\alpha \in \mathbf{R}$?

Gheorghe Bordea

150. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} \text{ și } g = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{n-k}, \text{ unde } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2.$$

Să se arate că dacă polinomul g nu admite rădăcini reale, atunci polinomul f admite o singură rădăcină reală.

Ilie Romeo

151. Fie f un polinom de gradul $n \geqslant 2$ cu coeficienți reali care are proprietatea

$$xf'(x) > nf(x),\ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Să se demonstreze că polinomul f admite o singură rădăcină reală.

Ilie Romeo

152. Să se demonstreze că pentru polinomul
$f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ să fie divizibil cu $(X-1)^{k+1}$ este necesar și suficient să fie indeplinite condițiile:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + &\quad + a_n = 0\\
a_1 + 2a_2 + &\quad + na_n = 0\\
a_1 + 4a_2 + &\quad + n^2a_n = 0\\
&\vdots\\
a_1 + 2^ka_2 + &\quad + n^ka_n = 0.
\end{aligned}$$

153. Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ care are n rădăcini reale, distincte, $n \geqslant 1$. Să se arate că polinomul

$$g(X) = a_n X^n + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i + a_{i+1}(i+1)]X^i \text{ are toate rădăcinile reale.}$$

Daniel Lesnic

154. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului f şi ale polinomului $g = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $h = a_0f + a_1f' + \ldots + a_nf^{(n)}$ sînt deasemenea reale.

155. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $g = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $h = a_0X^n + a_1A_m^1X^{n-1} + a_2A_m^2X^{n-2} + \ldots + a_nA_m^n$ sînt deasemenea reale pentru orice m întreg şi pozitiv.

156. Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, grad $f = 4$ are rădăcinile situate pe o paralelă la axa $0y$, atunci şi derivata sa are rădăcinile situate pe aceeaşi paralelă.

Admitere 1979

157. Să se rezolve ecuaţia:

$$2^x = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

158. Fie P(X) un polinom cu coeficienţi reali care admite n rădăcini reale, distincte, nenule. Să se demonstreze că graficul lui P(X) admite cel puţin $n-2$ tangente concurente în origine.

Marius Dădărlat

159. Rădăcinile unui polinom ireductibil cu coeficienţi raţionali sînt distincte.

160. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea $f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Să se arate că $\exists\, k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f = \varepsilon X + k$ unde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Ion Savu

161. Fie $P(X) = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \ldots + a_m \in \mathbf{R}[X]$ şi
$Q(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \ldots + b_n \in \mathbf{R}[X]$, $(a_0, b_0 \neq 0)$
astfel încît $|P(X)| \leqslant |Q(X)|$, $\forall X \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă toate rădăcinile lui Q sînt reale, atunci $m = n$ şi $|a_0| \leqslant |b_0|$, $|a_1| \leqslant b_1|$, ..., $|a_n| \leqslant |b_n|$.

Dorel Miheţ G.M. nr. 9–10/1982

162. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^3 - 4\sqrt{3}x^2 + 3x + 18\sqrt{3} = 0$.
b) $(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.
c) $x^4 - 16x - 12 = 0$.
d) $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 12$.
e) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$.

163. a) Să se determine k, știind că produsul a două rădăcini ale ecuației $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ este -32.

b) Să se determine rădăcinile reale și pozitive x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuației $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$ dacă

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{5} + \frac{x_4}{8} = 1.$$

Olimpiada S.U.A. — 1984

164. Să se arate că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale și distincte dacă și numai dacă ecuația:

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2 + b}{4}x + \frac{ab - c}{8} = 0 \text{ are rād. reale și distincte.}$$

165. Fie ecuația $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. Să se arate că:

1) Ecuația are o singură rădăcină reală, x_1.

2) $0 < \operatorname{Re} x_i < \frac{1}{2}$, și $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x_i| < 1$, $i = 2,3$.

Gheorghe Andrei

166. Fie ecuația $2x^3 - 3x^2(a + 1) + 6ax - 3a = 0$.

1) Să se determine valorile lui a pentru care ecuația are o singură rădăcină reală x_1.

2) În condițiile 1) fie $x_2, x_3 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și $\alpha = \operatorname{Re} x_i$, $\rho = |x_i|$, $i = 2, 3, \ldots$. Să se arate că $\left|\alpha - \frac{3a}{2}\right| < \frac{a}{2}$ și $\frac{\sqrt{3}}{2} < \rho < \sqrt{\frac{3}{2}}$; dacă $a > 1$, iar $\left|\alpha - \frac{3a}{2}\right| < \frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{3a}}{2} < \rho < \sqrt{\frac{3a}{2}}$ dacă $0 < a \leqslant 1$.

Gh. Andrei

167. Fie x_0 o rădăcină negativă a polinomului:

$$P(X) = 3X^{4n+8} + X^{4n+7} + 3X^{4n+4} + X^{4n+3} - 3X^7 - X^6 + 18nX^4 + 6nX^3 - 27n^2X - 9n^2, \; n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că polinomul $Q(X) = 3X^2 + 6(x_0 + a) - 2n$ are rād. reale distincte $\forall a \in \mathbf{R}$.

Ioan Crișan

168. Să se arate că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $2x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0$ satisfac condițiile:

a) $0 < \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} x_k < 1$.

b) $\frac{9}{2} < \sum_{k=1}^{3} |x_k| < 3 + 2\sqrt{1,2}$.

M. Haivas

169. Fie ecuația $9x^3 - 36x^2 + 45x - 17 = 0$. Să se arate că:

1) Rădăcinile ecuației sînt trei numere reale pozitive și pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

2) Să se calculeze aria acestui triunghi.

170. Demonstrați că dacă coeficienții reali ai ecuației $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ satisfac condiția $p^2 < 3q$; atunci ecuația are o singură rădăcină reală.

Matematică v'şcole, 1967

171. Demonstrați că o condiție necesară și suficientă ca ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cu coeficienți reali să admită rădăcini pur imaginare este ca $ad = bc$, $ac > 0$.

Matematica v'şcole, 1967

172. Fie ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ și ad, $b + c$ sînt numere impare. Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină irațională.

173. Se consideră o dreaptă variabilă care intersectează graficul funcției $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ în patru puncte distincte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Arătați că $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ este un număr constant și găsiți-i valoarea.

174. Fie $p, q \in \mathbf{Z}$, p prim. Să se arate că pentru $|p| > 2$ ecuația: $x^3 + qx + p = 0$, nu poate avea toate rădăcinile întregi.

Gh. Niculescu

175. Demonstrați că dacă ecuația $ax^2 + (c - b)x + e - d = 0$ are o rădăcină mai mare decît 1, atunci ecuația $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ are cel puțin o rădăcină reală ($a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$).

Kvant

176. Fie ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{R}$.

a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației și

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, atunci $\Delta^2 = -4p^3 - 27q^2$.

b) Dacă $p \geqslant 0$, ecuația are o singură rădăcină reală.

c) Ecuația are o rădăcină multiplă dacă și numai dacă $4p^3 + 27q^2 = 0$.

d) Ecuația are rădăcini reale dacă și numai dacă $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$.

177. Dacă rădăcinile polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$

$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a^n$, unde $a \in \mathbf{C}$, $a^{2n} = 1$, au același modul, atunci $f(a) \in \mathbf{R}$.

Prelucrare, Etapa finală — 1974

178. Se consideră ecuația $x^3 - x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Calculați: $x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16}$.

G.M. Nr. 3/1986

179. Se dă ecuația $2x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 4a + 11)x + b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

1) Să se găsească o relație între rădăcini, independentă de a și b.

2) Să se arate că dacă rădăcinile sînt reale, atunci se găsesc în intervalul $[1,3]$.

180. Fie a o rădăcină a ecuației $x^3 - x - 1 = 0$. Să se găsească un polinom nenul, cu coeficienți întregi, care să admită rădăcina $b = 2a^2 - a$.

Admitere 1985

181. Ecuația $x^3 - x^2 + ax - b = 0$ are rădăcinile reale și pozitive. Să se arate că $a - b \leqslant \frac{8}{27}$.

182. Fie ecuația $x^3 - ax^2 + b = 0$, cu rădăcinile reale. Să se arate că dacă $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ atunci.

$$\sqrt{a - x_1} = \sqrt{a - x_2} + \sqrt{a - x_3}.$$

183. Să se arate că dacă ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, $a, b, c \geqslant 0$ are toate rădăcinile reale x_1, x_2, x_3, atunci $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

184. Dacă ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, $(a, c > 0)$ are rădăcinile reale x_1, x_2, x_3, atunci notînd $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ avem $S_k > 0$, $k \in \mathbf{N}$.

185. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$ satisfac relația:

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + \frac{1}{1 + x_3^2} = 1 - \frac{2}{b - 1}, \ (b \neq 1).$$

186. Se dau ecuațiile $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$ în care $a \neq a'$. Știind că cele două ecuații au o rădăcină dublă comună, să se arate că: $(b - b')^2 - 4(a - a')(c - c') = 0$.

G.M. 4/1983

187. Fie ecuația: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Știind că ecuația are o rădăcină de modul 1 (reală sau nu) să se rezolve găsind și relațiile între a, b, c.

188. Rezolvați ecuația $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 15 = 0$.

Matematica v'școle G.M. 10/1987

189. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, ecuația:

$x^5 - 3mx^4 + 3m^2x^3 - m^3x^2 - x + m = 0$, unde m este un parametru complex.

Ionel Gh. Tudor

190. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbf{Q}\}$ ecuația:

$$\sqrt{3}\, x^4 - 4x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0.$$

Nicolae Crainic

191. Pentru ce valori întregi a și b produsul a două dintre rădăcinile ecuației $x^4 + ax^3 + bx^3 + ax + 1 = 0$ este 3?

Matematica v'școle

192. Să se rezolve $x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$ și să se determine parametrii reali a și b știind că ecuația admite toate rădăcinile numere reale negative.

Gh. Ciorăscu

193. Fie ecuația $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $(a_4 \neq 0)$, cu coeficienți reali. Dacă ecuația dată are două rădăcini duble, atunci între coeficienți există relațiile:

$$4a_4(a_2a_3 - 2a_1a_4) = a_3^3; \ a_1^2a_4 = a_0a_3^2.$$

Ștefan Tache

194. Să se rezolve ecuațiile:

$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0$ și

$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$ știind că au rădăcini comune.

Admitere 1984

195. Să se rezolve ecuația $x^4 - ax^3 + bx^2 - bx + c = 0$, știind că rădăcinile sale sînt numere naturale.

Gheorghe Bordea

196.

a) Fie $P(X) = \frac{X^{n-1}}{a_1a_2} + \frac{X^{n-2}}{a_2a_3} + \ldots + \frac{X}{a_{n-1}a_n} - \frac{n-1}{a_1a_n}$; numerele $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ fiind în progresie aritmetică. Să se arate că $P(X)$ se divide cu $X - 1$, dar nu se divide cu $(X - 1)^2$.

b) Considerăm polinoamele $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ cu toate rădăcinile reale. Dacă $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - b_j}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $x \neq a_i, b_j$ unde a_i, b_j sînt rădăcinile polinoamelor P și Q, să se demonstreze că polinoamele P și Q au același grad și aceleași rădăcini. ($i = 1,2, \ldots, n$ și $j = 1,2, \ldots, m$).

197. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1 = 0,$$

să se calculeze:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{n+1} - 1}{x_k - 1}.$$

G.M. nr. 12/1980

198. Se dă ecuația $ax^m + bx^n + c = 0$, $a \neq 0, m > n$, $m \neq 2n$, $m, n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că $|x_i| = |x_j|$, $\forall\, i, j = 1,2, \ldots, m$ este echivalent cu $b = 0$ (s-au notat cu x_i rădăcinile ecuației date).

Constantin Caragea

199. Să se rezolve ecuația cu coeficienți reali

$$x^n - ax^{n-1} + \frac{n-1}{2n} a^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

$n \geqslant 2$, știind că are toate rădăcinile reale.

V. Drăghici, R. Dămboianu

200. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + nx - 1 = 0,$$

de grad $n \geqslant 3$ impar și să se determine coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, știind că admite numai rădăcini reale și pozitive.

Ion Pîrșe

201. Numerele $a, b, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$, $ab \neq 0$, sînt reale.

Se cunoaște că toate rădăcinile ecuației:

$$ax^n - ax^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 - n^2bx + b = 0$$

sînt reale și pozitive. Demonstrați că toate rădăcinile ecuației sînt egale.

Olimpiada Națională Bulgaria, 1984

202. Să se arate că dacă ecuația:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \text{ are rădăcinile egale,}$$

atunci:

$$\frac{a_1^2}{a_0^2a_3} = \frac{6n^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Miodrag Iovanov

203. Să se rezolve ecuația: $x^{2n} - nx^{2n-2} + a_{2n-3}x^{2n-3} + \ldots + a_3x^3 + (-1)^{n-1}nx^2 + (-1)^n = 0$, $n \geqslant 2$, știind că are toate rădăcinile reale. Să se determine coeficienții ecuației.

Gheorghe Bordea

204. Să se găsească ecuațiile cu coeficienți întregi de forma:

$$x^n + x_1x^{n-1} + x_2x^{n-2} + \ldots + x_{n-1}x + x_n = 0, \text{ unde}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației.

Drîmbe Mihai Onucu

205. Fie $n, k \in \mathbf{N}^*$, $k < n$ și $\alpha \in \mathbf{R}$, cu $|\alpha| \leqslant 1$. Să se arate că ecuația $x^n + \alpha x^{n-k} + \alpha x^k + 1 = 0$ are toate rădăcinile de modul 1.

Florin Vulpescu Jalea

206. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți reali și $a^2 < 3b$. Să se arate că ecuația admite o singură rădăcină reală x_0 și că

$$|x_0| \leqslant \frac{4|c|}{4b - a^2}.$$

207. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} = 0,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației: $x^n + 1 = 0$.

208. Fie ecuația $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se calculeze

$$\frac{1}{(x_1 - 1)^2} + \frac{1}{(x_2 - 1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_n - 1)^2}.$$

G.M. nr. 3/1988

209. Să se arate că dacă rădăcinile polinomului $X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n \in \mathbf{R}[X]$ sînt în progresie aritmetică, aceste rădăcini pot fi calculate cunoscînd doar pe a_1 și a_2.

210. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$, ale cărui rădăcini au același modul $k > 0$. Să se arate că:

$$a_1 + k^2\frac{a_{n-1}}{a_n} \in \mathbf{R}.$$

G.M. nr. 5/1980

211. Să se arate că, dacă polinomul $a_0X^{2n} + a_1X^{2n-1} + \ldots + a_{2n} \in \mathbf{Z}[X]$, cu $a_0 > 0$, are toate rădăcinile reale și distincte, situate în intervalul $(0, 1)$, atunci $a_0 \geqslant 4^n + 1$.

Liviu Vlaicu

212. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

Arătați că dacă printre numerele a, b și c există un singur număr par atunci f admite cel mult o răd. rațională.

C. Băcuță

213. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $(a_n \neq 0)$, cu rădăcinile x_i, $i = \overline{1, n}$. Să se arate că dacă $|a_1| = |a_0|$, atunci există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $|x_i| \leqslant n$.

Liviu Daia

214. Polinomul $f = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$ are toate rădăcinile reale. Să se arate că rădăcinile polinomului sînt egale între ele, dacă și numai dacă $(n - 1)a_1^2 = 2na_2$.

Constantin Caragea

215. Se consideră polinomul

$$f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-3}X^3 + a_n \in \mathbf{R}[X], \quad (a_n \neq 0).$$

Să se arate că f nu are toate rădăcinile reale.

Corneliu Avram

216. Să se arate că oricare or fi polinomul

$P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ unde $|a_i| \leqslant 1$, $i = 1,2, \ldots, n$ are toate rădăcinile de modul < 2.

Dan Schwarz, etapa finală 1975

217. Dacă coeficienții complecși ai polinomului:

$P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ verifică inegalitățile $|a_k| < \frac{1}{2^k}$, $k = \overline{1, n}$, atunci toate rădăcinile lui au modulul < 1.

218. Se consideră ecuația de grad impar:

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} + \bar{a}_nx^n + \ldots + \bar{a}_1x + \bar{a}_0 = 0,$$

cu coeficienții termenilor egali depărtați de extremi numere complexe, conjugate. Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină de modul 1.

Ion Cucurezeanu

219. Fie ecuația $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, $n \geqslant 2$, $a_n \neq 0$.

Să se arate că dacă $a_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{0, n}$ și

$(n - 1)a_{n-1}^2 - 2n\, a_na_{n-2} < 0$, atunci ecuația dată nu are toate rădăcinile reale.

G.M. 11/1979

220. Să se determine toate polinoamele

$f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$, unde $a_i \in \{-1,1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și care au rădăcini reale.

Concurs Bulgaria 1987, Austria 1989

221. Fie polinomul $f_n = \frac{X^n}{n} + \frac{X^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{X}{1} + 1$.

1) Să se arate că dacă n este impar, atunci $f_n(X)$ are o singură rădăcină reală.

2) Dacă n este par, atunci $f_n(x) > 0{,}3$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Olimpiada, Bulgaria, 1989

222. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$. Să se arate că

$$S = \sum_{k=1}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{k-1} \bar{x}_k x_{k+1} \ldots x_n \in \mathbf{R}.$$

Concurs 1976

223. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-2} - \ldots - a_{n-1} X - a_n$ unde $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că:

1) f are o singură rădăcină pozitivă x_1.

2) $|x_k| < x_1$, $k = 2, \ldots, n-1, n$.

224. Fie $a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$, $f \in \mathbf{R}[X]$, unde $|a_0| > \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$. Să se arate că dacă x_0 este o rădăcină, cu $|x_0| \geq 1$, atunci $|x_0| < 2$.

225. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$.

Să se arate că dacă $|x_k| \leq 1$, atunci $|a_1| + \ldots + |a_n| < 2^n$ unde x_k este o rădăcină a lui f.

226. Să se arate că ecuația $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ cu $0 < a_0 \leq a_1 \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$ are toate rădăcinile de modul mai mare sau egal cu 1.

227. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcini reale și $a^2 = 2b + 2$. Să se arate că $|a - c| \leq 2$.

Olimpiada Cehoslovacia, 1988

228. Să se arate că polinomul:

$f_n = X^{n+1} - (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)$ are o singură rădăcină reală pozitivă, pe care o notăm cu a_n și

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

I. Tomescu

229. Să se demonstreze că pentru orice m întreg, ecuația

$x(x^2 - 1)(x^2 - 10) = m$ nu poate avea toate soluțiile întregi.

230. Se dă ecuația $x^n - 2x^{n-1} + 3x^{n-2} - 4x^{n-3} + \ldots + (-1)^n(n+1) = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se dovedească egalitatea:

$x_1^m + x_2^m + x_3^m + \ldots + x_n^m = (-1)^{m-1} \cdot 2$, unde $1 \leq m \leq n$, $m \in \mathbf{N}$.

Florin Rotaru

NUMERE COMPLEXE

PROPRIETĂȚI

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$.

1. $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$.

2. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

3. $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

5. $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$,

6. z — imaginar $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \bar{z} = -z \\ \bar{z} \neq z. \end{matrix}$

7. a) $\operatorname{Re} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{1}{z} > 0$,

b) $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \dfrac{1}{z} < 0$,

c) $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k$,

d) $\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k$.

8. $i^n = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n = 4k, \\ -1 \quad ,, \quad n = 4k + 2, \\ i \quad ,, \quad n = 4k + 1, \\ -i \quad ,, \quad n = 4k + 3. \end{cases}$

9. $|z_1 - z_2| = d \rightarrow$ distanța dintre punctele $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$.

10. a) $|z - z_0| = r$ reprezintă cercul cu centrul de afix z_0 și rază r.
b) $|z - z_0| \leqslant r$ reprezintă discul cu centrul de afix z_0 și rază r.
c) $|z - z_0| > r$ exteriorul discului cu centrul de afix z_0 și rază r.

11. $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $\alpha = \arg z \in [0, 2\pi)$, $r = |z|$, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{b}{a}$, $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, $(z \neq 0)$ $\sin \alpha = \dfrac{b}{r}$, $\cos \alpha = \dfrac{a}{r}$.

$$\begin{cases} 1 = \cos 0 + i \sin 0, \\ -1 = \cos \pi + i \sin \pi, \\ i = \cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}, \\ -i = \cos \dfrac{3\pi}{2} + i \sin \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

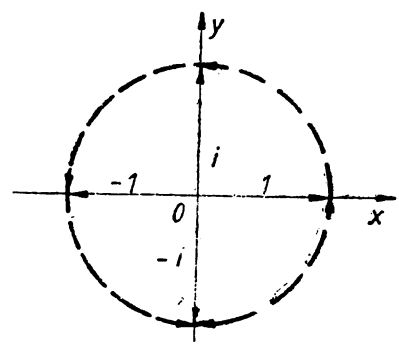


Fig. 1

12. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$.

13. $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n$.

14. $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n$.

15. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

16. $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|$.

17. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

18. $|z^n| = |z|^n$.

19. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

20. $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$, $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$.

21. Fie $z = x + iy$.

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi, \text{ unde } k = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x > 0,\ y \geqslant 0, \\ 1 \quad ,, \quad x < 0, \\ 2 \quad ,, \quad x > 0,\ y < 0. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ dacă imaginea geometrică se află în cadranul I.} \\ 1 \quad ,, \text{ imaginea geometrică se află în cadranul II și III.} \\ 2 \quad ,, \text{ imaginea geometrică se află în cadranul IV.} \end{cases}$$

22. $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 - 2k\pi$ unde $k \in \{0,1\}$. Se alege k astfel ca membrul II să aparțină intervalului $[0,2\pi)$,

$$\text{adică } \arg z_1 z_2 = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 \text{ dacă } \arg z_1 + \arg z_2 < 2\pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi \text{ dacă } \arg z_1 + \arg z_2 \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

23. $\arg z + \arg \bar{z} = 2\pi$, $(z \neq 0)$.

24. $\arg \bar{z} = \begin{cases} 2\pi - \arg z \text{ dacă } z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+, \\ 0 \quad ,, \quad z \in \mathbf{R}_+^*. \end{cases}$

25. $z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$.

26. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$ și generalizare:

$$z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n)].$$

27. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)}{(\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$.

§ 1. IDENTITĂȚI ȘI INEGALITĂȚI

1. Să se verifice identitățile:

a) $\left|\frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2\right| = |z_1 + z_2|$.

b) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

c) $|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = |z_1 - z_2|^2$.

d) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + (|z_1| - |z_2|)^2$.

e) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)$.

f) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$.

g) $3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$.

h) $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$

i) $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4 - z_1|^2 = |z_1 - z_3|^2 + |z_2 - z_4|^2 + |z_1 - z_2 + z_3 - z_4|^2$.

2. Să se arate că:

a) $z_1\mathrm{Im}(\bar{z}_2 z_3) + z_2\mathrm{Im}(\bar{z}_3 z_1) + z_3\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2) = 0$.

b) Dacă $\mathrm{Im}(\bar{z}_2 z_3) = \mathrm{Im}(\bar{z}_3 z_1) = \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2) \neq 0$, atunci $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$. Să se arate că $|z + z'| = |z| + |z'|$, dacă și numai dacă există $\lambda \in [0, +\infty)$ astfel $z' = \lambda z$.

4. Să se demonstreze identitățile:

1) $(n-2)\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1 \leq k < s \leq n}^{n} |z_k + z_s|^2$.

2) $n \cdot \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1 \leq k < s \leq n}^{n} |z_k - z_s|^2$.

5. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că:

a) $z + \bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$, $\frac{z^n}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}^n}{z}$ sînt reale $(z \neq 0)$.

b) $z - \bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$, $\frac{z^n}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}^n}{z}$ sînt imaginare $(z \neq 0)$.

c) $\bar{z}z' + z\bar{z}'$ este real și $z \cdot \bar{z}' - \bar{z}z'$ este imaginar.

6. Fie z și z' două numere complexe astfel încît $|z| = |z'| = r$.

Să se demonstreze că: $\frac{z + z'}{r^2 + zz'}$ este real.

7. Fie $z \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z| = 1$, atunci $\frac{z^n}{1 + z^{2n}} \in \mathbf{R}$.

8. Fie $z \in \mathbf{C} - \{\pm 1\}$. Să se arate că: $\frac{z-1}{z+1}$ este pur imaginar

$$\Leftrightarrow |z| = 1.$$

9. Fie numărul complex $z = x + iy$, $y \in \mathbf{R}^*$, $x \in \mathbf{R}$.

Să se arate că $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} \in \mathbf{R}$.

Admitere Politehnică — 1985

10. Dacă $z, z' \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z| = 1$ și $\bar{z}z' \neq 1$,

$$\text{atunci} \left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right| = \left| \frac{z - z'}{1 - z\bar{z}'} \right| = 1.$$

11. Fie $a,b \in \mathbf{C}$, $|a| \neq |b|$. Să se arate că $|z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| = 1$.

12. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = 1$ și $z_1 z_2 \neq -1$.

a) Să se arate că : $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbf{R}$.

b) $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 z_2 z_3 \neq -1$.

Să se arate că $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{1 + z_1 z_2 z_3} \in \mathbf{R}$.

Liviu Pîrșan

13. Fie $u, v \in \mathbf{C}$, astfel încît, $|u| < 1$ și $|v| = 1$ și fie $w = v \frac{z - u}{1 - \bar{u}z}$.

Să se arate că $|w| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1$.

14. Fie $z \in \mathbf{C}^*$.

a) Să se arate că numărul $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$ este real și să se deducă de aici că există $a,b \in \mathbf{R}$ astfel încît $z^2 = az + b$.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ astfel ca $z^n = a_n z + b_n$.

15. Dacă $z_i \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots n$, atunci

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \ldots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \ldots z_n} \in \mathbf{R}.$$

16. Să se arate că dacă $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = r > 0$, atunci numărul $E(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)(z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \ldots + z_2 z_3 \ldots z_n)}{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n)(z_1 z_2 \ldots z_{n-2} + \ldots + z_3 z_4 \ldots z_n)}$ este real.

D. Acu

17. Dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au același modul, atunci există relația :

$$(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3) \ldots (z_{n-1} + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_1) =$$
$$= (z_1 + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_{n-1}) \ldots (z_3 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_1).$$

Virgil Nicula

18. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se determine $|z|$, dacă $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2$.

19. Să se determine numerele complexe de modul 1 care satisfac relația $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.

20. Să se determine numerele complexe de modul 1 astfel că

$$|z^2 + \bar{z}^2| = 2.$$

Admitere treapta a II-a 1986

21. Să se afle numerele complexe de modul 2, care verifică egalitatea: $|z^2 + \bar{z}^2 + 6| = 2$.

22. Fie $a, z \in \mathbf{C}^*$. Să se demonstreze:

1) Dacă $z + \frac{1}{z} = \frac{a}{\bar{a}} + \frac{\bar{a}}{a}$, atunci $z^n + \frac{1}{z^n} = \frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n}$.

2) Dacă $z - \frac{1}{z} = \frac{a}{\bar{a}} - \frac{\bar{a}}{a}$ să se calculeze $z^n \pm \frac{1}{z^n}$.

3) Să se arate că $z^n + \frac{(-1)^n}{z^n} = \frac{a^n}{\bar{a}^n} + (-1)^n \frac{\bar{a}^n}{a^n}$.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța 1986

23. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Să se arate că $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)$ are partea reală nulă dacă și numai dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

24. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|$.

Să se arate că $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots \frac{1}{z_n} = 0$.

Gheorghe Andrei

25. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}^*$, avînd același modul.

Să se arate că numărul $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_j}{z_k}$ are partea reală nulă dacă și numai dacă $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.

Titu Andreescu, Etapa județeană 1987

26. Să se arate că dacă numerele complexe z_1, z_2, z_3 au modulul egal cu 1 atunci are loc egalitatea:

$$(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1z_2z_3|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3|^2.$$

27. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. Să se arate că $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dacă și numai dacă

$$|z_2 + z_3| = |z_1|,$$
$$|z_1 + z_3| = |z_2|,$$
$$|z_1 + z_2| = |z_3|.$$

28. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, astfel încît $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

29. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = a$ și $|z_1z_2z_3| = b$, $a, b \in \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că există $k \in \{1,2,3\}$ pentru care $|z_k| \leqslant \frac{3b}{a}$.

30. Să se afle numerele complexe z_1, z_2, z_3 dacă

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = a$, $z_1 + z_2 + z_3 = a$ și $z_1z_2z_3 = a^3$.

31. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$.

a) Dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ atunci $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$,

b) Dacă $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ atunci $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Florin Vulpescu Jalea, Etapa locală Buc. 1987

32. Fie $z, z' \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ astfel încît $|z| = |z'| = r$ și $|z + z' \pm r| = r$. Să se arate că $z + z' = 0$.

33. Fiind date numerele complexe z_1, z_2, z_3 distincte, astfel încît

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ și } |z_2 + z_3 - z_1| = |z_1|,$$

să se arate că $z_2 + z_3 = 0$.

Dorinel Anca

34. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încît $\operatorname{Im} \bar{z}_1z_2 = \operatorname{Im} \bar{z}_2z_3 = \operatorname{Im} \bar{z}_3z_1 \neq 0$.

Să se arate că

a) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

b) $\dfrac{|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} = 3$.

M. Andronache, Etapa locală — București 1988

35. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Să se arate că dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. atunci $z_1^{2^n} + z_2^{2^n} + z_3^{2^n} = 0$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Gheorghe Andrei, etapa locală — Constanța 1987

36. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, distincte, cu module egale și astfel încît $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_1z_3$, $z_3 + z_1z_2$ să fie reale.

a) Să se arate că $z_1z_2z_3 = 1$.

b) Generalizare: fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, $n \geqslant 3$, cu module egale nenule, astfel încît există trei dintre ele z_i, z_j, z_k distincte două cîte două pentru care

$z_i + z_1z_2 \ldots z_{i-1}z_{i+1} \ldots z_n$,
$z_j + z_1z_2 \ldots z_{j-1}z_{j+1} \ldots z_n$,
$z_k + z_1z_2 \ldots z_{k-1}z_{k+1} \ldots z_n$ să fie reale.

Să se arate că $z_1z_2 \ldots z_n = 1$.

37. Să se determine $\min\limits_{z \in \mathbf{C}-\mathbf{R}} \dfrac{Imz^5}{Im^5z}$ și valorile lui z pentru care se realizează minimul.

Titu Andreescu

38. Să se determine cel mai mare element al mulțimii $A = \left\{ \dfrac{z^3 - \bar{z}^3}{(z - \bar{z})^3} \,\middle|\, z \in \mathbf{C} - \mathbf{R} \right\}$ și numerele complexe $z \in \mathbf{C}$ pentru care se realizează această valoare maximă.

Titu Andreescu, Etapa locală, Giurgiu 1987

39. Fie z un număr complex nenul. Să se determine valoarea maximă pentru $|z|$, dacă, $\left|z+\frac{2}{z}\right|=2$ și să se precizeze valorile lui z pentru care $|z|$ este maxim.

40. Fie $a \in \mathbf{R}_+^*$ și $z \in \mathbf{C}$ astfel încît $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$.

Să se determine cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

41. Să se determine toate numerele complexe z cu proprietatea:

$$(\cos\alpha + z\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + z\sin 5\alpha, \quad (\forall)\,\alpha \in \mathbf{R}.$$

Constantin Caragea, Etapa locală Constanța 1984

Generalizare:

să se determine numerele complexe z a.î. $\forall\alpha \in \mathbf{R}$, $\forall n > 1$, $n \in \mathbf{N}$

$$(\cos\alpha + z\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + z\sin n\alpha.$$

42. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, nu toate reale, astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $2(z_1+z_2+z_3) - 3z_1z_2z_3 \in \mathbf{R}$. Să se arate că

$$\max(\arg z_1, \arg z_2, \arg z_3) \geqslant \frac{\pi}{6}.$$

Titu Andreescu

43. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $z_1, z_2, \ldots z_n$ numere complexe de modul 1 care satisfac relația:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 4\,[a + (a-n)i] - 3\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k.$$

Să se arate că $a \in \{0,1, \ldots n\}$ și $z_k \in \{1, i\}$ pentru orice k.

I. V. Maftei; S. Rădulescu

44. Să se arate că nu există trei numere complexe z_1, z_2, z_3 având modulele egale cu unu, care să verifice relația:

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3(2 - 2i - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)).$$

I. V. Maftei și Sorin Rădulescu, Etapa județeană 1986

45. a) Să se determine numărul natural nenul n astfel încît egalitatea

$$|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + \ldots + |z_{n-1}+z_n|^2 + |z_n+z_1|^2 =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 + |z_1+z_2+\ldots+z_n|^2$$

să aibă loc pentru orice numere complexe $z_1, z_2, \ldots z_n$.

b) Utilizînd rezultatul găsit, să se arate că dacă ΔABC este un triunghi oarecare, G centrul său de greutate, A_1, B_1, C_1, mijloacele laturilor BC, AC, AB și M un punct în planul triunghiului atunci are loc identitatea

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2).$$

D. Acu

46. Să se determine numărul natural n, $n \geqslant 2$ astfel încît egalitatea

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + \ldots + |z_{n-1} - z_n|^2 + |z_n - z_1|^2 = \\ = n(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2),$$

să aibă loc oricare ar fi numerele complexe $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ cu

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0.$$

Să se dea o intrepretare geometrică a rezultatului găsit.

D. Acu

47. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Să se arate că $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ dacă şi numai dacă

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2.$$

48. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n numere complexe nenule de acelaşi modul care satisfac relaţia : $z_3z_4 \ldots z_{n-1}z_n + z_1z_4 \ldots z_{n-1}z_n + \ldots + z_1z_2 \ldots z_{n-2} = 0$.
Să se demonstreze că $z_1z_2 + z_2z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = 0$.

Marius Lucian Pop

49. Să se determine toate numerele complexe care au partea reală, partea imaginară şi modulul numere raţionale.

Florin Vulpescu Jalea — Buc.

50. Fie $z_i \in \mathbf{C}$, $i = 1,2, \ldots, n$ numere complexe nenule.

Să se demonstreze că numărul

$$E = \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} + \ldots + \frac{z_n}{|z_n|} + \frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} + \ldots + \frac{|z_n|}{z_n}$$

este real şi să se arate că există $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$ şi $b \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$z_1^n + z_2^n + \ldots + z_n^n = a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n + b.$$

G.M. Nr. 8/1988

51. Să se arate că $\operatorname{Re} az \geqslant 0 \ (\forall) z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow a = 0$,

$$\operatorname{Im} az \geqslant 0 \ (\forall) z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow a = 0.$$

52. Fie $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$. Să se arate că dacă $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ sînt numere raţionale, atunci şi $|z|^n$, $\operatorname{Re} z^n$, $\operatorname{Im} z^n$ sînt tot numere raţionale.

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanţa 1990

53. Să se determine modulul şi argumentul numărului complex:

$$z = \frac{a^2 - ibc}{(a-b)(b-c)} + \frac{b^2 - iac}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2 - iab}{(c-a)(c-b)} \ ; \ a, b, c \in \mathbf{R}.$$

54. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Atunci $E = (a + ib)^4 + (b + ic)^4 + (c + ia)^4$ este real.

Reciproca este adevărată?

55. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$
astfel încît $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 1$. Să se arate că cel puţin două numere au acelaşi modul.

Gheorghe Andrei

56. Să se arate că dacă $|z_i| = 1$, $(\forall)\, i = 1,2,3$, $z_i \in \mathbf{C}$ și $\frac{1 + z_1z_2z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \in \mathbf{R}$, atunci $z_1z_2z_3 = -1$ sau $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

Alexandru Blaga, Etapa locală Satu Mare

57. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că:

a) Dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci $|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

b) Dacă $|z| < \frac{1}{3}$, atunci $|(\sqrt{2} - i)z_3 - iz| < \frac{3}{4}$.

c) Dacă $|z| < a$, $a \in (0,1)$, atunci

$$|\alpha z^m + \beta z^n| \leqslant a\,(|\alpha| + |\beta|),$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ și $m, n \in \mathbf{N}^*$.

58. Fie $a, b \in \mathbf{C}^*$. Să se arate că:

1) $\operatorname{Re}\frac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow \bar{a}b + a\bar{b} \geqslant 0$.

2) $\operatorname{Im}\frac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow i\,(\bar{a}b - a\bar{b}) \geqslant 0$.

3) $|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$.

Andrei Ion Cristian — elev, Constanța

59. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că:

$$|z| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2z - i}{2 + iz}\right| \leqslant 1.$$

60. Să se arate că dacă $|z + r| \leqslant r$ și $|z - r| \leqslant r$, atunci $z = 0$.

61. Fie $a, b, a', b' \in \mathbf{R}$ astfel încît $ab' - a'b \neq 0$.

Există $z \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ astfel încît $\frac{az + b}{a'z + b'} \leqslant 0$?

62. Determinați mulțimea punctelor din plan care satisfac inegalitatea: $|az + b| \leqslant r$. $(r > 0)$.

63. Fie $z, z_0 \in \mathbf{C}$ cu $|z_0| = 1$.

Să se arate că $\bar{z}z_0 + z\bar{z}_0 \leqslant 2\,|z|$.

64. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$ și $z \neq z_i$, $i = \overline{1,2}$ astfel încît

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$ Să se arate că $|z| \leqslant \frac{2|z_1|\,|z_2|}{|z_1| + |z_2|}$.

65. Fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ și z_1, z_2 numere complexe astfel încît $|az_1 + bz_2| < |ab + z_1z_2|$. Să se arate că $|z_1| < b$ dacă și numai dacă $|z_2| < a$.

Virgil Nicula

66. Să se arate că pentru orice $z \in \mathbf{C}$ are loc cel puțin una din inegalitățile: $|2z + 1| \geqslant 1$ sau $|z^2 + z + 1| \leqslant 1$.

67. Pentru orice $z \in \mathbf{C}$, are loc cel puțin una din inegalitățile:
$|z^3 - 1| \geqslant 1$ sau $|z - 1| < 1$ sau $|z - \varepsilon| < 1$ sau
$|z - \varepsilon^2| < 1$. (unde ε, ε^2 sînt rădăcinile cubice ale unității).

68. Să se arate că oricare ar fi $z \in \mathbf{C}$ are loc cel puțin una din inegalitățile: $|1 + z| \geqslant \frac{1}{2}$ sau $|1 + z^2| \geqslant 1$.

69. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\left|\frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2}\right| \leqslant |z_1 z_2|$.

b) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

c) $|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

d) $|z_1| + |z_2| + ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

e) $\sqrt{|z_1| + |z_2|} + \sqrt{||z_1| - |z_2||} \leqslant \sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}$.

70. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $|z_1 + z_2| = |z_1 z_2|$, atunci
$$|z_1| \leqslant 2 \text{ sau } |z_2| \leqslant 2.$$

71. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z_1 z_2| \leqslant 4$ și $|z_1^3 + z_2^3| \leqslant 16$.
Să se arate că: $|z_1 + z_2| \leqslant 4$.

72. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$. Să se demonstreze că:

1) $\left|\frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2\right| = |z_1 + z_2|$.

2) $\left|\frac{|z_2|}{|z_1|} z_2 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_1\right| \geqslant |z_1 + z_2|$.

3) $\frac{|z_1| + |z_2|}{2} \cdot \left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right| \leqslant |z_1 + z_2|$.

Andrei Ion Cristian

73. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2, z_3 are loc inegalitatea:
$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| +$
$+ |z_1 + z_2 + z_3|$.

74. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ cu $\mathrm{Re}(z_i) > 0$, $i = \overline{1,2,3}$.
Să se arate că: $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2 z_3 + 1}{z_1 z_2 z_3 + z_1 + z_2 + z_3}\right) > 0$.

75. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, cu cel puțin un număr nenul.
Să se arate că: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}} \leqslant 2$.

Ion Cucurezeanu

76. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ și $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, atunci

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 + z_2^2| \leqslant 2\,\frac{|a_1z_1 + a_2z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|.$$

77. Să se arate că $\operatorname{Re} z > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

78. Fie $z \in \mathbf{C}$. Dacă $|1 + z| \leqslant 1$ și $|1 + z^2| \leqslant 1$ atunci $|z| \leqslant 1$.

L. Panaitopol, Tabăra interjudețeană — Herculane — 1986

79. Dacă $z \in \mathbf{C}$ cu $|z| = 1$, atunci

$$|z + 1| + |z^2 + 1| + |z^3 + 1| \geqslant 2.$$

Etapa finală, 1987

80. Dacă $z \in \mathbf{C} - \{\pm 1\}$ cu $|z| = 1$, atunci

$$\frac{|z^3 - 1|}{|z - 1|} + \frac{|z^3 + 1|}{|z + 1|} \geqslant 2.$$

81. Fie $z \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leqslant 2$.

Să se arate că $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leqslant 2$.

Titu Andreescu, Etapa locală — Timiș — 1987

82. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, avînd același modul r. Arătați că

$$\frac{1}{|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_2 - z_1|\,|z_2 - z_3|} + \frac{1}{|z_3 - z_1|\,|z_3 - z_2|} \geqslant \frac{1}{r^2}.$$

Dorin Andrica, Concurs „Traian Lalescu" — 1985

83. Să se demonstreze că dacă a și b sînt două numere complexe astfel încît $tb + (1 - t)a \neq 0$ pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\operatorname{Re}\frac{a}{b} \geqslant 0$, atunci $\operatorname{Re}\frac{ab}{(tb + (1 - t)a)^2} > 0$ oricare ar fi $t \in (0, 1)$.

Etapa națională Cluj — 1988

84. Dacă $M = \{z \in \mathbf{C} \mid z = iy;\ y \in \mathbf{Z}\}$, atunci oricum ar fi $n \in \mathbf{N}$, n par și, oricare ar fi $z_0, z_1, \ldots, z_n \in M$ toate diferite între ele avem:

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 \leqslant -\frac{n(n + 1)(n + 2)}{12}.$$

Gheorghe Andrei

85. Dacă $A = \{z \in \mathbf{C} \mid z = x + iy;\ x, y \in \mathbf{Z};\ xy = 0\}$, atunci oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, n multiplu de 4 și oricare ar fi $z_0, z_1, \ldots, z_n \in A$ toate diferite între ele, avem:

$$z_0^4 + z_1^4 + \cdots + z_n^4 \geqslant \frac{n(n + 2)(n + 4)(3n^2 + 12n - 16)}{3840}.$$

D. M. Bătinețu, Daniel Grigorescu

86. a) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $|z_1| = |z_2|$, $z_1 + z_2 > 0$, atunci $z_1 z_2 > 0$. Reciprocele sînt adevărate?

b) Să se rezolve inecuația: $z^2 + z \leqslant 0$, $z \in \mathbf{C}$.

Florin Vulpescu Jalea, D. M. Bătinețu, Etapa locală Giurgiu — 1987

87. Fie $a, b, c, \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Să se determine $z \in \mathbf{C}$ astfel încît

$$az^2 + bz + c \leqslant 0$$

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța — 1988

88. Dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_6 \in \mathbf{C}$ verifică relațiile:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = 0;\ z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_6^2 = 0,$$

atunci $3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_6|^2) \leqslant 2(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_6|)^2$.

Mihai Piticari

89. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$. Să se arate că:

a) $|1 - z_1| + |1 - z_2| + \ldots + |1 - z_n| + |1 + z_1 z_2 z_3 \ldots z_n| \geqslant 2$.

b) $|1 + z_1| + |1 + z_2| + |1 + z_3| + \ldots + |1 + z_{n-1}| + |1 + z_n| + |1 + (-1)^n z_1 z_2 \ldots z_n| \geqslant 2$.

Titu Andreescu

90. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ și $z_0 = \dfrac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$.

Demonstrați că pentru orice $z \in \mathbf{C}$

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_0 - z_k|^2.$$

91. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \geqslant n(|z| - 1)^2$, oricare ar fi $z, z_k \in \mathbf{C}$ cu $|z_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$.

Mircea Ganga

92. Dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_{2n} \in \mathbf{C}$ verifică relațiile

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0,\ \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0, \text{ atunci}$$

$$n\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right) \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^2.$$

(Generalizarea problemei nr. 88.)

93. Fie $z_1, z_2, \ldots z_n \in \mathbf{C}^*$ astfel încît $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = r$.

a) Să se arate că

$$0 \leqslant (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right) \leqslant n^2.$$

b) Să se determine numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dacă

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = nr.$$

c) Dacă $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, atunci

$$|z - z_1| + |z - z_2| + \ldots + |z - z_n| \geqslant nr, \qquad \forall z \in \mathbf{R}.$$

Gheorghe Andrei

94. Să se demonstreze că oricare ar fi $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ are loc inegalitatea:

$$(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + |z_1 + z_2 + \ldots z_n|)^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2).$$

Gh. Andrei, Titu Andreescu, Memorialul „Onicescu—Mihoc" — Constanța — 1985

95. Să se determine toate numerele complexe z pentru care:

$$z^{2^n} + \bar{z}^{2^n} \geqslant 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Sorin Rădulescu, Tabăra națională de matematică, Dobrești, 1986

96. Să se arate că pentru orice numere complexe z_1, z_2 avem:

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \leqslant (|z_1| + |z_2|)^p + ||z_1| - |z_2||^p, \qquad (1)$$

dacă $p \in [2, +\infty)$ și

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geqslant (|z_1| + |z_2|)^p + ||z_1| - |z_2||^p \qquad (2)$$

dacă $p \in (0, 2)$.

Ion Bursuc — Iași

97. Fie $z_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 4$.

Să se arate că

$$\max_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} |z_i + z_j| \geqslant 2 \cos \frac{\pi}{n} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|.$$

Florin Vulpescu Jalea — București

98. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$a\bar{a}d\bar{d} + b\bar{b}c\bar{c} + a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + \overline{bc} + 1 \geqslant ad\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d}bc.$$

Andrei Ion—Cristian

99. Fie $a, b \in \mathbf{C}$. Să se arate că:

1) $ab + \bar{a}\bar{b} \leqslant |a|^2 + |b|^2$.

2) $(1 + ab)(1 + \bar{a}\bar{b}) \leqslant (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.

100. Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$.

1) Să se verifice identitatea

$$(a - b)(1 + c\bar{c}) = (a - c)(1 + b\bar{c}) + (c - b)(1 + a\bar{c}).$$

2) Dacă notăm cu: $d(a, b) = \dfrac{|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2} \cdot \sqrt{1 + |b|^2}}$,

Să se arate că:

$$d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b), \ (\forall)\ a, b, c \in \mathbf{C}.$$

101. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ şi $|c| \neq |d|$ atunci

$$\left|\frac{|a| - |b|}{|c| + |d|}\right| \leqslant \left|\frac{a+b}{c+d}\right| \leqslant \left|\frac{|a| + |b|}{|c| - |d|}\right|.$$

102. Fie $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$. Să se arate că:

$$\sqrt{2}|z - 1| + \frac{1}{4}|1 - z^4| \geqslant |1 - z^2|.$$

În ce caz avem egalitate?

Mircea Lascu, Marius Stănean

103. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, astfel încît

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Să se arate că:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \geqslant |z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|$$

şi să se precizeze cînd are loc egalitatea.

M. Nicolae, G.M. Nr. 6/1989

104. Fie $z_k \in \mathbf{C}$, $k = \overline{1, n}$, $z_k = x_k + iy_k$.

Arătaţi că $|\operatorname{Re}(\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Putnam Math. Competition, 1979

§ 2. ECUAŢII

1. Dacă z_1, z_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$ şi z_3, z_4 sînt rădăcinile ecuaţiei $z^2 - z + 1 = 0$ să se determine numerele întregi n astfel ca $z_1^n + z_2^n = z_3^n + z_4^n$.

Ion Diaconu, Etapa locală, Cluj 1984

2. Fie $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ şi astfel încît $|a| + |c| < |b|$

1) Să se arate că rădăcinile ecuaţiei satisfac inegalităţile

$$|z_1| < 1 \text{ şi } |z_2| > 1.$$

2) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ atunci ecuaţia are rădăcini reale, care satisfac inegalităţile de mai sus.

3. Fie ecuaţia $z^2 + az + 1 = 0$ unde $a \in \mathbf{C}$, $|a| = 1$.

Să se arate că

$$|\operatorname{Re} z_i| \leqslant \frac{|z_i|}{2}, \ |\operatorname{Im} z_i| \geqslant \frac{\sqrt{3}|z_i|}{2}, \ i = 1, 2,$$

unde z_1 şi z_2 sînt rădăcinile ecuaţiei de mai sus.

G.M. Nr. 3/1986

4. Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Să se arate că dacă rădăcinile ecuației $az^2 + bz + c = 0$, au module egale, atunci

$$\bar{a}b|c| = |a|\bar{b}c.$$

Liviu Vlaicu

5. Fie ecuația $z^2 + az + \frac{1}{3}(\alpha^2 + a\alpha + a^2) = 0$ cu $a, \alpha \in \mathbf{C}$.

Dacă z_1, z_2 sînt rădăcinile ecuației, să se arate că z_1, z_2, α sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

Gh. Marchitan

6. Fie a, b, c, d, α, numere complexe date cu $|a| = |b| = r > 0$ și $|c| = |d| = r_1 > 0$. Să se arate că ecuația

$$c(bz + a\alpha)^n - d(az + b\bar{\alpha}) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}^*,$$

are numai rădăcini reale.

D. Acu

7. Fie $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ și astfel încît

$$|a(b - c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|.$$

Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină cu modulul mai mic decît 2.

Andrei Ion Cristian

8. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$ unde $a, b, c \in \mathbf{C}^*$ și $|b| = 2|c|$. Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină în modul mai mică decît 1.

9. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ și $u \in \mathbf{C}$, astfel încît $|a| \cdot |u|^2 + |c| < |u| \cdot |b|$.

Să se arate că ecuația are o rădăcină cu modulul mai mic decît $|u|$.

10. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$ și

$$\arg a + \arg c = 2 \arg b \text{ și } |a| + |c| = |b|.$$

Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină de modul unitar.

manual

11. Să se rezolve sistemul de ecuații în $\mathbf{C}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xyz = 1, \\ |x| = |y| = |z| = 1. \end{cases}$$

12. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x|y| = z^2 \\ y|z| = x^2 \\ z|x| = y^2. \end{cases}$$

Etapa locală — Teleorman, 1987

13. Fie sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b, \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c, \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{C}$ şi ε este o rădăcină cubică a unităţii, complexă.

1) Să se rezolve sistemul.

2) Să se afle condiţia necesară şi suficientă ca soluţiile x, y, z să fie reale.

3) Să se arate că $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$.

14. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul

$$x_1^2 + y_1^2 = 2^4(x_2^2 + y_2^2) = \ldots = n^4(x_n^2 + y_n^2) \text{ şi}$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0.$$

Mihai Piticari

15. Se consideră ecuaţia: $az^3 + bz^2 + \bar{b}z + \bar{a} = 0$, $a, b, \in \mathbf{C}^*$. Să se arate că are cel puţin o rădăcină de modul 1.

Ion Cucurezeanu

16. Să se arate că dacă $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ este o soluţie a ecuaţiei

$$z^n + nz + a = 0,\ n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{R}_+, \text{ atunci } |z| > 1.$$

17. Să se arate că dacă numerele m şi n sînt prime între ele, atunci ecuaţiile $z^m - 1 = 0$ şi $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

Etapa judeţeană, 1983

18. Să se arate că rădăcinile comune ale ecuaţiilor

$$z^n - 1 = 0 \text{ şi } z^m - 1 = 0 \text{ sînt date de ecuaţia:}$$
$$z^d - 1 = 0, \text{ unde } d = (m, n).$$

19. Să se rezolve în $\mathbf{C}$, ecuaţia $z^n = \bar{z}^m$, $m, n \in \mathbf{N}^*$.

20. Să se rezolve ecuaţia şi să se reprezinte geometric soluţiile

$$z^{2n} + \bar{z}^{2n} = 2|z|^{2n},\quad n \in \mathbf{N}^*.$$

21. Să se rezolve ecuaţia $z^m + |z|^n = 0$ $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Dorin Popovici

22. Fie $z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n$, unde ω este

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i \sin\frac{2\pi}{2n+1},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că

a) $\operatorname{Im} z^{2k} = 0$, $\operatorname{Re} z^{2k+1} = 0$, pentru $\forall k \in \mathbf{N}$,

b) $(2z + 1)^{2n+1} + (2z - 1)^{2n+1} = 0$.

Maria S. Pop

23. Să se rezolve ecuaţia $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k = 0$.

24. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că dacă pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ există egalitatea

$$(\cos \alpha + z \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + z \sin n\alpha \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2,$$

atunci $z = \pm i$.

25. Să se rezolve ecuația $z^5 = z - \bar{z}$.

26. Dacă ε_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, să se arate că:

$$(a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \ldots (a + b\varepsilon_{n-1}) = a^n - (-1)^n b^n.$$

27. Dacă ε_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, să se arate că

$$(\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 \cos \alpha + 1)(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \cos \alpha + 1) \ldots (\varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_{n-1} \cos \alpha + 1) = 2(1 - \cos n\alpha).$$

28. Să se arate că $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \ldots (1 - \varepsilon_n) = n + 1$, unde ε_i, $i = 1, 2, \ldots n$ sînt rădăcinile ecuației $z^{n+1} - 1 = 0$, diferite de 1.

29. Dacă n este impar și $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, diferite de 1, atunci

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 + z_k}{1 - z_k} = \frac{1}{n}$$

G.M. Nr. 1 — 1979

30. Știind că $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Să se calculeze produsul

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon^k).$$

Admitere — Fac. de matematică, 1987

31. Dacă $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, diferite de 1, să se arate că

$$\sum_{\substack{l=1,2,\ldots n-2 \\ k=2,\ldots n-1 \\ l<k}} \frac{z_l z_k}{(1 - z_l)(1 - z_k)} = \frac{C_n^3}{n}.$$

I. Condrea

32. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sînt rădăcinile diferite de 1 ale ecuației $z^n - 1 = 0$, atunci

$$S = \sum_{\substack{k_1=1,n-l-1 \\ k_2=2,3,\ldots n-l \\ \cdot \\ \cdot \\ k_l=l,l+1,\ldots n-1 \\ k_1<k_2\ldots<k_l \\ l<n}} \frac{z_{k_1} z_{k_2} \ldots z_{k_l}}{(1 - z_{k_1})(1 - z_{k_2}) \ldots (1 - z_{k_l})} = \frac{C_n^{l+1}}{n}.$$

G.M. 1979

33. Fie $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Să se calculeze

$$\prod_{i=0}^{n-1} P(\varepsilon_i),$$ unde ε_i sînt rădăcinile de ordinul n ale unității.

34. Fie $p > 2$ un număr prim și $z \in \mathbf{C}$,

$$z = \cos\frac{2\pi}{p} + i \sin\frac{2\pi}{p}.$$

Să se determine numerele raționale $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{p-2}$, astfel încît

$$\frac{1}{1-z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_{p-2} z^{p-2}.$$

Etapa finală — Tîrgoviște, 1987

35. Fie $n > 2$ un număr natural și $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, astfel încît $z^n = 1$.

1) Să se arate că $|1 - z| > \frac{2}{n-1}$.

2) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, k nedivizibil cu n are loc inegalitatea: $\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n-1}$.

Etapa județeană, 1987

36. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = 0$.

b) $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots (-1)^n z^n = 0$.

37. Să se rezolve ecuația

$$z^{n-1} = \bar{z},\ n \in \mathbf{N}.$$

38. Să se rezolve ecuația

$$z^{n+m} = \frac{1}{\bar{z}^n},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

39. Să se rezolve ecuația

$$z^n = |z|^m.$$

40. Să se rezolve ecuația

$$(z + u)^n - (z + \bar{u})^n = 0,\ u \in \mathbf{C}$$

și să se arate că rădăcinile sînt reale.

41. Să se rezolve ecuația

$$z^n = \bar{z}|z|,\ n \in \mathbf{N}.$$

Gheorghe Andrei

42. Să se rezolve ecuația

$$z^n = i\bar{z},\ n \in \mathbf{N}^*,$$

43. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + \alpha)(z^n - i) = (1 - \alpha)(iz^n + 1),\quad \alpha \in \mathbf{R} - \{\pm 1\}.$$

44. Să se arate că orice soluție a ecuației:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = nz^n$$ are modulul mai mic decît 1.

45. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ rădăcinile complexe diferite de -1 ale ecuației: $z^{2n+1} + 1 = 0$. Să se arate că:

$$(1 - z_1)(1 - z_2) \ldots (1 - z_{2n}) = 1.$$

46. Fie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}$ rădăcinile de ordinul n ale unității.
Să se arate că:

$$\varepsilon_0^p + \varepsilon_1^p + \ldots + \varepsilon_{n-1}^p = \begin{cases} n \text{ dacă } p = mn, \\ 0 \text{ dacă } p \neq mn, \quad m \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

47. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ sînt rădăcinile de ordin $2n + 1$ ale unității, diferite de 1, să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - \bar{z}_k}{1 + z_k} = 2n + 1.$$

I. Candrea

48. Dacă $az^2 + bz + c = 0$ este o ecuație cu coeficienți complecși nenuli, atunci rădăcinile ei se află în discul închis, $|z| \leqslant \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{b}\right|$.

49. Să se arate că dacă $|p| + |q| < 1$, atunci $|z_0| < 1$; z_0 fiind o rădăcină a ecuației $z^2 + pz + q = 0$, $p, q \in \mathbf{C}$.

Bogdan Enescu — Concursul Spiru Haret, 1986

50. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$ cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$.
Să se arate că: 1) Dacă $|f(\mathrm{i})| < 1$, atunci ecuația nu are rădăcini reale.
2) Dacă $|f(\varepsilon)| < 1$, atunci $f(\varepsilon) = 0$,
(ε rădăcina cubică complexă a unității).

Gheorghe Andrei

51. Fie ecuația $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Să se arate că dacă $|f(\mathrm{i})| < 1$, atunci ecuația are o singură rădăcină reală, (în legătură cu problema 50).

52. Să se determine soluțiile de modul unu care satisfac ecuațiile.

a) $1 + \bar{z} + z^2 + \bar{z}^3 + \ldots + z^{2n} + \bar{z}^{2n+1} = 0$.

b) $1 - \bar{z} + z^2 - \bar{z}^3 + \ldots + z^{2n} - \bar{z}^{2n+1} = 0$.

Gheorghe Andrei

53. Fie ecuația $(z + \mathrm{i})^n + (z - \mathrm{i})^n = z^n$, $n \geqslant 3$.
Să se arate că ecuația are toate rădăcinile reale.

54. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$.
Să se arate că dacă $|a\bar{a} - c\bar{c}| = |\bar{a}b - \bar{b}c|$ și $|a| \neq |c|$, atunci ecuația are o rădăcină de modul 1.

Gheorghe Andrei

55. Să se rezolve ecuația:

$$z^n = |z|^2, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Probă de verificare, Constanța, 1990

§ 3. APLICAȚII ÎN TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

1. Se dau numerele complexe

$$z_1 = \sin\alpha - \cos\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$$
$$z_2 = \sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se determine n, natural, astfel încît $(z_1 z_2)^n \in \mathbf{R}$.
Dar pentru $(z_1 z_2)^n \in \mathbf{R}_+^*$?

Institutul Politehnic Buc. 1978

2. Dacă numerele α, β, γ verifică relațiile

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \text{ atunci}$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma}{3},$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma}{3}.$$

3. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$, astfel încît $\sin x + \sin y + \sin z = 0$,
$\cos x + \cos y + \cos z = 0$.

Să se arate că: $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ și
$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

Olimpiada Anglia, 1969

4. Fie $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Să se arate că:

$$\cos n\alpha = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n} \text{ și } \sin n\alpha = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}.$$

5. Să se calculeze $A = \cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

6. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $\sin x + \sin y + \sin z = \cos x + \cos y + \cos z = 0$. Să se demonstreze că

$$\sin 2^n x + \sin 2^n y + \sin 2^n z = \cos 2^n x + \cos 2^n y + \cos 2^n z = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Liviu Vlaicu, Marcel Chiriță, R.M.T., nr. 2/1986

7. Să se calculeze suma

$$S = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

8. Să se calculeze suma:

$$1 + \frac{\cos x}{\cos^1 x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x} \text{ (pentru } \cos x \neq 0 \text{ și } \sin x \neq 0).$$

Concurs Bulgaria, 1978

9. Să se arate că dacă $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} z^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z^k} = \frac{2\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

10. Să se calculeze suma:

$$S = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2 nx,$$

$$(\forall)\ x \in \mathbf{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbf{Z}.$$

11. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

12. Să se calculeze produsul:

$$P = \left(1+\frac{1+i}{2}\right)\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right].$$

13. Se dă polinomul:

$$P_n(z) = (2n+iz)^{2n} + (2n-iz)^{2n},\quad n \in \mathbf{N}^*.$$

1) Să se rezolve ecuația: $P_n(z) = 0$.

2) Să se deducă de aici că:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4n}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4n}\ldots\operatorname{tg}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n} = 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Gazeta matematică, 1979

14. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, afixele vîrfurilor unui triunghi. Să se arate că triunghiul este echilateral dacă și numai dacă afixul centrului de greutate verifică ecuația:

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}=0.$$

Gheorghe Andrei, Etapa locală — Constanța, 1989

15. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor unui triunghi ABC și G centrul de greutate al triunghiului. Să se arate că:

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

16. 1) Dacă z_1, z_2 sînt afixele a două puncte distincte A și B, atunci M aparține segmentului închis $[AB]$ dacă și numai dacă există

$$\alpha, \beta \in [0,1] \text{ cu } \alpha+\beta=1 \text{ astfel încît } z_M = \alpha z_A + \beta z_B. \qquad (1)$$

2) Dacă z_A, z_B, z_C sînt afixele vîrfurilor unui triunghi oarecare ABC, atunci punctul M se află în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC, dacă și numai dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ cu $\alpha+\beta+\gamma=1$ astfel încît

$$z_M = \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C.$$

17. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor unui triunghi ABC raportat la un sistem de axe de coordonate cu originea în centrul O al cercului circumscris triunghiului.
Să se arate că afixul ortocentrului H al triunghiului ABC este

$$z_H = z_A + z_B + z_C.$$

18. Fie $z_A\, z_B, z_C$ afixele vîrfurilor unui triunghi ABC cu laturile

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c.$$

Să se arate că afixul centrului cercului înscris al triunghiului ABC este:

$$z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}.$$

19. Dacă z_A, z_B, z_C sînt afixele vîrfurilor unui triunghi oarecare ABC, z'_A, z'_B, z'_C afixele mijloacelor laturilor BC, AC și AB, iar z''_A, z''_B, z''_C afixele punctelor de intersecție a dreptelor AA', BB', CC' cu cercul circumscris triunghiului ABC, atunci au loc relațiile:

$$1)\ \frac{m_a^2}{z_A - z'_A} + \frac{m_b^2}{z_B - z'_B} + \frac{m_c^2}{z_C - z'_C} = 0,$$

$$\frac{1}{z_G - z''_A} + \frac{1}{z_G - z''_B} + \frac{1}{z_G - z''_C} = 0, \text{ unde}$$

m_a, m_b, m_c sînt lungimile medianelor, $z_G \to$ afixul centrului de greutate.

Gheorghe Andrei — prelucrare

20. Dacă z_A, z_B, z_C sînt afixele vîrfurilor unui triunghi oarecare ABC și $P \in \text{int}\,(ABC)$, astfel încît $\sigma[PBC] = S_a$, $\sigma[PAC] = S_b$, $\sigma[PAB] = S_c$, atunci

$$z_P = \frac{S_a Z_A + S_b Z_B + S_c Z_C}{S_a + S_b + S_c} \text{ este afixul lui P.}$$

21. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor unui triunghi ABC.

Să se arate că

$$\sigma[ABC] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix} = \frac{\Delta i}{4}$$

22. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor unui triunghi ABC și z_0 afixul centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că:

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix}}$$

23. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor unui triunghi ABC avînd ortocentrul H. Să se arate că afixul ortocentrului z_H este dat de relația.

$$z_H = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \\ z_A^2 & z_B^2 & z_C^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix}}.$$

Gh. Andrei relucrare

24. a) Să se arate că $\frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_a}{h_a}$.

L. Panaitopol

b) Să se afle poziția celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral afixele a două vîrfuri fiind $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$.

25. Se dau punctele A și B de afixe $a = 1 + i$ și $b = \sqrt{3} + 1 + 2i$. Să se determine afixele punctelor M astfel încît

$$m(\widehat{BAM}) = \frac{\pi}{4} \text{ și } AB = AM.$$

Admitere I.P. 1987

26. Arătați că există triunghiuri echilaterale ale căror vîrfuri aparțin la trei drepte paralele date.

Gheorghe Ivan

27. Fie d_1 și d_2 două drepte perpendiculare și A un punct ce aparține planului determinat de cele două drepte. Arătați că există două puncte B și C ce aparțin dreptelor date, astfel încît A, B, C să fie vîrfurile unui triunghi echilateral.

28. Fie z_1, z_2, z_3 afixele vîrfurilor unui triunghi și z_0 afixul centrului de greutate al triunghiului. Să se arate că triunghiul este echilateral dacă și numai dacă au loc relațiile

$$z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)\varepsilon \text{ și } z_3 - z_0 = (z_1 - z_0)\varepsilon^2$$
$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

29. Punctele A, B, C au afixele z_1, z_2, z_3. Să se arate că dacă $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 \in \mathbf{R}$, atunci A, B, C sînt colineare.

Etapa locală — Prahova 1986

30. Vîrfurile triunghiului echilateral ABC au afixele z_1, z_2, z_3. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ cu vîrfurile de afixe $z_1z_2 - z_3^2$, $z_2z_3 - z_2$, $z_1z_3 - z_2^2$ este echilateral sau se reduce la un punct.

Georgeta Burlea

31. Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă și numai dacă are loc o relație de forma:

$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, (unde ε este o rădăcină complexă de ordinul trei, diferită de 1, a unității).

32. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte.
Să se arate că:

1) z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă și numai dacă are loc egalitatea:

$$z_1 - z_2 + \varepsilon(z_2 - z_3) + \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0.$$

2) z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $z_1 + z_2 + kz_3$, $z_2 + z_3 + kz_1$, $z_1 + z_3 + kz_2$, sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral, ($k \neq 1$), (ε o răd. cubică complexă a unității).

Gheorghe Andrei

33. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, astfel ca

$$z_3 - z_2 + \varepsilon(z_1 - z_3) + \varepsilon^2(z_2 - z_1) = 0, \text{ unde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Atunci numerele $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 + z_3 - z_2$, $z_2 + z_3 - z_1$ sînt afixele unui triunghi echilateral.

Viorica Frecuș, G.M. Nr. 3/1987

34. Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral, dacă și numai dacă numerele $z_1 \pm z_2$, $z_2 \pm z_3$, $z_3 \pm z_1$ sînt afixele unui triunghi echilateral.

Andrei Gheorghe

35. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. Să se arate că

1) Dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$ sau z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

2) Dacă z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral atunci ele satisfac relația de mai sus.

36. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ distincte.
Să se arate că

1) z_1, z_2, z_3, sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$. (1)

2) z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$. (2)

37. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sînt afixele unui triunghi echilateral sau $z_1 = z_2 = z_3$ dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

38. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z_1| + |z_2| + |z_3| = r > 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

39. Arătați că numerele distincte z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2$,
$(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2$.

40. Fie $a, b \in (0, +\infty)$ și $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z_1| = |z_2| = a$, $|z_3| = b$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că:

1) Imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi isoscel.

2) Ce relație trebuie să existe între a și b, astfel încît triunghiul să fie echilateral?

3) Dar dreptunghic?

Etapa locală — Alba Iulia, 1988

41. Dacă z_1, z_2, z_3 sînt trei numere complexe astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ și $z_2 \neq z_3$, să se demonstreze că

$$\min |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|}{2r}.$$

Dorin Andrica — Etapa pe țară, 1983

42. Fie z_i, z_i', $i = 1, 2, 3, 4$, respectiv rădăcinile ecuațiilor:

$$z^4 - z^2 + 1 = 0 \text{ și } z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Să se arate că z_i respectiv z_i', $i = 1, 2, 3, 4$ sînt afixele vîrfurilor unui dreptunghi. Cele două dreptunghiuri au vîrfuri comune?

Gh. Ivan

43. Dacă $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, distincte, astfel încît:
$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ și $z_1 + iz_2 = z_3 + iz_4$, atunci există $z \in \mathbf{C}$, care să verifice egalitățile:

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|?$$

44. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, astfel încît $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ și

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|.$$

Să se arate că z_1, z_2, z_3, z_4 sînt afixele unui dreptunghi sau coincid două cîte două.

45. Fie z_i afixele punctelor M_i, $z_i \neq z_j$ pentru $i \neq j$.
Dacă $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + z_5 - z_6 = 0$, atunci triunghiurile $M_1M_3M_5$ și $M_2M_4M_6$ au același centru de greutate.
(Hexagoanele $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ cu această proprietate se numesc hexagoane Pompeiu).

Etapa locală — Alba Iulia 1988

46. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$. Să se arate că:

1) Triunghiurile DGH și EFI au același centru de greutate cu al triunghiului ABC.

2) Să se arate că cu segmentele CD, AH, BG, se poate construi un triunghi.

47. Unind mijloacele laturilor unui hexagon convex din două în două, obținem două triunghiuri.
Să se arate că centrele lor de greutate coincid.

Admitere: facultatea de matem. 1984

48. Fie hexagonul $A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'$ înscris într-un cerc și

$$m(\widehat{A_1A_1'}) = m(\widehat{A_2A_2'}) = m(\widehat{A_3A_3'}) = \frac{\pi}{3}.$$

Demonstrați că mijloacele coardelor $A_1'A_2$, $A_2'A_3$, $A_3'A_1$, sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Kvant

49. În cercul de rază 1 este înscris poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_{3n}$.
Să se demonstreze că $A_1A_{n+2} = A_1A_n + A_1A_2$.

Matematica v'școle Nr. 1/1981

50. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris într-un cerc de centru O şi raza 1. Dacă M este un punct situat pe semidreapta (OA_1 în exteriorul poligonului, să se demonstreze inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{MA_k} > \frac{n}{OM}.$$

Mihai Piticari

51. Într-un cerc de rază 1 se înscrie un poligon regulat $A_1A_2 \ldots A_n$. Demonstraţi că dacă P este un punct de pe cercul circumscris poligonului, atunci:

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2 = 2n.$$

52. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}^*$ şi o dreaptă (d) care trece prin originea axelor de coordonate, atunci:

1) Imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots z_n$ se află într-unul din semiplanele determinate de dreapta (d) dacă şi numai dacă imaginile geometrice ale inverselor lor se află în acelaşi plan.

2) În condiţiile punctului 1)

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0 \text{ şi } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

53. Fie $z_0 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$, $z_k = 1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^{k+1} + \ldots \varepsilon^{n-1}$ pentru $k = 1, 2, \ldots n-2$ şi $z_{n-1} = 1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{n-2}$, unde

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \text{ fixat, } n \geqslant 3.$$

Să se arate că $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sînt afixele vîrfurilor unui poligon regulat înscris în cercul de centru O şi rază 1.

Gh. Ivan

54. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n numere complexe astfel că afixele lor să reprezinte vîrfurile unui poligon regulat.
Să se demonstreze că dacă numărul complex z are proprietatea că

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots + \frac{1}{z - z_n} = 0,$$

atunci afixul punctului z se află în interiorul poligonului.

Matematica v'şcole

55. Să se arate că toate vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, situat în planul complex, sînt date de formula:

$$z_k = a\varepsilon^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

unde ε este rădăcina primitivă de ordinul n a unităţii, iar a şi b numere complexe.

56. Fie $z_1, z_2, \ldots z_{2n} \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{2n}|$ şi $\arg z_1 \leqslant \arg z_2 \leqslant \ldots \leqslant \arg z_{2n} \leqslant \pi$.
Să se arate că $|z_1 + z_{2n}| \leqslant |z_2 + z_{2n-1}| \leqslant \ldots \leqslant |z_n + z_{n-1}|$.

Dorin Andrica, RMT Nr. 1/1984

57. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ distincte două cîte două cu proprietatea că: $\min \{|z_i - z_j|, i, j \in \{1, 2, \ldots n\} \geqslant \max \{|z_i|, i = \overline{1, n}\}$. Determinați valoarea maximă a lui n.

Concurs „Traian Lalescu", 1986

58. Fie $P_m(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$ un polinom cu coeficienți complecși. Arătați că media aritmetică a valorilor polinomului în vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi ($m > n$) este egală cu valoarea polinomului în centrul poligonului.

59. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sînt afixele vîrfurilor unui poligon plan convex, orientat direct, atunci aria sa

$$\sigma[A_1 A_2 \ldots A_n] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1}$$

(cu convenția $A_{n+1} = A_1$)

Aplicația 1

Punctele $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $\ldots$ $A_n(a_n)$ sînt colineare $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1} = 0$,

unde $A_{n+1} = A_1$; $a_{n+1} = a_1$.

Aplicația 2

Fie a, b, c afixele punctelor A, B, C atunci:

a) Dacă A, B, C sînt necolineare $\Rightarrow \sigma[ABC] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$

b) A, B, C colineare $\Leftrightarrow \operatorname{Im} (\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a) = 0$.

60. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie S și $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$, astfel încît:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QA} = k.$$

Să se determine suma ariilor triunghiurilor APB, BQC, CMD și DNA.

Olimpiada U.R.S.S. — 1977

61. Laturile neparalele AD și BC ale patrulaterului $ABCD$ se intersectează în O. Fie P și S mijloacele diagonalelor BD și AC. Să se demonstreze că $\sigma[ABCD] = 4\sigma[OSP]$.

62. Imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil dacă și numai dacă

$$\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} \in \mathbf{R}.$$

63. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, distincte. Să se arate că:

a) z_1, z_2, z_3, z_4 sînt afixele vîrfurilor unui dreptunghi dacă și numai dacă $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ și $\operatorname{Re} \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = 0 \quad \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = ai\right)$.

b) z_1, z_2, z_3, z_4 sînt afixele vîrfurilor unui pătrat dacă și numai dacă $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ și $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \pm i$.

64. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, diferite, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$.

Să se arate că: 1) numărul $\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ este real și pozitiv.

2) $|z_1 - z_2|\,|z_3 - z_4| + |z_1 - z_4|\,|z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|\,|z_2 - z_4|$.

Teorema lui Ptolemeu

§ 4. FUNCȚII

1. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, astfel încît $ad - bc = 1$.

1) Să se arate că $(\forall)\ z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, are loc egalitatea:

$$\operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

2) Fie $P = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Să se arate că funcția $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ este o bijecție a mulțimii P pe ea însăși.

Gazeta matematică, 1980

2. Fie A de afix $(-i)$ și funcția $f: \mathbf{C} \setminus \{-i\} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \frac{2 - iz}{z + i}$.

a) Să se determine punctele fixe ale lui f;

b) Găsiți imaginea prin funcția f a cercului $C(A, 1)$.

Ioan Crișan,

3. Fie $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = 2z + |z|$. Să se arate că f este bijectivă și să se determine inversa sa.

Maria Elena Panaitopol, G.M. nr. 2/1983

4. Considerăm $z_0 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ și definim funcția: $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

$$f(a + ib) = a + bz_0,\ (\forall)\ a, b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se demonstreze că f este bijectivă;

b) Să se determine valorile lui z_0 pentru care $f = f^{-1}$.

Concursul rezolvitorilor G.M. 1987

5. Fie ω o rădăcină a ecuației $z^n + 1 = 0$ și $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ o funcție cu proprietatea că există $\lambda \in \mathbf{C}^*$, astfel încît

$$f(z) \cdot f(\omega z) \ldots f(\omega^{n-1} z) = \lambda,\ (\forall)\ z \in \mathbf{C}.$$

Să se demonstreze că $f(z) = f(-z)$, $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$.

Titu Andreescu, G.M. 1980

6. Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{1983} + i \sin \frac{2\pi}{1983}$. Să se determine toate funcțiile $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, astfel încît $f(z) + f(\varepsilon z) = 2|z|$, $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$.

Attila Furdek, G.M. 1982

7. Fie $f \in \mathbf{R}[x]$ şi se consideră funcţia polinomială $\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

a) $\tilde{f}$ este o funcţie pară $\Leftrightarrow \tilde{f}(i\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.

b) $\tilde{f}$ este funcţie impară $\Leftrightarrow \tilde{f}(i\mathbf{R}) \subset i\mathbf{R}$.

(S-a notat $i\mathbf{R} = \{ix \mid x \in \mathbf{R}\}$.)

Marcel Ţena, G.M. nr. 6/1987

8. Se consideră polinomul $P(z) = z^2 + az + b$, de variabilă complexă cu $a, b \in \mathbf{C}$. Dacă $|P(z)| = 1$ $(\forall)$ $z \in \mathbf{C}$, cu $|z| = 1$.

atunci, $P(z) = z^2$.

9. Să se determine toate polinoamele P, cu coeficienţi complecşi pentru care $P(z) + P(-z) = z^2 - P(iz)$, $(\forall)$ $z \in \mathbf{C}$.

Gh. Eckstein

10. Să se determine mulţimea

$$M = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \in \mathbf{N}^* \text{ şi } (\exists)\ n \in \mathbf{N} \text{ cu } z^n - z - n = 0\}.$$

G.M. nr. 4/1986

11. Mulţimea $M \subset \mathbf{C}$ are proprietatea (P), dacă $(\forall)$ $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$ şi $x \cdot y \in M$.

a) Demonstraţi că dacă $\mathbf{A}$ are proprietatea (P) şi $\mathbf{R} \subset A \subset \mathbf{C}$, atunci $A = \mathbf{R}$ sau $A = \mathbf{C}$;

b) Daţi exemplu de două mulţimi B şi C care au proprietatea (P), dar care verifică încluziunile stricte

$$\mathbf{Z} \subset B \subset \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subset C \subset \mathbf{R}.$$

Marcel Ţena, Concursul G.M. — 1986

12. Fie $A \subseteq \mathbf{C}$ cu proprietăţile:

a) A conţine orice număr $z \in \mathbf{C}$ cu $|z| = 1$.

b) Pentru orice $z_1, z_2 \in A$ avem $z_1 + z_2 \in A$.

Să se demonstreze că $A = \mathbf{C}$.

Marcel Ţena, Etapa pe ţară 1986 G.M. nr. 7/1986

13. Se consideră funcţia $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$, $f(n) = a_{n+1}$ care îndeplineşte condiţiile: 1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \ldots$

2) există numere naturale n, $n > 2$, astfel încît $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = (a_1 + a_2 + \ldots a_n)^2$.

Să se arate că funcţia f este periodică.

14. Fie $f = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $n > 1$ şi $a_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Să se arate că pentru orice rădăcină z_0 a lui f are loc inegalitatea:

$$\frac{\pi}{n} < \arg z_0 < 2\pi - \frac{\pi}{n}.$$

Laurenţiu Panaitopol

SOLUȚII

PROGRESII

4. Din $a_p - a_q = (p - q)r$ rezultă $r = -1$ și apoi
$$a_m = a_p + (m - p)r = q - m + p.$$

6. Dacă lungimile laturile unui triunghi dreptunghic sînt în progresie aritmetică, atunci notîndu-le cu $b - r$, b, $b + r$, trebuie ca $(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2$ de unde $b = 4r$ și deci ele vor fi $3r$, $4r$, $5r$, cu r întreg pozitiv arbitrar.

7. $2\cos 2\beta = \cos 2\alpha + \cos 2\gamma \Leftrightarrow \cos 2\beta - \cos 2\alpha = \cos 2\gamma - \cos 2\beta \Leftrightarrow$
$2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = 2\sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) \Leftrightarrow$
$$\sin\gamma \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \sin(\beta - \gamma).$$
Dezvoltînd aici $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\beta - \gamma)$ și împărțind cu $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, egalitatea este echivalentă cu: $\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta$.

8. Soluție analoagă problemei precedente.

9. Dacă rădăcinile ecuației sînt în progresie aritmetică, fie ele $\alpha - \gamma$, α, $\alpha + \gamma$, atunci din formulele lui Viète
$$3\alpha = -\frac{b}{a},\quad 3\alpha^2 - \gamma^2 = \frac{c}{a},\quad \alpha(\alpha^2 - r^2) = -\frac{d}{a}$$
prin eliminarea lui α și r obținem condiția din enunț.

Reciproc: fie $2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0$ și x, y, z rădăcinile ecuației. De aici și din $x + y + z = -\frac{b}{a}$, $xy + xz + yz = \frac{c}{a}$, $xyz = -\frac{d}{a}$ rezultă
$$2(x + y + z)^3 - 9(x + y + z)(xy + xz + yz) + 27xyz = 0. \qquad (1)$$
Notînd cu $f(x, y, z)$ membrul stîng din (1) avem identitatea:
$$-f(x, y, z) = (x + y - 2z)(x + z - 2y)(y + z - 2x). \qquad (2)$$
Într-adevăr, punînd $x + y + z = S$, avem
$$(x + y - 2z)(x + z - 2y)(y + z - 2x) = (S - 3x)(S - 3y)(S - 3z)$$
$$S^3 - 3(x + y + z)S^2 + 9(xy + xz + yz)S - 27xyz = -f(x, y, z).$$
Din (1) și (2) rezultă $(x + y - 2z)(x + z - 2y)(y + z - 2x) = 0$ iar de aici deducem că rădăcinile x, y, z sînt în progresie aritmetică.

10. Proprietatea rezultă din problema precedentă, ținînd seamă de faptul că dacă numerele x, y, z sînt în progresie armonică, inversele lor sînt în progresie aritmetică.

11. Dacă rădăcinile sînt în progresie aritmetică, fie ele
$$u - 3r,\ u - r,\ u + r,\ u + 3r,$$
atunci din prima dintre formulele lui Viète rezultă $u = 0$ și rădăcinile se scriu $-3r, -r, r, 3r$ și ecuația se mai scrie $(x^2 - r^2)(x^2 - 9r^2) = 0$ sau $x^4 - 10r^2x^2 + 9r^4 = 0$.

Deducem $\frac{b}{a} = -10r^2$, $\frac{c}{a} = 9r^4$ de unde $9b^2 = 100\,ac$.

Reciproc. Presupunem că avem $9b^2 = 100ac$. Să arătăm că rădăcinile sînt în progresie aritmetică. Observăm că dacă α este rădăcină, atunci $-\alpha$ e rădăcină. Fie $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ rădăcinile ecuației. Din formulele lui Viète avem $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$, $\alpha^2\beta^2 = \frac{c}{a}$, iar de aici și din $9b^2 = 100\,ac$ rezultă $9(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 100\alpha^2\beta^2$ sau $9\alpha^4 - 81\alpha^2\beta^2 + 9\beta^4 = 0$. Dacă $\beta = 0$, atunci $\alpha = 0$ și rădăcinile sînt 0, 0, 0, 0. Dacă $\beta \neq 0$ avem $9\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 - 81\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 9 = 0$, de unde $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{9}$ sau 9. De unde $\beta = \pm 3\alpha$ sau $\alpha = \pm 3\beta$ și rădăcinile se scriu $-3\alpha, -\alpha, \alpha, 3\alpha$ sau $-3\beta, -\beta, \beta, 3\beta$ și sînt deci în progresie aritmetică.

15. Răspuns: $S_{pq} = \frac{1}{2}(pq + 1)$.

16. Notînd cu r rația progresiei, avem $a_{p+k} = a_k + pr$. Dînd lui k valorile $1, 2, \ldots, q$ și adunînd relațiile obținute, avem

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+q} = a_1 + a_2 + \ldots + a_q + pqr,$$

de unde

$$S_{p+q} = S_p + S_q + pqr = q + p + pqr.$$

Din expresia sumelor S_p și S_q deducem

$$r = -2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \text{ și deci } S_{p+q} = -(p + q).$$

17. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ și $m > n$. Din $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ rezultă $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m = 0$ pe care o mai scriem:

$$a_m + a_{m-1} + \ldots + a_{n+1} = 0$$

și prin adunarea lor

$$(a_m + a_{n+1}) + (a_{m-1} + a_{n+2}) + \ldots + (a_{n+1} + a_m) = 0 \quad (*)$$

și cum

$$a_m + a_{n+1} = a_{m-1} + a_{n+2} = \ldots = a_{n+1} + a_m = a_1 + a_{m+n}$$

din (*) rezultă

$$(a_1 + a_{m+n})(m - n) = 0 \Rightarrow a_1 + a_{m+n} = 0,$$

$$\text{deci } S_{m+n} = \frac{a_1 + a_{m+n}}{2}(m + n) = 0.$$

18. Fie $a, a + r, \ldots, a + (n - 1)r$ cele n numere întregi în progresie aritmetică. Notăm cu s_1 și s_3 suma lor și respectiv a cuburilor lor, și ținînd seama de formulele cunoscute ale sumei primelor n numere naturale, ale pătratelor și cuburilor lor, avem

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1}(a + kr) = \frac{1}{2}n\,(2a + (n - 1)r),$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n-1}(a + kr)^3 = \sum_{k=0}^{n-1}(a^3 + 3a^2kr + 3ak^2r^2 + k^3r^3) =$$

$$= na^3 + \frac{3}{2}a^2rn(n - 1) + \frac{1}{2}ar^2n(n - 1)(2n - 1) + \frac{1}{4}r^3(n - 1)^2n^2.$$

Grupînd aceşti termeni astfel ca să punem în evidenţă ca factor pe s_1, găsim: $S_3 = \frac{1}{2} n(2a + (n-1)r)(a^2 + ar(n-1) + \frac{1}{2} n(n-1)r^2)$ de unde $s_1 | s_3$.

În particular, rezultă de aici că suma cuburilor a n numere naturale consecutive se divide prin suma lor.

19. Fie r raţia progresiei. Avem $x = x_1 + (k-1)r$ şi din prima egalitate

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_n) \cdot n = a, \quad nx_1 + \frac{1}{2} rn(n-1) = a. \tag{1}$$

Pe de altă parte, $x_k^2 = x_1^2 + 2x_1 r(k-1) + r^2(k-1)^2$ şi din a doua relaţie din enunţ, avem $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = nx_1^2 + 2x_1 r \sum_{k=1}^{n} (k-1) + r^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = b^2$ şi deci

$$nx_1^2 + x_1 rn(n-1) + \frac{1}{6} r^2(n-1)n(2n-1) = b^2. \tag{2}$$

Din (1), prin ridicare la pătrat şi împărţire cu n, avem:

$$nx_1^2 + x_1 rn(n-1) + \frac{1}{4} r^2 n(n-1)^2 = \frac{a^2}{n}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) avem $\frac{r^2 n(n^2-1)}{12} = \frac{b^2 n - a^2}{n}$ de unde:

$$r = \pm \frac{2\sqrt{3(b^2 n - a^2)}}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

Din (1) rezultă apoi x_1 şi progresia este determinată.

20. Termenii generali ai progresiilor date au forma:

$$a_m = 1 + 4(m-1), \quad b_n = 4 + 11(n-1).$$

Termenii comuni conduc la ecuaţia $4m + 4 = 11n$ de unde rezultă $n = 4p$ şi $m = 11p - 1$ cu $p \in \mathbf{N}^*$.

Termenii comuni a_m şi b_n corespund rangurilor

$m = 10, 21, 32, \ldots, 11p - 1,$

$n = 4, 8, 12, \ldots, 4p$ şi sînt a_m $37, 81, 125, \ldots, 37 + 44(p-1)$.

21. Necesitatea este clasică.

Suficienţa: avem $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_{n+1})(n+1) - \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$ de unde $(n-1)a_{n+1} = na_n - a_1$ pentru orice n. (1)

Avem deci şi $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - a_1$. (2)

Din (1) şi (2), prin scădere, deducem $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$.

22. Presupunem că şirul dat este progresie aritmetică cu raţia r.

Avem $a_{k+1} - a_k = r$ şi $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Reciproc: dacă şirul dat satisface relaţia din enunţ, vom arăta că $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, $n = 2, 3, \ldots$

Din ipoteză avem şi:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}},$$ de unde prin scădere

$$\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_1a_n} \quad \text{sau} \quad a_1 = na_n - (n-1)\,a_{n+1} \text{ şi analog,}$$

$$a_1 = (n-1)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_n,$$

de unde

$$(n-1)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_n = na_n - (n-1)\,a_{n+1}$$

$$(n-1)(a_{n-1} + a_{n+1}) = 2(n-1)\,a_n,\ n > 2 \Rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n.$$

Altfel: prin inducţie.

23. Presupunem că şirul dat este o progresie aritmetică.

Atunci $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$ pentru $0 < k < n$. Din egalităţile

$$\frac{1}{a_{k+1}a_{n-k}} = \frac{1}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{n-k}}\right)$$

adunate pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ obţinem pe cea din enunţ.

Reciproc, presupunem că şirul dat satisface relaţia din enunţ pentru orice $n \geqslant 3$. Să arătăm că formează o progresie aritmetică, prin inducţie după n. Pentru $n = 3$ se verifică. Proprietatea, o presupunem adevărată pentru n. Să o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem:

$$\frac{1}{a_1a_{n+1}} + \frac{1}{a_2a_n} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}a_1} = \frac{2}{a_1 + a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad (1)$$

şi cum $\frac{1}{a_1a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_1} = \frac{2}{a_1 + a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Relaţia (1) este echivalentă cu

$$\frac{1}{a_2a_n} + \frac{1}{a_3a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_na_2} = \frac{2}{a_1 + a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right). \quad (2)$$

Numerele $a_2, a_3, \ldots, a_n$ fiind în progresie aritmetică verifică o relaţie de forma celei din enunţ, adică

$$\frac{1}{a_2a_n} + \frac{1}{a_3a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_na_2} = \frac{2}{a_2 + a_n}\left(\frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right). \quad (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă că $a_1 + a_{n+1} = a_2 + a_n$, iar de aici şi din ipoteza de inducţie rezultă că $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ formează o progresie aritmetică.

24. Necesitatea: presupunem că şirul este o progresie aritmetică, să arătăm că pentru orice $n \geqslant 2$ are loc relaţia din enunţ. Prin inducţie pentru $n = 2$ se verifică. Presupunem relaţia adevărată pentru n termeni consecutivi ai şirului.

$$a_1 - C_{n-1}^1 a_2 + C_{n-1}^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}a_n = 0$$

$$a_2 - C_{n-1}^1 a_3 - \ldots + (-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-2}a_n + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}a_{n+1} = 0.$$

Scăzîndu-le şi ţinînd seama că $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$, avem

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0.$$

Alte soluții analoage problemei următoare!

Suficiență: presupunem relația adevărată pentru orice $n \geqslant 2$. Să demonstrăm că șirul este o progresie aritmetică.

Prin inducție: se verifică pentru $n = 2$. Prespunem că din relația pentru n termeni consecutivi rezultă că aceștia sînt în progresie aritmetică. Din

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0$$

$$a_1 - C_{n-1}^1 a_2 + C_{n-1}^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} a_n = 0.$$

Prin scădere avem:

$$a_2 - C_{n-1}^1 a_3 + C_{n-1}^2 a_4 - \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} a_{n+1} = 0$$

și din ipoteza de inducție, rezultă că numerele $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică.

25. Pentru necesitate să observăm că din

$2S_{n+1} = (a_1 + a_{n+1})(n+1) = (a_{k+1} + a_{n-k+1})(n+1)$ rezultă

$a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_n - \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{n-k+1}$, iar de aici identitatea din enunț.

Altă metodă. Din $a_{k+1} = a_1 + kr$, rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = a_1 \sum_{k=0}^{n} C_n + r \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k = a_1 2^n + r 2^{n-1} n = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}.$$

Altă metodă, prin inducție.

Pentru suficiență, analog problemei precedente.

26. Fie d rația progresiei și unul din termenii săi $a = m^2$ cu m întreg. Atunci numărul $(m + kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2mk + k^2d)$ este de asemenea un termen al progresiei pntru orice număr natural k. Rezultă astfel că progresia conține o infinitate de pătrate perfecte.

Observație. Se poate generaliza, înlocuind pătratul cu o putere naturală oarecare.

27. Dacă r este rația progresiei, iar a_n un termen oarecare al ei, atunci $a_{m+n} = a_n + mr$. Pentru $a_n > 1$ și $m = a_n$, avem

$$a_{m+n} = a_n + a_n r = a_n (1 + r),$$

de unde rezultă că a_{m+n} nu este prim fiindcă $r \geqslant 1$.

28. Fie $a, a + r, a + 2r, \ldots, a + (n-1)r$ cei n termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Există atunci printre ei, doi termeni care dau același rest la împărțirea prin n.

Deci diferența lor se divide prin n.

Fie $a + ir = nq_1 + \rho$, $a + jr = nq^2 + \rho$ cu $0 \leqslant i < j \leqslant n - 1$, de unde $(i - j)r = n(q_1 - q_2)$, dar $|i - j| < n$, de unde $(r, n) \neq 1$.

30. Avem $\sqrt{b} - \sqrt{a} = mr$, $\sqrt{c} - \sqrt{a} = nr$, unde $m, n \in \mathbf{N}$, iar r rația progresiei. Eliminînd r, găsim $m\sqrt{c} - n\sqrt{b} = (m - n)\sqrt{a}$ (1)

$$m^2 c + n^2 b - 2mn\sqrt{bc} = (m - n)^2 a. \quad (2)$$

Din (2) rezultă $b = B^2 d$, $c = C^2 d$, unde $d = (b, c)$ iar B și C naturale care înlocuite în (1) dau $(mC - nB)\sqrt{d} = (m - n)\sqrt{a}$. (3)

Dar (3), după eventuale simplificări, se scrie $A\sqrt{d} = D\sqrt{a}$ cu $(A, D) = 1$ sau $A^2d = D^2a$. Din $(a, b, c) = 1$ rezultă $(a, d) = 1$ și cum $(A, D) = 1$, din $A^2d = D^2a$ rezultă $a = A^2$, $d = D^2$ (deoarece din $a \mid A^2$, $A^2 \mid a$ și A, a naturale avem $a = A^2$). Deci a, b, c pătrate perfecte.

31. Fie $E = \frac{a_1a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2a_4 \dots a_{2n}}$. Vom scrie pătratul lui E mai întîi sub forma:

$$E^2 = a_1 \frac{a_1a_3}{a_2^2} \cdot \frac{a_3a_5}{a_4^2} \dots \frac{a_{2n-1}a_{2n+1}}{a_{2n}^2} \cdot \frac{1}{a_{2n+1}}$$ și cum $\frac{a_{i-1}a_{i+1}}{a_i^2} = \frac{(a_i - r)(a_i + r)}{a_i^2} =$

$= \frac{a_i^2 - r^2}{a_i^2} < 1$, pentru orice i, rezultă $E_2 < \frac{a_1}{a_{2n+1}}$ de unde partea dreaptă a inegalității.

Apoi

$$E^2 = a_0 \frac{a_1^2}{a_0a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_2a_4} \dots \frac{a_{2n-1}^2}{a_{2n-2}a_{2n}} \cdot \frac{1}{a_{2n}}$$ și cum $\frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} > 1$, pentru $(\forall)i$, rezultă $E^2 > \frac{a_0}{a_{2n}}$, de unde partea stîngă a inegalității.

32. Indicație: se înmulțesc inegalitățile obținute din

$$\frac{a_k}{a_{k+3}} < \frac{a_{k+1}}{a_{k+4}} \text{ pentru } k = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1.$$

33. Cum $a_{2k+1} - a_{2k} = r$, termenul general al sumei se mai scrie

$$\frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{2k}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}(a_{2k+1} - a_{2k})}{a_2a_4 \dots a_{2k}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1a_3 \dots a_{2k+1}}{a_2a_4 \dots a_{2k}} - \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{22-2}}.$$

Dînd lui k valorile $2, 3, \dots, n$ și sumînd identitățile obținute împreună cu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{r}\left(\frac{a_1a_3}{a_2} - a_1\right)$ obținem pe cea din enunț.

Avem apoi $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \frac{(2n+1)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2} = \frac{(2n+1)!}{(2^n \cdot n!)^2}$.

34. Rezultă din identitățile:

$$\frac{a_1a_3 \dots a_{2k+1}}{a_2a_4 \dots a_{2k}} = \frac{1}{3r}\left(\frac{a_1a_3 \dots a_{2k+3}}{a_2a_4 \dots a_{2k}} - \frac{a_1a_3 \dots a_{2k+1}}{a_2a_4 \dots a_{2k-2}}\right) \cdot \frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{2k+2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{2k-2}} - \frac{a_1a_3 \dots a_{2k+1}}{a_2a_4 \dots a_{2k+2}}\right).$$

35. Indicație: se utilizează identitățile:

$$\frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_4a_6 \dots a_{2k+2}} = \frac{a_2}{r}\left(\frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{2k}} - \frac{a_1a_3 \dots a_{2k+1}}{a_2a_4 \dots a_{2k+2}}\right)$$

pentru $k = 1, 2, \dots, n$.

36. Fie x primul termen și r rația progresiei, $x > 0$, $r > 0$. Avem $xr = a$, deci $r = a/x$. Apoi

$$S = \frac{2x + (n-1)r}{2} n = nx + \frac{an(n-1)}{2x}$$

şi pentru ca s să fie minimă, cum produsul termenilor săi nx şi $\frac{an(n-1)}{2x}$ este constant, trebuie ca $nx = \frac{a(n-1)}{2x}$, de unde $x = \sqrt{\frac{a(n-1)}{2}}$, $r = \sqrt{\frac{2a}{n-1}}$ (cu a şi n date). Termenii progresiei sînt întregi dacă x şi r sînt întregi. Deci $n-1 \mid 2a$ şi $2a = (n-1)k^2$ cu k întreg arbitrar pentru n impar şi k par pentru n par.

37. a) $b_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (a_1 + (i-1)r)}{k} = a_1 + \frac{n(k-1)}{2}$, deci $b_{k+1} - b_k = \frac{r}{2} \Rightarrow$ şirul b_k este o progresie aritmetică.

b) $b_k = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1}} = \sqrt[k]{a_1^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}} = a_1 q^{\frac{k-1}{2}} \Rightarrow \frac{b_{k+1}}{b_k} = \sqrt{q} \Rightarrow$ şirul b_k este o progresie geometrică cu raţia $\sqrt{q}$.

41. Condiţia rezultă din identitatea

$$xyz(x^3 + y^3 + z^3) - (x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3) = (x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy).$$

42. Fie $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$. Avem $a^2 + d^2 - (b^2 + c^2) = a^2(1 + q^6 - (q^2 + q^4)) = a^2(1 + q^2)(1 - q^2)^2 \geqslant 0$.

45. fie progresia $\therefore b_1, b_2, \ldots$ şi $m > n$.
Din $b_1 b_2 \ldots b_m = b_1 \cdot b_2 \ldots b_n$ rezultă $b_{n+1} \ldots b_m = 1$, deci şi $(b_{n+1} \ldots b_m)^2 = (b_{n+1}b_m)(b_{n+2}b_{m-1}) \ldots (b_m b_{n+1}) = (b_1 b_{m+n}) \cdot (b_1 b_{m+n}) \ldots (b_1 b_{m+n}) = (b_1 b_{m+n})^{m-n} = 1 \Rightarrow b_1 b_{m+n} = 1$. Dar $(b_1 b_2 \ldots b_{m+n})^2 = (b_1 b_{m+n})(b_2 b_{m+n-1}) \ldots (b_{m+n} b_1) = (b_1 b_{m+n})^{m+n} = 1 \Rightarrow b_1 b_2 \ldots b_{m+n} = 1$.

46. Notînd cu q raţia progresiei, avem: $b_{m+k} = b_k q^m$. Dînd lui k valorile $1, 2, \ldots, n$ şi înmulţind relaţiile obţinute, avem $b_{m+1} b_{m+2} \ldots b_{m+n} = b_1 b_2 \ldots b_n q^{mn}$, de unde

$$P_{m+n} = mnq^{mn}.$$

Din $n = P_m = b_1 b_2 \ldots b_m = b_1^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}$ Avem deci $n^{\frac{1}{m}} = b_1 q^{\frac{m-1}{2}}$ şi $m^{\frac{1}{n}} = b_1 q^{\frac{n-1}{2}}$ de unde $q = \left(n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{-\frac{1}{m}}\right)^{\frac{2}{m-n}}$. Înlocuind acest q în expresia lui P_{m+n}, obţinem

$$P_{m+n} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m+n}{m-n}}$$

47. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
Pentru $n = kq$ avem $2^n - 1 = (2^k)^q - 1 = \mathfrak{M}(2^k - 1)$.

48. Avem $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.
Deci

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)^2 - a^n = \left(\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\right)^2 - a^n = \frac{(a^{n+1} - 1)^2 - a^n(a-1)^2}{(a-1)^2} =$$
$$= \frac{(a^n - 1)(a^{n+2} - 1)}{(a-1)^2} = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n+1}).$$

50. Avem: $b = aq$, $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow aq^n = (q - 1)S + a$.

Fie S' suma pătratelor termenilor. Avem

$$S' = a^2\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a\frac{q^n + 1}{q + 1} = S\frac{(q - 1)S + 2a}{q + 1}$$

$$S' = \frac{(b - a)S + 2a^2}{a + b}.$$

51. Răspuns: $\frac{(a + z)S - 2az}{2S - (a + z)} \cdot S$.

53. Fie q raţia progresiei geometrice. Atunci

$$S_1 = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1},\quad S_2 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)},\quad P = \left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n.$$

Dar $\frac{S_1}{S_2} = a_1^2 q^{n-1}$ aşa că $P = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

55. În primele $p - 1$ linii se află $\frac{1}{2}p(p - 1)$ termeni; cei p termeni din linia de rang p sînt:

$$aq^k, aq^{k+1}, \ldots, aq^{k+p-1}, \text{ unde } k = \frac{1}{2}p(p - 1),$$

suma lor este $aq^k(1 + q + \ldots + q^{p-1}) = \frac{aq^k(q^p - 1)}{q - 1}$, iar produsul lor

$$a^p q^{k+(k+1)+\ldots+(k+p-1)} = a^p q^{\frac{1}{2}p(p^2-1)}$$

56. Fie a cel mai mic număr şi $\rho \in \mathbf{N}$ raţia, $\rho \geqslant 2$.

Avem $n^2 \leqslant a \leqslant (n + 1)^2$

$n^2 \leqslant a\rho^2 \leqslant (n + 1)^2$.

Dar $a\rho^2 \geqslant n^2\rho^2 \geqslant (2n)^2 \geqslant (n + 1)^2$. Atunci trebuie neapărat ca $\rho = 2$ şi $n = t \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leqslant a \leqslant 4 \\ 1 \leqslant 4a \leqslant 4 \Rightarrow a \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1,$$

cele trei numere sînt 1, 2, 4.

57. Răspuns: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}$.

58. Din $P_{n+1} = P_n b_{n+1}$, adică $(b_1 b_{n+1})^{n+1} = (b_1 b_n)^n b_{n+1}^2$, cum $b_1 \neq 0$, rezultă $b_1 b_{n+1}^{n-1} = b_n^n$ pentru orice n. Avem deci şi $b_1 b_n^{n-2} = b_{n-1}^{n-1}$. Eliminînd b_1, între ultimele două egalităţi rezultă $b_n^2 = b_{n-1}b_n$ pentru $n > 1$, deci şirul formează o progresie geometrică.

Reciproca acestei proprietăţi este clasică.

Observaţie: condiţia din enunţ „pozitive" poate fi înlocuită cu „$b_1 \neq 0$". Justificare!

59. Se va utiliza identitatea lui Lagrange.

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1})^2 = (x_1y_2 - x_2y_1]^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + \ldots + (x_{n-2}y_{n-1} - x_{n-1}y_{n-2})^2$ punînd aici $x_i = a_i$, $y_i = a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

60. Necesitatea: Fie α, αq, αq^2 rădăcinile ecuației.

Conform formulelor lui Viète, avem $\alpha'(1 + q + q^2) = -\frac{b}{a}$, $\alpha^2(q + q^2 + q^3) = \frac{c}{a}$, $\alpha^3 q^3 = -\frac{d}{a}$.

Deducem $-\frac{b}{a}(\alpha q) = \frac{c}{a}$, $(\alpha q)^3 = -\frac{d}{a}$ de unde $ac^3 = b^3 d$.

Suficiența. Fie $ac^3 = b^3 d$ și x, y, z rădăcinile ecuației:

Avem $x + y + z = -\frac{b}{a}$, $xy + xz + yz = \frac{c}{a}$, $xyz = -\frac{d}{a}$ și cum $\left(\frac{c}{a}\right)^3 = \left(\frac{-b}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{-d}{a}\right)$ rezultă $(xy + xz + yz)^3 = xyz\,(x + y + z)^3$.

Dar $(xy + xz + yz)^3 - xyz(x + y + z)^3 = (xy - z^2)(xz - y^2)(yz - x^2)$ identitate care se poate stabili ținînd seama că

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

de unde rezultă proprietatea din enunț.

61. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + r}{b_{k+1}} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + r}{b_k} =$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_n}{b_n}\right) + \frac{r}{q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} S_n - \frac{a_n}{q b_n} + \frac{r}{b_1 q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{q^{k-1}},$$

de unde $\left(1 - \frac{1}{q}\right) S_n = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_n}{q b_n} + \frac{r}{b_1 q} \frac{1 - \frac{1}{q^{n-1}}}{1 - \frac{1}{q}}$,

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) S_n = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 + (n-1)r}{b_1 q^n} + \frac{r}{b_1} \frac{q^{n-1} - 1}{(q-1)q^{n-1}}.$$

Se calculează analog S'_n sau se deduce din S_n.

62. Fie r și q rațiile celor două progresii. Dacă $r = 0 \Rightarrow q = 1$ $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$. Fie $r \neq 0$, $q \neq 1$.
Din $a_n = b_n$, $a_1 = b_1 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n = \frac{1}{2}(a_1 + a_1 q^{n-1})n$$

$\sum_{i=1}^{n} b_i = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$ inegalitatea de demonstrat revine la

$1 + q^{n-1})n \geqslant 2(1 + q + \ldots + q^{n-1})$ care rezultă din $1 + q^{n-1} \geqslant q^k + q^{n-k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (echivalentă cu $(1 - q^k)(1 - q^{n-k-1}) \geqslant 0$) prin sumare.

63. Fie r rația progresiei aritmetice și q rația progresiei geometrice. Dacă $r = 0$ proprietatea din enunț e banală. În caz contrar rezultă $r > 0$. Prin ipoteză $a_1 = b_1$ și $a_2 = a_1 + r = b_2 = a_1 q$, de unde $a_1 = \frac{r}{q-1} > 0$ și deci $q > 1$. Avem apoi: $a_n = a_1 + (n-1)r = a_1(1 + (n-1)(q-1))$; $b_n = a_1 q^{n-1}$. Inegalitatea $b_n \geqslant a_n$ echivalentă cu $q^{n-1} \geqslant 1 + (n-1)(q-1)$ este adevărată conform inegalității lui Bernoulli.

64. Fie r şi q raţiile celor două progresii ($q > 0$), a primul lor termen comun şi $a + kr = aq^k$, $a + nr = aq^n$ cu $k < n$. Rezultă $n - k = nq^n - kq^n$, care se mai scrie

$$\frac{1}{k}(q^k - 1) = \frac{1}{n}(q^n - 1). \tag{1}$$

Din (1) rezultă $q = 1$. Într-adevăr dacă $q = 1 + \alpha$ cu $\alpha > 0$, atunci

$$\frac{1}{k}[(1+\alpha)^k - 1] = \frac{1}{n}[(1+\alpha)^n - 1] \text{ sau}$$

$$\frac{1}{k}\left(1 + k\alpha + \frac{k(k-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^k - 1\right) = \frac{1}{n}\left(1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots - 1\right).$$

Pentru $\alpha > 0$, contradicţie, fiindcă

$$\frac{1}{k}C_k^{i+1} < \frac{1}{n}C_n^{i+1} \Leftrightarrow C_{k-1}^i < C_{n-1}^i, \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dacă $q < 1$, atunci $\frac{1}{q} > 1$, fie $q = \frac{1}{q_1}$, $q_1 > 1$; $n - k = i$ şi (1) devine:

$$\frac{1}{i}(q_1^i - 1) = \frac{1}{n}(q_1^n - 1),$$

adică o relaţie de aceeaşi formă cu (1) cu $q_1 > 1$, care nu este posibilă. Deci $q = 1$ şi atunci $r = 0$ şi cele două progresii coincid.

65. Prin reducere la absurd. Presupunem că ar exista o progresie geometrică infinită: $\div\!\!\div$ $a, aq, aq^2, \ldots, a > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$ din care putem extrage progresia aritmetică infinită:

$$\div\, aq^{k_1}, \; aq^{k_2}, \ldots, aq^{k_n}, \; aq^{k_{n+1}}, \ldots$$

renotată, din comoditate de scriere

$$\div\, a_1, a_2, \ldots a_n, \; a_{n+1}, \ldots$$

Avem

$$a_1 + a_{n+1} = a_2 + a_n \quad (\forall)n. \tag{1}$$

Dacă $q < 1$, pentru $n \to \infty$ din $q^n \to 0$ rezultă $a_n \to 0$ şi din (1) rezultă $a_1 = a_2$, de unde $q = 1$, contradicţie. Dacă $q > 1$, cum $k_{n+1} \geqslant k_n + 1$ avem $q^{k_{n+1}} \geqslant q^{k_n} \cdot q$ deci $a_{n+1} \geqslant a_n \cdot q$ şi deci $a_1 + a_n \cdot q \leqslant a_2 + a_n$ sau $\frac{a_1}{a_n} + q \leqslant \frac{a_2}{a_n} + 1$, iar de aici pentru $n \to \infty$, cum $a_n \to \infty$, rezultă $q \leqslant 1$, contradicţie, ceea ce încheie demonstraţia.

66. Fie $\frac{a}{d}$ raţional; putem considera a şi d de acelaşi semn. Atunci $\frac{a}{d} = \frac{s}{r}$ cu s, r naturale. Deoarece $r \mid (1 + r)^m - 1$ pentru orice m natural, rezultă că numărul

$$r_m = \frac{a(1+r)^m - a}{d} = \frac{s[(1+r)^m - 1]}{r} \text{ este natural.}$$

Prin urmare, fiecare termen al progresiei geometrice

$$a(1 + r)^m, \; m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

are forma $a(1+r)^m = a + r_m d$, adică aparţine progresiei aritmetice. De exemplu progresia aritmetică $\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{5} n$, $n = 0,1,2 \ldots$ unde

$\frac{a}{d} = \frac{1}{3\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{5}{6}$ conţine progresia geometrică

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}(6+1)^m = \frac{7^m}{3\sqrt{2}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Reciproc, fie progresia aritmetică $a, a+d, \ldots, a+nd, \ldots$ $d \neq 0$, care conţine o progresie geometrică. Fie trei termeni ai ei $a+kd$, $a+ld$, $a+md$, $k < l < m$ care să formeze trei termeni consecutivi ai progresiei geometrice.

Atunci

$$(a+ld)^2 = (a+kd)(a+md) \text{ de unde}$$
$$(1) \quad a(2l-k-m) = d(km-l^2).$$

Vom arăta că $2l - k - m \neq 0$. Într-adevăr, în caz contrar am avea $km - l^2 = 0$ ceea ce ar implica

$$(k-m)^2 = (k+m)^2 - 4km = 4l^2 - 4l^2 = 0$$

şi prin urmare $k = m$ ceea ce este imposibil.

Din relaţia (1) avem: $\frac{a}{d} = \frac{km-l^2}{2l-k-m}$, de unde rezultă:

ca $\frac{a}{2}$ este număr raţional.

Kvant, 1/1974; M202

67. Se arată prin inducţie că: $a_{2n+1} = \frac{1}{a_1}[na_2 - (n-1)a_1]^2$ şi

$$a_{2n} = \frac{1}{a_1}[na_2 - (n-1)a_1][(n-1)a_2 - (n-2)a_1]$$

G.M. 3/1976

68 Fie $a - r, a, a + r$ numerele căutate. Din $(a-r)(a+r) = x^2$, adică $a^2 = r^2 + x^2$ rezultă că a şi r trebuie să fie numere pitagoreice, deci

$$\text{I} \begin{cases} a = m(p^2+q^2) \\ r = m(p^2-q^2) \end{cases} \quad \text{sau II} \begin{cases} a = m(p^2+q^2) \\ r = 2mpq, \end{cases}$$

cu p şi q prime între ele, de parităţi diferite şi m întreg arbitrar. În primul caz, cum $a(a-r) = 2m^2q^2(p^2+q^2)$ şi

$a(a+r) = 2m^2p^2(p^2+q^2)$ trebuie să fie pătrate perfecte, ar trebui ca $2(p^2+q^2) = y^2$, cu y par, ceea ce este imposibil, deoarece p şi q au parităţi diferite.

În al doilea caz, cum $a(a-r) = (p^2+q^2)(p-q)^2$ şi

$a(a+r) = (p^2+q^2)(p+q)^2$ trebuie să fie pătrate perfecte, trebuie ca $p^2+q^2 = s^2$ cu s întreg, deci p şi q (care sînt primi între ei) trebuie să fie numere pitagoreice, deci $p = u^2 - v^2$, $q = 2uv$ (sau $p = 2uv$, $q = u^2 - v^2$) cu u, v primi între ei, de parităţi diferite, iar $s = u^2 + v^2$ şi cum

$a = m(p^2+q^2) = ms^2$ rezultă

$a = m(u^2+v^2)$; $r = 4muv(u^2-v^2)$ şi deci progresiile

$n(u^2-v^2-2uv)^2$, $m(u^2+v^2)^2$, $m(u^2-v^2+2uv)^2$ cu m întreg arbitrar, u şi v întregi primi între ei de parităţi diferite.

69. Avem: $\sqrt[a_k]{\frac{a_k}{a_{k-1}}} = \left(1 + \frac{r}{a_{k-1}}\right)^{\frac{1}{a_k}} < 1 + \frac{r}{a_{k-1}\,a_k} =$

$$= 1 + \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}\,a_k} = 1 + \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

De aici avem:

$$S_n < n - 1 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \leqslant n - \frac{1}{a_n} < n.$$

Dar avem evident şi $S_n > n - 1$, aşa că $[S_n] = n - 1$.

G.M. 9/1988

70. Fie m, mq, mq^2, mq^3 rădăcinile ecuaţiei. Avem $m^4q^6 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2q^3 = \pm 1$. Fie mai întîi $m^2q^3 = 1$ deci $q = \frac{1}{m^{2/3}}$ şi rădăcinile ecuaţiei devin: m, $\sqrt[3]{m}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$, $\frac{1}{m}$. Fie:

$$\sqrt[3]{m} + \frac{1}{\sqrt[3]{m}} = u,\ m + \frac{1}{m} = v \Rightarrow u^3 - 3u = v.$$

De aici şi din relaţiile lui Viète, $u + v = -\frac{b}{a}$, $uv + 2 = \frac{c}{a}$ eliminînd succesiv pe v şi u, avem: $u^3 - 2u = -\frac{b}{a}$ şi $-u^2 - \frac{b}{a}u + 2 = \frac{c}{a}$.

Înmulţind ultima egalitate cu u şi adunîndu-le, avem

$$-\frac{b}{a}u^2 - \frac{c}{a}u = -\frac{b}{a} \text{ şi deci } \begin{cases} au^2 + bu + c - 2a = 0, \\ bu^2 + cu - b = 0, \end{cases}$$

iar de aici $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c - 2a \\ c & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c - 2a \\ b & -b \end{vmatrix}^2$ adică:

$$(ac - b^2)(-b^2 - c^2 + 2ac) = (ab - bc)^2.$$

Fie $m^2q^3 = -1$, deci $q = -\frac{1}{m^{2/3}}$ şi rădăcinile devin:

m, $-\sqrt[3]{m}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$, $-\frac{1}{m}$. Dar m rădăcină implică $\frac{1}{m}$ rădăcină (pentru că ecuaţia este reciprocă). Rezultă $m = \pm 1$ şi rădăcinile sînt: 1, −1, 1, −1 iar ecuaţia devine $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. Reciproc. Fie

$$(b^2 - ac)(b^2 + c^2 - 2ac) = b^2(a - c)^2 \qquad (1)$$

şi α, β rădăcini ale ecuaţiei. Atunci şi $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ sînt rădăcini. Fie

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = u,\ \beta + \frac{1}{\beta} = v.$$

Din formulele lui Viète avem:

$$u + v = -\frac{b}{a}.$$

$$uv + 2 = \frac{c}{a}$$

şi deci u, v sînt rădăcini ale ecuaţiei: $at^2 + bt + c - 2a = 0$. (*)

Din (1) rezultă că ecuaţiile

$$\begin{cases} at^2 + bt + c - 2a = 0 \\ bt^2 + ct - b = 0 \end{cases}$$

au o rădăcină comună, fie aceasta de exemplu u (analog dacă v ar fi rădăcina comună).

Avem deci:

$au^2 + bu + c - 2a = 0$, $bu^2 + cu - b = 0$. Din ultima $-\frac{b}{a}u^2 - \frac{c}{a}u + \frac{b}{a} = 0$ rezultă:

$(u + v)u^2 - (uv + 2)u - u - v = 0$ de unde $u^3 - 3u = v \Rightarrow \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} =$

$= \beta + \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha^3 - \beta = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha^3} \Rightarrow (\alpha^3 - \beta)(\alpha^3\beta - 1) = 0$ deci $\beta = \alpha^3$ sau $\beta = \frac{1}{\alpha^3}$ adică rădăcinile α, $\frac{1}{\alpha}$, α^3, $\frac{1}{\alpha^3}$ sînt în progresie geometrică.

71. Notăm prin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ primii termeni ai progresiilor în care se împarte şirul numerelor naturale şi prin $d_1, d_2, \ldots, d_n$ raţiile lor. Produsul acestor raţii se află într-una din progresii, deci există i cu $1 \leqslant i \leqslant n$ şi un anume k, astfel încît

$$d_1 \cdot d_2 \ldots d_n = a_i + kd_i.$$

Din această egalitate rezultă că d_i divide pe a_i.

Kvant 1/1985

72. Progresiile vor fi de forma $a_i + kr_i$ unde evident $a_i \leqslant r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Fie $P = r_1 r_2 \ldots r_n$.

Acum să numărăm termenii cuprinşi între 1 şi P (inclusiv 1 şi P) ai unei astfel de progresii.

Pentru progresia $a_i + kr_i$ aceştia sînt

$$a_i, a_i + r_i, a_i + 2r_i, \ldots, a_i + \left(\frac{P}{r_i} - 1\right)r_i \qquad (1)$$

fiindcă

$$a_i + r_i\left(\frac{P}{r_i} - 1\right) \leqslant P \text{ iar } a_i + r_i\frac{P}{r_i} > P.$$

Termenii din şirul (1) sînt în număr de $\frac{P}{r_i}$. Dar cum cele n progresii formează o partiţie a lui $\mathbf{N}^*$, deci şi a numerelor naturale nenule $\leqslant P$ rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P}{r_i} = P, \text{ de unde } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = 1.$$

G.M. 0: 577

INDUCȚIA MATEMATICĂ

5. Prin inducție. a) Fie $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Avem $8 | A_1$. Din $A_{n+1} = 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5A_n - 4(3^{n-1} + 1)$ și ipoteza de inducție $8 | A_n$ rezultă $8 | A_{n+1}$.
b) și c) analog cu a).

6. Din $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ și $x + y = u + v$ rezultă $xy = uv$. Apoi prin inducție. Se verifică pentru $n = 1$ și $n = 2$. O presupunem adevărată pentru orice număr $\leqslant n$. Să o demonstrăm pentru $n + 1$. Din $(x^n + y^n)(x + y) = (u^n + v^n)(u + v)$, avem

$$x^{n+1} + y^{n+1} + xy\,(x^{n-1} + y^{n-1}) = u^{n+1} + y^{n+1} + uv\,(u^{n-1} + v^{n-1})$$

iar de aici rezulta pentru $n + 1$.
Observație: se poate demonstra și direct!

7. Prin inducție după k. Pentru $k = 1$ avem $8 | m^2 - 1$ care se verifică fiindcă m impar, $m = 2t + 1$ și $m^2 - 1 = (2t + 1)^2 - 1 = 4t(t + 1)$ care se divide cu 8. O presupunem adevărată pentru k. Să o demonstrăm pentru $k + 1$. Avem $m^{2^{k+1}} - 1 = (m^{2^k})^2 - 1 = (m^{2^k} - 1)(m^{2^k} + 1)$, de unde rezultă afirmația.
Observație: se poate demonstra și cu binomul lui Newton.

8. Avem $(m + n)! = m!(m + 1)(m + 2) \ldots (m + n)$ și cum produsul $(m + 1)(m + 2) \ldots (m + n)$ a n numere naturale consecutive se divide cu $n!$ rezultă $m!n! | (m + n)!$
Altfel: deoarece $C_{m+n}^n = \dfrac{(m + n)!}{m!n!}$, iar C_{m+n}^n este număr natural, rezultă, $m!n! | (m + n)!$
Generalizarea prin inducție după k.

9. Se demonstrează prin inducție după $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

10. Proprietatea rezultă prin inducție după n, din identitatea:

$$a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2} = (a + b + c)(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) - (ab + bc + ac)(a^n + b^n + c^n) + abc(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1})$$

valabilă pentru orice $n \geqslant 1$.

11. Prin inducție: pentru $n = 1$, evident; pentru $n = 2$, din identitatea

$$a^2 - b^2 + c^2 = (a - b + c)(a + b + c) - 2ac.$$

Apoi din identitatea

$$a^{n+1} - b^{n+1} + c^{n+1} = (a + b + c)(a^n - b^n + c^n) - (ab + bc + ac)(a^{n-1} - b^{n-1} + c^{n-1}) + abc\,(a^{n-2} - b^{n-2} + c^{n-2}).$$

Caz particular (Dan Voiculescu, G.M. 7/1965).
Dacă $b^2 = a^2 + c^2$, atunci $a - b + c | ac$ (verificare!) și deci are loc proprietatea.

12. Pentru trecerea de la n la $n+1$, avem

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) \leqslant 2^n(a^n+b^n)(a+b) \leqslant 2^{n+1}(a^{n+1}+b^{n+1})$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu

$$(a^n - b^n)(a-b) \geqslant 0.$$

13. Prin inducție, de exemplu.

14. Avem $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$.

Se arată prin inducție că $a_n < 2$ oricare ar fi n. Deci $2 - a_n > 0$, $2 - a_{n-1} > 0$. Inegalitatea din enunț după înlocuirea lui a_n cu $\sqrt{2+a_{n-1}}$ și efectuarea calculelor este echivalentă cu $2 - a_{n-1} > 0$.

15. Avem

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < \frac{2n+1}{n+1} < 2.$$

Cealaltă parte a inegalității prin inducție.

16. Avem: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Pentru cealaltă parte a inegalității, o încercare de demonstrație prin inducție, ca în exercițiul precedent, rămîne infructuasă. Putem demonstra prin inducție însă inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{3n}$$

din care rezultă cea din text. Observăm astfel că uneori e mai ușor să demonstrăm prin inducție o inegalitate „mai tare" decît cea propusă.

17. Partea stîngă a inegalității, prin inducție ținînd seamă că $C_{2n+2}^{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} C_{2n}^n$. Încercarea de demonstrare a părții drepte prin inducție nu conduce la rezultat. Putem demonstra prin inducție însă inegalitatea $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$, din care rezultă cea din enunț, dovedindu-se astfel că uneori este mai ușor să se demonstreze prin inducție o inegalitate mai strînsă decît una mai slabă!

18. Prin inducție. (Pentru $n=2$, avem $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{a_1 a_2}$ echivalentă cu $a_1 a_2^2 - a_1 a_2 - a_2 + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a_2 - 1)(a_1 a_2 - 1) \geqslant 0$, evidentă ($a_1, a_2 \geqslant 1$).

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} + \frac{1}{1+a_{n+1}} \overset{i.i}{\leqslant} \frac{n-1}{2} + \frac{1}{1+\prod_{i=1} a_i} + \frac{1}{1+a_{n+1}} \overset{P(2)}{\leqslant} \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n+1} a_i}.$$

19. Prin inducție. Pentru $n=1$, $n=2$ evident.

Pentru $n=3$, avem $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_3}{x_2} - \frac{x_1}{x_3} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)}{x_1 x_2 x_3} \geqslant 0$. (1)

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n-1$, adică

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_1}\geqslant\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}+\frac{x_1}{x_{n-1}} \tag{2}$$

să o demonstrăm pentru n. Punînd în (1) x_{n-1} în loc de x_2 şi x_n în loc de x_3, obţinem:

$$\frac{x_1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant\frac{x_{n-1}}{x_1}+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă inegalitatea din enunţ.

20. Inducţie după n. Pentru $n=2$, inegalitatea este echivalentă cu $\cos(a_1-a_2)\leqslant 1$. Pentru trecerea de la n la $n+1$ se ţine seama că

$$\sin x_{n+1}\leqslant 1 \text{ şi } \cos x_{n+1}\leqslant 1.$$

21. Vom demonstra, mai mult

$$|\sin(x_1+\ldots+x_n)|<\sin x_1+\ldots+\sin x_n.$$

Prin inducţie după n. Pentru $n=2$, avem

$$\begin{aligned}|\sin(x_1+x_2|&=|\sin x_1\cos x_2+\sin x_2\cos x_1|\leqslant\\&\leqslant|\sin x_1||\cos x_2|+|\sin x_2||\cos x_1|\leqslant|\sin x_1|+\\&+|\sin x_2)=\sin x_1+\sin x_2 \text{ (fiindcă } x_1, x_2\in(0,\pi)).\end{aligned}$$

Presupunem inegalitatea adevărată pentru n. Să o demonstrăm pentru $n+1$. Avem:

$$\begin{aligned}&|\sin(x_1+\ldots+x_n+x_{n+1})|=|\sin(x_1+\ldots+x_n)\cos x_{n+1}+\\&+\cos(x_1+\ldots+x_n)\sin x_{n+1}|\leqslant|\sin(x_1+\ldots+x_n)||\cos x_{n+1}|+\\&+|\cos(x_1+\ldots+x_n)||\sin x_{n+1}|\leqslant|\sin(x_1+\ldots+x_n)|+\\&+|\sin x_{n+1}|<\sin x_1+\ldots+\sin x_n+\sin x_{n+1}.\end{aligned}$$

22. 1) În trecerea de la n la $n+1$ trebuie arătat că $\sin(a_n-a_{n+1})+\sin(a_{n+1}-a_1)-\sin(a_n-a_1)\leqslant 0$, echivalentă cu

$$\sin(x+y)\leqslant\sin x+\sin y \text{ cu } x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

A se vedea exerciţiul precedent.

23. Prin inducţie. Inegalitatea se verifică pentru numerele 1, 2, 3, 4. O presupunem adevărată pentru n. Să o demonstrăm pentru $n+4$. Din patru numere întregi consecutive unul (cel puţin) se divide cu 3 şi două sînt pare. Dacă $3|k$, atunci $\sigma(k)\geqslant 1+\frac{k}{3}+k$. Analog pentru $2|k$, aşa că

$$\sigma(n+1)+\sigma(n+2)+\sigma(n+3)+\sigma(n+4)\geqslant\frac{16n}{3}+16. \tag{1}$$

Din (1) şi folosind ipoteza de inducţie, avem

$$\sum_{k=1}^{n+4}\sigma(k)>\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)+\frac{16n}{3}+16>\frac{2}{3}n^2+\frac{16n}{3}+16>\frac{2}{3}(n+4)^2$$

şi deoarece este adevărată pentru 1, 2, 3, 4 rezultă adevărată pentru orice n.

24. prin inducţie.

25. La trecerea de la n la $n+1$ vom folosi egalitatea

$$(b_n-b_{n+1})S_n+b_{n+1}S_{n+1}=b_nS_n+b_{n+1}a_{n+1}$$

echivalentă cu egalitatea

$$\begin{aligned}&(b_n-b_{n+1})(a_1+\ldots+a_n)+b_{n+1}(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})=\\&=b_n(a_1+\ldots+a_n)+b_{n+1}a_{n+1} \text{ ce se verifică uşor.}\end{aligned}$$

26. Prin inducție: Din a) avem $f(2) = 2$ și apoi din b) luînd $m = 1$, $n = 2$, rezultă $f(1) = 1$. Presupunem egalitatea valabilă pentru toate valorile $\leqslant n - 1$. Să o demonstrăm pentru n.
Dacă n este prim, atunci $f(n) = n$. În caz contrar $n = ab$ și conform ipotezei de inducție avem $f(n) = f(ab) = f(a)f(b) = ab = n$.

27. Prin inducție. Din a) și c) pentru $m = 1$ și $n = 2$ rezultă $f(1) = 1$. Presupunem egalitatea adevărată pentru toate valorile $\leqslant n - 1$. Să o demonstrăm pentru n. Dacă n este par, $n = 2k$, din a) și din ipoteză avem $f(2k) = f(2)f(k) = 2k$, iar dacă n este impar, $n = 2k + 1$, avem pe de o parte $f(2k + 2) = f(2) \cdot f(k + 1) = 2(k + 1)$, iar pe de altă parte din b) cum $2k < 2k + 1 < 2k + 2$, avem

$$f(2k) < f(2k + 1) < f(2k + 2) \text{ sau } 2k < f(2k + 1) < 2k + 2,$$

de unde $f(2k + 1) = 2k + 1$.

28. Pentru $n = 1$, din ipoteză. Presupunem $f(k) = k$ pentru $k \leqslant n$. Să demonstrăm că $f(n + 1) = n + 1$. Avem:

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(n-1)f(n)} + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n)+1} \qquad (*)$$

Dar din ipoteza de inducție avem:

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \ldots + \frac{1}{f(n-1)f(n)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n},$$

iar de aici și din $(*)$, rezultă $\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nf(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, de unde

$$f(n + 1) = n + 1.$$

29. Vom demonstra, mai întîi, că

$$S_k = 2S_{k-1} + \mathfrak{M}2^k \quad \text{pentru } k = 2, 3, 4 \ldots \qquad (*)$$

Într-adevăr, fiindcă n este par rezultă că $(2^{k-1} + j)^n = \mathfrak{M}2^k + j^n$ și atunci $S_k = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^{k-1})^n + (2^{k-1} + 1)^n + (2^{k-1} + 2)^n + \ldots$
$\ldots + (2^{k-1} + 2^{k-1})^n = 2[1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^{k-1})^n] +$
$+ \mathfrak{M}2^k = 2S^{k-1} + \mathfrak{M}2^k$.
Din relația $(*)$, prin inducție, rezultă afirmația din enunț. Într-adevăr pentru $k = 1$ se verifică. O presupunem adevărată pentru k, adică presupunem că $S_k = 2^{k-1}m$ cu m impar. Să o demonstrăm pentru $k + 1$. Avem $S_{k+1} = 2S_k + \mathfrak{M}2^{k+1} = 2^k n + \mathfrak{M}2^{k+1} = 2^k \cdot M$ cu M impar.

30. Fie $a = 2^n$. Avem $P_{n+1} = (a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)(a^2 - 5^2) \ldots (a^2 - (2^n - 1)^2) \equiv P_n^2 \pmod{a^2}$ deci $(*)$ $P_{n+1} \equiv P_n^2 \pmod{2^{2n}}$.
Din această relație, rezultă prin inducție afirmația din enunț. Într-adevăr

$$P_3 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 13 \cdot 8 + 1 = 2^3 \cdot 13 + 1.$$

O presupunem adevărată pentru n, adică presupunem că:

$$P_n = 2^n m + 1 \text{ cu } m \text{ impar.}$$

Să o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem:

$$P_{n+1} = \mathfrak{M}2^{2n} + P_n^2 = \mathfrak{M}2^{2n} + (2^n m + 1)^2 = \mathfrak{M}2^{2n} + 2^{n+1}m + 1 =$$
$$= 2^{n+1}M + 1 \text{ cu } M \text{ impar.}$$

31. Prin inducție după n. Fie $A_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}p + \binom{n}{5}p^2 + \ldots$, $p = 4m + 1$.
Numărul A_1 se devide prin $2^{1-1} = 1$ și A_2 se devide prin $2^{2-1} = 2$.
Presupunem că 2^{k-1} divide pe A_k pentru $k < n$. După binomul lui Newton, urmează $A_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}p + \binom{n}{5}p^2 + \ldots = \frac{(1+\sqrt{p})^n - (1-\sqrt{p})^n}{2\sqrt{p}} =$
$= \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{p}} = \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(\alpha + \beta)}{2\sqrt{p}} - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{2\sqrt{p}}$, unde am notat $\alpha = 1 + \sqrt{p}$,
$\beta = 1 - \sqrt{p}$.
Se obține astfel formula de recurență $A_n = 2A_{n-1} + (p-1)A_{n-2} =$
$= 2A_{n-1} + 4mA_{n-2}$.
Prin ipoteza însă $2^{n-2} | A_{n-1}$ și $2^{n-3} | A_{n-2}$. Urmează că $2^{n-1} | A_n$.

32. Pentru a natural, prin inducție după a. Pentru $a = 0$ și $a = 1$ se verifică. Presupunem teorema adevărată pentru un număr natural oarecare a. Să o demonstrăm pentru $a + 1$. Din dezvoltarea binomului
$(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} a + 1$ și cum
$p | C_p^k$ pentru $k = 1, 2, \ldots, p-1$ rezultă că
$p | (a+1)^p - a^p - 1$, iar de aici și din ipoteza de inducție
$p | a^p - a$ rezultă că $p | (a+1)^p - (a+1)$.
Fie a întreg negativ. Pentru $p = 2$ avem evident $2 | a^2 - a = a(a-1)$. Dacă $p > 2$, deci impar, avem $(-a)^p = -a^p$ și cum
$p | (-a)^p - (-a) = -(a^p - a)$ rezultă $p | x^p - a$ și teorema este adevărată și pentru numere întregi negative.

33. Prin inducție după m. Fie $E(n, m)$ partea stîngă a egalității.
Pentru $m = 0$ se verifică, fiindcă $E(n, 0) = \left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{2}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n-1}{n}\right\} =$
$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}$.
Presupunem adevărat pentru m. Să o demonstrăm pentru $m + 1$.
$E(n, m+1) = \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+n}{n}\right\} = E(n, m)$
fiindcă $\left\{\frac{m+n}{n}\right\} = \left\{\frac{m}{n} + 1\right\} = \left\{\frac{m}{n}\right\}$.

G.M. 1/1988, 21325

34. Prin inducția după n. Pentru $n = 1$ se verifică.
Presupunem proprietatea adevărată pentru n. Să o demonstrăm pentru $n + 1$. Fie $a \leqslant (n+1)!$ Împărțim pe a la $n + 1$. Avem $a = d(n+1) + r$, unde $d \leqslant n!$, $r < n + 1$. Prin ipoteza de inducție $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ unde toți d_i sînt divizori distincți ai lui $n!$ și $k \leqslant n$. Atunci $a = d_1(n+1) + \ldots + d_k(n+1) + r$, unde numărul termenilor sumei nu depășește $n + 1$, fiecare din ei este divizor al lui $(n+1)!$ și toți sînt diferiți.

35. Vom demonstra, mai întîi, că orice număr natural $m \geqslant 7$ se poate reprezenta sub formă $a^2 + b^2 - c^2$ cu a, b, c naturale.
Într-adevăr, dacă m este par, $m = 2k$, avem $m = 1^2 + k^2 - (k-1)^2$, iar dacă m este impar, $m = 2k + 1$, avem $m = 2^2 + (k-1)^2 - (k-2)^2$.
Acum, demonstrarea enunțului prin inducție.

Pentru $n = 2$, luăm $m = 2 = 1^2 + 1^2$. Să presupunem că am găsit pentru un n dat un m cu proprietatea din enunț și să găsim pentru $n + 1$ un m' cu aceeași proprietate. Prespunem $m \geqslant 7$. Avem

$$m = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \ldots = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2.$$

Scriem pe m sub forma $m = a^2 + b^2 - c^2$ sau $m + c^2 = a^2 + b^2$ de unde

$$m' = m + c^2 = a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 + c^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 = \ldots = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 + c^2$$

și enunțul este demonstrat.

G.M. 4/1980

36. Ecuația $x + \frac{1}{x} = a$, cu $a \geqslant 2$, are rădăcinile

$$x_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4}) \geqslant 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4}) \leqslant 1.$$

Dacă $x + \frac{1}{x}$ este întreg, atunci $x^n + \frac{1}{x^n}$ este întreg pentru orice n întreg, cum rezultă prin inducție din identitatea

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Fie atunci $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$, deci $x + \frac{1}{x} = a$, $x \geqslant 1$, de unde $x^n + \frac{1}{x^n} = k$, k întreg. Prin urmare $A = x^n = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$.

37. Pentru $n = 1$ și 2 se verifică. Presupunem formula valabilă pentru $n - 1$ și n și să o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Dar $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$, așa că formula se verifică și pentru $n + 1$.

40. Avem $\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}u_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{u_{k-1}u_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{1+k}}\right) =$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = 2 - \frac{u_{n+2}}{u_n u_{n+1}}.$$

41. $A_k = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{k+m-1}$.
Vom arăta că $u_{k+m} < A_k < u_{k+m+1}$. Avem

$$u_{k+m} = u_{k+m-1} + u_{k+m-2} < u_{k+m-1} + u_{k+m-2} + \ldots + u_k = A_k.$$

Se demonstrează ușor prin inducție că

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$ astfel că

$$A_k = S_{k+m-1} - S_{k-1} = u_{k+m+1} - 1 - (u_{k+1} - 1) < u_{k+m+1}$$

ceea ce încheie demonstrația.

42. Prin inducție. Pentru $k = 1$, $1 = u_1$; pentru $k = 2$, $2 = u_3$. Presupunem propoziția adevărată pentru $0 < k \leqslant u_n$. Să o demonstrăm pentru $u_n < k \leqslant u_{n+1}$. Dacă presupunem $k - u_n > u_{n-1}$, obținem o contradicție fiindcă din $k > u_n + u_{n-1}$ rezultă $k > u_{n+1}$. Deci $0 < k - u_n \leqslant u_{n-1}$ și cum $k = (k - u_n) + u_n$ iar cum prin ipoteza de inducție $k - u_n$ se scrie ca o sumă de termeni Fibonacci de pînă la u_n, rezultă că și k este o sumă de termeni distincți ai șirului Fibonacci.

43. Prin inducție.

44. Vom demonstra prin inducție că $u_n = 2^{n-1} \cdot n$ $(*)$
Avem $u_1 = 2^0 \cdot 1$, $u_2 = 2 \cdot 2$. Presupunem egalitatea adevărată pentru $n - 1$ și n. Să o demonstrăm pentru $n + 1$

$$u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} \cdot n - 4 \cdot 2^{n-2}(n-1) = (n+1)2^n.$$

Din relația $(*)$ rezultă ușor afirmația din enunț.
Generalizare. Dacă șirul $(u_n)_{n \geqslant 1}$ este definit prin condițiile $u_1 = 1, u_2 = 2k$, $u_{n+2} = 2ku_{n+1} - k^2u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ iar k un număr natural dat, atunci u_n este o putere a lui k dacă și numai dacă n este o putere a lui k.
Demonstrație analoagă.

45. Se demonstrează prin inducție că $n - 2 < x_n < n - 1$.

46. Prin inducție: pentru $n = 1$, evident. Presupunem egalitatea adevărată pentru n. Pentru $n + 1$ avem:

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{A}}{a_{n+1} + \sqrt{A}} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) - \sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) + \sqrt{A}} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{A} + A}{a_n^2 + 2a_n\sqrt{A} + A} = \left(\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}}\right)^2,$$

iar de aici și din ipoteza de inducție deducem valabilitatea pentru $n + 1$.

47. Avem $a_{n+1}\, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n$ și deci și $a_nb_n = a_0b_0$.
Demonstrăm identitatea din enunț prin inducție. Pentru $n = 1$ se verifică. Presupunem egalitatea adevărată ptr. n. Pentru $n + 1$, avem (ținînd seamă ca $a_0b_0 = a_nb_n$)

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{a_0b_0}}{a_{n+1} + \sqrt{a_0a_0}} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_nb_n}}{a_n + b_n + 2\sqrt{a_nb_n}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{a_nb_n}}{a_n + \sqrt{a_nb_n}}\right)^2 = \left(\frac{a_n - \sqrt{a_0b_0}}{a_n + \sqrt{a_0b_0}}\right)^2,$$

iar de aici și din ipoteza de inducție deducem valabilitatea pentru $n + 1$

48. Scriind primii cîțiva termeni ai șirului 1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, observăm că sînt pătratele numerelor 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 care sînt primii termeni din șirul lui Fibonacci.
$(u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ u_1 = u_2 = 1)$. Sîntem conduși spre ipoteza că termenii șirului dat sînt pătratele termenilor șirului lui Fibonacci, $x_n = u_n^2$, pe care o demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ se verifică. Presupunem proprietatea adevărată pentru n, $n + 1$, $n + 2$, să o demonstrăm pentru $n + 3$. Avem $x_{n+3} = 2u_{n+2}^2 + 2u_{n+1}^2 - u_n^2 =$

$$= 2u_{n+2}^2 + 2u_{n+1}^2 - (u_{n+2} - u_{n+1})^2 = u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 + 2u_{n+2}u_{n+1} =$$
$$= (u_{n+2} + u_{n+1})^2 = u_{n+3}^2.$$

49. Scriind primii termeni ai şirului a_n, observăm că: $a_2 = 2$, $a_4 = 5 = 2^2 + 1$, $a_6 = 10 = 3^2 + 1$, $a_8 = 17 = 4^2 + 1$, $a_{10} = 26 = 5^2 + 1$, $a_{12} = 6^2 + 1$ sîntem astfel conduşi să presupunem că în şirul a_n avem: $a_{2k} = k^2 + 1$. Să demonstrăm aceasta prin inducţie.

Presupunînd egalitatea adevărată pentru k vom avea;

$$a_{2k+1} = a_{2k} + \left\lfloor \sqrt{a_{2k}} \right\rfloor = k^3 + 1 + \left\lfloor \sqrt{k^2 + 1} \right\rfloor = k^2 + k + 1.$$

Apoi, cum $\left\lfloor \sqrt{k^2 + k + 1} \right\rfloor = k + 1$, rezultă că $a_{2k+2} = a_{2k+1} + \left\lfloor \sqrt{a_{2k+1}} \right\rfloor =$ $= k^2 + k + 1 + k + 1 = (k + 1)^2 + 1$, ceea ce încheie demonstraţia. Avem deci $a_{2k} = k^2 + 1$ şi atunci $a_{2k+1} = k^2 + k + 1$ Acestea se pot restrînge de exemplu astfel: $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, $n > 1$.

50. Fie $q_n = a_{n+2} - a_{n-1} - a_n$, $n \geqslant 1$

Să demonstrăm prin inducţie că $1 + 4\, a_{n+1} a_n = q_n^2$

*Kvant, (1989) M 1174**

51. Şirurile $(a_n)_{n \geqslant 1}$, $(b_n)_{n \geqslant 1}$ vor fi

1	2	3	5	8	.	.	.	.	.
2	1	3	4	7	.	.	.	.	.

Vom arăta ca doar 1, 2 şi 3 aparţin ambelor şiruri, demonstrînd pentru $n \geqslant 4$: $a_{n-1} < b_n < a_n$ $(*)$ Pentru $n = 4$ şi 5 se verifică $(*)$. Presupunem că sînt adevărate inegalităţile pentru k şi $k + 1$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{k-1} < b_k < a_k \\ a_k < b_{k+1} < a_{k+1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{k+1} < b_{k+2} < a_{k+2}$$ deci are loc şi pentru $k + 2$.

Olimpiada U.R.S.S. 1982

52. Inegalitatea din dreapta prin inducţie. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se verifică. O presupunem adevărată pentru $n - 1$. Să o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n} = 1 + \frac{n}{1 + \frac{n-1}{a_{n-1}}} \leqslant 1 + \frac{n}{1 + \frac{n-1}{\sqrt{n-1} + 1/2}} <$

$< \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}$. Ultima inegalitate revine la $\frac{n\sqrt{n-1} + n/2}{\sqrt{n-1} + n - 1/2} <$

$< \sqrt{n+1} - \frac{1}{2}$ sau la $\frac{1}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}) - \frac{2n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} + n -$

$- \sqrt{n^2 - 1} < \frac{1}{4}$ sau la $\frac{\sqrt{n^2-1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} + n - \sqrt{n^2 - 1} < \frac{1}{4}$.

Dar $\sqrt{n^2 - 1} - n < 0$ şi $n - \sqrt{n^2 - 1} < \frac{1}{4}$, ceea ce încheie demonstraţia. De aici rezultă apoi

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n} > 1 + \frac{n}{\sqrt{n} + 1/2} > \sqrt{n} + \frac{1}{2} \quad (\forall) n.$$

Din $\sqrt{n-1} + \frac{1}{2} < a_n < \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

53. Vom demonstra prin inducţie că:

$$x_n \leqslant \frac{n}{(1 - \alpha)n + 2\alpha} \alpha(1 + \alpha), \; n \in \mathbf{N} \; (*)$$

Pentru $n = 1$ este chiar egalitate, Presupunînd că pentru n, inegalitatea (*) are loc, este suficient să arătăm că:

$$\alpha(\alpha+1)\frac{n}{(1-\alpha)n+2\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)n+2\alpha}\right) \leqslant \alpha(1+\alpha)\frac{n+1}{(1-n)(n+1)+2n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)n+2\alpha} \leqslant \alpha(1+\alpha)\frac{(n+1)((1-n)n+2n)}{n((1-n)(n+1)+2n)} - \alpha(1+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)n+2\alpha} \leqslant \frac{2\alpha}{(1-\alpha)(n+1)+2\alpha} \Leftrightarrow \frac{(1-\alpha)(n+1)+2\alpha}{(1-\alpha)n+2\alpha} \leqslant \frac{2}{1+\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)n+2\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Leftrightarrow 1+\alpha \leqslant 2\alpha+(1-\alpha)n \Leftrightarrow (1-\alpha)(n-1) \geqslant 0.$$

Așadar (*) are loc $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Însă $x_n \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha+\dfrac{2\alpha}{n}}\alpha(1+\alpha) <$

$$< \frac{1}{1-\alpha}\alpha(1+\alpha).$$

54. Prin inducție după n. Pentru $n = 1$, avem $M = 2$. Pentru $n = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow M = 12$.

Presupunem proprietatea adevărată pentru n, adică presupunem că există M astfel ca $2^p/M$. Să o demonstrăm pentru $n+1$. Numărul M' de $n+1$ cifre de 1 sau 2 pentru care $2^{n+1}/M'$ îl formăm adăugînd în fața cifrelor numărului M cifra 1 dacă $2^{n+1} + M$ sau cifra 2 dacă $2^{n+1}/M$. Astfel în primul caz $M = 2^n m$ cu m impar și $M' = 10^n + M = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot m = 2^n(5^n + m) =$ $= \mathfrak{M}\, 2^{n+1}$ iar în al doilea caz $M = 2^{n+1}\, k$ cu k întreg și $M' = 2 \cdot 10^n + M =$ $= 2^{n+1} \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot k = \mathfrak{M}\, 2^{n+1}$.

Deci numărul M' astfel format are $n+1$ cifre numai de 1 sau 2 și se divide prin 2^{n+1}.

Olimpiada sovietică, 1971
și în variantă (olimpiada R.F.G., 1972)

55. Prin inducție. Pentru $n = 1$, evident.

Presupunem că pentru n numere $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ există suma S' de forma $\pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_{n+1}$, pentru care $0 \leqslant S' \leqslant a_2$. Să o demonstrăm pentru o sumă S de $n+1$ numere. Dacă $0 \leqslant S' \leqslant a_1$, atunci

$0 \leqslant S = a_1 - S' \leqslant a_1$, iar dacă

$a_1 < S' \leqslant a_2 \leqslant 2a$, atunci

$0 < S = S' - a_1 \leqslant a_2 - a_1 \leqslant a_1$ ceea ce trebuia demonstrat.

56. Vom demonstra, mai întîi, prin inducție că orice întreg $k \geqslant 0$ admite cel puțin o reprezentare de forma:

$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$ (1) unde m este un întreg pozitiv, iar semnele + și − sînt convenabil alese. Afirmația se verifică pentru numerele 0, 1, 2, 3 deoarece avem

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2; \quad 1 = 1^2$$

$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2; \quad 3 = -1^2 + 2^2; \quad 4 = -1^2 - 2^2 + 3^2.$$

Presupunem afirmația adevărată pentru k. Să o demonstrăm pentru $k+4$. Deoarece $(m+1)^2 - (m+2)^2 - (n+3)^2 + (m+4)^2 = 4$ (2) și conform cu (1) vom avea

$$k + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

şi deoarece este adevărată pentru 0, 1, 2, 3 rezultă că este adevărată pentru orice k. Să observăm acum că din egalitatea

$$0 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + \\ + (m+7)^2 - (m+8)^2$$

şi din reprezentarea lui k sub forma (1) putem obţine alta, înlocuind numărul m prin $m+8$, apoi alta înlocuind $m+8$ prin $m+16$ s.a.m.d. Obţinem astfel o infinitate de reprezentări ale lui k sub forma (1).

Notă: Titu Andreescu a dat o variantă a acestei frumoase probleme prin înlocuirea pătratelor din reprezentarea lui k prin cuburi.

G.M. nr. 1/1980

Iar ulterior Jerzy Mitek, în Comentationes Matematiques, a dat forma generală

$$k = \pm 1^s \pm 2^s \pm \ldots \pm m^s, \quad s \geqslant 2.$$

57. Partea stîngă a inegalităţii, prin inducţie.

Presupunem că $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ şi că $a_1 < a_n$.

Atunci $a_1 < G < a_n$ şi deci

$$G(a_1 + a_n - G) - a_1 a_n = (G - a_1)(a_n - G) > 0. \tag{1}$$

Dar această inegalitate este echivalentă cu

$$(1 + a_1)(1 + a_n) > \left(1 + \frac{a_1 a_n}{G}\right)(1 + G). \tag{2}$$

Inegalitatea de demonstrat este adevărată pentru $n=2$. O presupunem adevărată pentru $n-1$, şi să o demonstrăm pentru n. Deoarece media geometrică a numerelor $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ şi $\frac{a_1 a_n}{G}$ este G, din ipoteza de inducţie, avem

$$(1 + a_2) \ldots (1 + a_{n-1}) \left(1 + \frac{a_1 a_n}{G}\right) < (1 + G)^{n-1}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3), prin înmulţire, rezultă inegalitatea pentru n. Partea dreaptă a inegalităţii, analog, sau mai simplu:

Din ineg. mediilor avem:

$$\sqrt{(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)} \leqslant \frac{1 + a_1 + 1 + a_2 + \ldots 1 + a_n}{n} = \\ = \frac{n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 1 + A.$$

58. Prin inducţie după n. Fie $N_n(m)$ numărul căutat. Evident $N_1(m) = 1 = C_{m-1}^0$. Presupunem că $N_k(m) = C_{m-1}^{k-1}$, pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$ şi să demonstrăm că $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$. Evident $N_n(m) = N_{n-1}(m-1) + N_{n-1}(m-2) + \ldots + N_{n-1}(n-1) = C_{m-1}^{n-2} + C_{m-3}^{n-2} + \ldots + C_{n-2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}$

Deci $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$.

59. Să observăm mai întîi că numărul $a^4 + b^4 + c^4$ este par. Într-adevăr, dacă c este par, atunci din $a^2 + b^2 = c^2$ rezultă că a şi b au aceeaşi paritate, deci $a^4 + b^4 + c^4$ este par. Dacă c este impar atunci $a^2 + b^2$ este impar şi $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ este de asemenea impar şi deci

$a_4 + b^4 + c^4$ este par. Vom arăta, prin inducție, că E_k și F_k se divid simultan prin D. Într-adevăr pentru $k = 2$ este evident că E_2 se divide prin D. Apoi

$$F_2 = (ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 = a^4b^4 + c^4(a^4 + b^4) = a^4b^4 + 2DC^4 - c^8 = \\ = 2DC^4 + (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4).$$

Deoarece $2a^2b^2 = c^4 - (a^4 + b^4)$, atunci $a^2b^2 - c^4 = \frac{1}{2}(c^4 - a^4 - b^4) -$

$- c^4 = -D$ de unde $\Rightarrow$ rezultă că F_2 se divide prin D.

Apoi din egalitățile $E_{k+1} = E_k^2 - 2F_k$ și $F_{k+1} = F_k^2 - 2(abc)^{2^k} E_k$ rezultă prin inducție afirmația problemei.

60. Prin inducție după $m + n = N$.

Evident $m \geqslant 2$ și $n \geqslant 2$ cea mai mică valoare a lui N pentru care proprietatea are loc este 4. Pentru $N = 4$ verificarea este imediată. Presupunem proprietatea adevărată pentru N cu $N > 4$, adică din orice egalitate de sume de numere naturale

$$(A)\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

pentru care $m + n = N$ și $x_1 + \ldots + x_m = y_1 + \ldots + y_n < mn$ putem suprima o parte din termeni obținînd din nou egalitate. Să demonstrăm proprietatea pentru $N + 1$, adică din orice egalitate de sume de numere naturale

$$(B)\ x_1' + x_2' + \ldots + x_p' = y_1' + y_2' + \ldots + y_q'$$

pentru care $p + q = N + 1$ și $x_1' + \ldots + x_p' = y_1' + \ldots + y_q' < pq$ putem suprima o parte din termeni obținînd din nou egalitate. Pentru aceasta prespunem ordonarea

$x_1' \leqslant x_2' \leqslant \ldots \leqslant x_p'$; $y_1' \leqslant y_2' \leqslant \ldots \leqslant y_q'$ și $x_p' > y_q'$ (cazul $x_p' = y_q'$ este banal fiindcă îi reducem pe aceștia din (B), deci dintre x_p' și y_q' unul este mai mare, am presupus x_p'). Scăzînd y_q' din sumele din (B) și notînd $x_p' - y_q' = x_p''$

$$(A')\ x_1' + x_2' + \ldots x_{p-1}' + x_p'' = y_1' + y_2' + \ldots + y_{q-1}'.$$

Dacă $y_1' + y_2' + \ldots + y_{q-1}' \geqslant p(q-1)$ obținem o contradicție fiindcă de aici și din $y_1' + \ldots + y_{q-1}' + y_q' < pq$ rezultă

$y_q' < p$ și cum $y_i' \leqslant y_q'$ pentru $i = 1, 2, \ldots, q$ rezultă

$y_i' < p$ și deci $y_1' + y_2' + \ldots + y_{q-1}' < p(q-1)$.

Deci $x_1' + \ldots + x_{p-1}' + x_p'' = y_1' + y_2' + \ldots + y_{q-1}' < p(q-1)$

și $p + (q-1) = N$ și sîntem deci în condițiile ipotezei de inducție. Putem deci suprima o parte din termenii sumelor din (A') păstrînd egalitate. Dar aceasta reprezintă și o suprimare de termeni din (B), fiindcă x_p'', termen străin față de (B), dispare fie prin suprimarea de termeni în A', fie, în caz contrar, prin adăugarea lui y_q' în ambii membri ai egalității rezultate din A') după suprimare de etermeni.

Variantă de demonstrație: prin inducție după $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 5$.

A XIa O.M.S., Matematica v'şcole 6/1977

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI LOGARITMICĂ

1. a) $\frac{3(1-a)}{b+1}$; b) $\frac{2-3a}{2(a-2)}$; c) $\frac{4(3-a)}{3+a}$; d) $ab+3a$. e) $\frac{3(2-a}{4-a}$;
f) $\frac{5-b}{2a+2ab-4b+2}$; g) $2-3a$, $3(1-a-b)$. i) $\frac{5ab}{3b-2a}$, $\frac{5ab}{3a-2b}$;
j) $\frac{2-a}{2a+b}$; k) $\log_{12}2=\frac{1-(a+b)}{2(1-b)}$ s.a.m.d.
m) $\log_{30}8=3(1-a-b)$.

3. Procedăm prin reducere la absurd.

Fie $\lg 2=\frac{m}{n}\Leftrightarrow 10^{\frac{m}{n}}=2\Rightarrow 10^m=2^n$ absurd

$\log_3 5=\frac{m}{n}\Leftrightarrow 3^m=5^n$, ultima cifră din 5^n este 5 etc.

5. Se trece în aceeași bază.

6. 1) $\frac{x}{y}=4$, 2) $xy=4$.

7. 1) $b(1+a)=1$, 2) $2ab=4a+1$.

8. $2a^{xy}=a^{x^2}+a^{y^2}\geqslant 2\sqrt{a^{x^2+y^2}}\geqslant 2\sqrt{a^{2xy}}=2a^{xy}$
egalitate dacă și numai dacă $x=y$.

9. a) Se elimină y din primele egalități.
b) în mod analog.
c) $a=\log_{100}3$, $b=\log_{60}5\Rightarrow 1-a-b=\log_{60}4$ și $2(1-b)=2\log_{60}12$

deci $\frac{1-a-b}{2(1-b)}=\frac{1}{2}\log_{12}4=\log_{12}2\Rightarrow 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=2\in\mathbf{N}^*$.

10. $\log_a x+\frac{\log_a x}{\log_a b}=\frac{\log_a x}{\log_a a+b}\Leftrightarrow 1+\log_b a=\log_{a+b}a$.

11. a) $\frac{\log_a x(1-\log_b a)}{\log_c x(\log_b c-1)}=\frac{\log_a x}{\log_c x}\Leftrightarrow 1-\log_b a=\log_b c-1\Leftrightarrow 2=\log_b a+\log_b c\Leftrightarrow b^2=ac$.

b) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}\log_b a=a^{\log_a(\log_b a)}=\log_b a$.

12. $A+B=2AB\Leftrightarrow\frac{1}{\log_{a-b}a}+\frac{1}{\log_{a-b}b}=\frac{2}{\log_{a-b}a\log_{a-b}b}\Leftrightarrow\log_{a-b}ab=2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(a-b)^2=ab\Leftrightarrow a^2+b^2=3ab$.

13. Trecînd în baza 10, obținem după simplificare cu $\lg x_0$

$(\lg a + \lg b + \lg c)\left(\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b} + \frac{1}{\lg c}\right) = 1$, care se poate verifica cînd produsul a două din cele trei numere este 1.

14. 1 $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow \lg \frac{a+b}{3} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$. În mod analog 2) și 3).

15. Se trece în baza a.

16. Se lucrează în baza x. și se ține seama că

$\log_x a + \log_x b + \log_x c = 0$ precum și de identitatea

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

17. $a^2 = (c - b)(c + b) \Leftrightarrow 2 = \log_a(c + b) + \log_a(c - b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\log_a(c-b)\log_a(c+b)} = \frac{1}{\log_a(c-b)} + \frac{1}{\log_a(c+b)} \Leftrightarrow 2\log_{c+b}a \log_{c-b}a = \log_{c+b}a + \log_{c-b}a$.

18. Deoarece $\lg \frac{x}{y} + \lg \frac{y}{z} + \lg \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \lg \frac{x}{y} + \lg \frac{y}{z} = -\lg \frac{z}{x}$

și se aplică funcția tangentă.

19. Din egalitatea dată rezultă $n + 1 = a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \ldots \ldots \frac{n+1}{n}$, $a_k = \frac{k+1}{k} \in \mathbf{Q}$.

G.M. 8/1986

20. Prelucrînd membrul stîng $ma^{\log_c b} + nb^{\log_c a} = mb^{\log_c a} + nb^{\log_c a} = (m + n)b^{\log_c a} = (m + n)(c^{\log_c b})^{\log_c a} = (m + n)c^{\log_c b \log_c a}$.

21. a) $\log_a \frac{a}{c} = \log_{b/c} b \Leftrightarrow 1 - \log_a c = \frac{1}{1 - \log_b c} \Leftrightarrow \log_a c \log_b c = \log_c c + \log_b c \Leftrightarrow \log_c ab = 1 \Leftrightarrow ab = c$.

b) $\log_a x \log_c x = \log_b^2 x \Leftrightarrow \log_b^2 x = \frac{\log_b^2 x}{\log_b a \log_b c} \Leftrightarrow \log_a b = \log_b c$.

22. $(bc)^x = a \Rightarrow (abc)^x = a^{x+1}$.

În mod analog $(abc)^y = b^{y+1}$, $(abc)^z = c^{z+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = (abc)^{x(y-z)} \cdot (abc)^{y(z-x)} \cdot (abc)^{z(x-y)} = (abc)^0 = 1$.

23. Evident pentru $x = 1$, este adevărată

Fie $x \in (1, +\infty)$ și deoarece $n \geqslant 2$, există $k \in \mathbf{N}$, astfel încît

$n^k \leqslant [x] \leqslant x < [x] + 1 < n^{k+1}$; logaritmînd avem:

$k \leqslant \log_n [x] \leqslant \log_n x < k + 1 \Rightarrow k = [\log_n [x]] = [\log_n x] = 1$.

24. Se amplifică rapoartele cu x, y și respectiv z și deoarece suma numitorilor este zero rezultă că $\lg x^x + \lg y^y + \lg z^z = 0 \Rightarrow x^x y^y z^z = 1$.

25. Notăm cu k valoarea comună a rapoartelor şi amplificînd primul raport cu y şi al doilea cu x obţinem

$$\frac{yx(y+z-x)}{\lg xy} = \frac{xy(x+z-y)}{\lg y^x} = \frac{2xyz}{\lg x^y y^x}$$ şi analoagele de unde rezultă egalităţile cerute.

26. Fie $x \in (0, \infty) - \{1\}$.

Din $\log_{ab} x + \log_{bc} x = 2\log_{ac} x \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg a + \lg b} + \frac{\lg x}{\lg b + \lg c} = \frac{2\lg x}{\lg a + \lg c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\lg a + \lg b} + \frac{1}{\lg b + \lg c} = \frac{2}{\lg a + \lg c} \Rightarrow 2\lg^2 b = \lg^2 a + \lg^2 c \Rightarrow 2 \cdot \frac{\lg^2 b}{\lg^2 x} =$

$= \frac{\lg^2 a}{\lg^2 x} + \frac{\lg^2 c}{\lg^2 x} \Rightarrow 2\log_x^2 b = \log_x^2 a + \log_x^2 c.$

27. Din egalităţile date rezultă $a^x = bc$, $b^y = ac$, $c^z = ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{xyz} = (bc)^{yz} = b^{yz} \cdot c^{yz} = (b^y)^z \cdot (c^z)^y = (ac)^z \cdot (ab)^y = a^{z+y} c^z b^y = a^{z+y} abac =$

$= a^{z+y+2} bc = a^{z+y+2} a^x = a^{x+y+z+2} \Rightarrow xyz = x + y + z + 2.$

28. Se trece în baza a, pentru $b \neq 1$.
Pentru $b = 1$, egalitatea este evident adevărată.

29. Se trece în aceeaşi bază.

30. $b^2 = ac \Leftrightarrow 2\log b = \log a + \log c$ (se logaritmează într-o bază oarecare).

31. Evident $_a\log b = \log_a b' \Leftrightarrow \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\lg b'}{\lg a'} \Leftrightarrow \frac{\lg a'}{\lg a} = \frac{\lg b'}{\lg b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_a a' = \log_b b'.$$

32. $a_n = aq^n$; $\quad b_n = b + nd$

$$\log_x a_n - b_n = \log_x a + n\log_x q - b - nd = \log_x a - b$$

$$\log_x q = d \Rightarrow x^d = q \Rightarrow x = q^{\frac{1}{d}}$$

33. Se trece în aceeaşi bază.

34. Se trece în bază x.

35. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{a_k} \prod_{l=1}^{n} a_i} = \sum_{k=1}^{n} \log_{\prod_{k=1}^{n} a_i} a_k = \log_{\prod_{i=1}^{n} a_i} \prod_{k=1}^{n} a_k = 1.$

36. $\log_a \left(\prod_{k=2}^{n} \log_k (n-k+2) \right) = 0 \Leftrightarrow \prod_{k=2}^{n} \log_k (n-k+2) = 1$ care este evident adevărată dacă se trece în aceeaşi bază „a".

37. Se trece în baza x.

38. Se trece în aceeaşi bază „a".

39. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log_k n!} = \sum_{k=2}^{n} \log_{n!} k = \log_{n!} \prod_{k=2}^{n} k = \log_{n!} n! = 1.$

40. Membrul stîng se mai scrie:

$$\lg\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{x_1} + \lg\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{x_1+x} + \ldots + \lg\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{x_1+\ldots x_{n-1}} + \lg a_n^{x_1+x_2+\ldots+x_n} =$$

$$= \lg \frac{a_1^{x_1}}{a_2^{x_1}} \cdot \frac{a^{x_1+x}}{a^{x_1+x_2}} \cdot \frac{a_3^{x_1+x_2+x_3}}{a_4^{x_1+x_2+x_3}} \cdots \frac{a_{n-1}^{x_1+x_2+\ldots x_{n-1}}}{a_n^{x_1+x_2+\ldots,x_{n-1}}} \cdot a_n^{x_1+\ldots+x_n} =$$

$$= \lg(a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}).$$

41. $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$, $\frac{4}{3} < \log_3 5 < \frac{3}{2}$, $\frac{5}{4} < \log_5 8 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{49}{12} < A < 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow [A] = 4.$

42. 1) Membrul stîng devine $\frac{1}{\log_{17}2 - \log_{34}2} = \log_2 17 + \log_2^2 17 >$
$> \log_2 16 + \log_2^2 16 = 20.$

2) $6(\lg 3 + \lg 2)^2 > 25 \lg 3 \lg 2 \Leftrightarrow 6\lg^2 3 + 6\lg^2 2 - 13 \lg 3 \lg 2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2\lg 3 - 3\lg 2)(3\lg 3 - 2\lg 2) > 0 \Leftrightarrow (\lg 9 - \lg 3)(\lg 27 - \lg 4) > 0.$

3) Din $(1+x)^2 \geqslant 1 + 2x$ și $\lg 9 = 1 + \lg 0{,}9$, $\lg 11 = 1 + \lg 1{,}1$ avem
$\lg^2 9 + \lg^2 11 = (1 + \lg 0{,}9)^2 + (1 + \lg 1{,}1)^2 > 2 + \lg 0{,}81 + \lg 1{,}21 =$
$= \lg 98{,}01 > \lg 98.$

4) $\lg_3 7 > \lg_3 6 = 1 + \log_3 2 > \log_5 5 + \log_5 2 = \log_5 10$
$\log_3 11 > \log_3 10 > \log_5 10$, deci $\log_3 7 \cdot \log_3 11 > \log_5^2 10$
deoarece $\log_3 11 > \log_3 7 > \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 7 \log_3 11 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 > \log_5^2 10$

$$\log_5 10 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 100 < 125.$$

5) $\lg 2 > 0{,}3 \Leftrightarrow 2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 1024 > 1000$; $\lg 3 < 948 \Leftrightarrow 3^{25} < 10^{12} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 243^5 < 10^{12}$ dar $243^5 < 250^5$ și $250^5 < 10^{12} \Leftrightarrow 5^3 < 2^7$

$\lg^3 9 = 8\lg^3 3 < 8 \cdot (0{,}48)^3 = 8\left(\frac{12}{25}\right)^3$, dar $\lg 8 = 3 \lg 2 > 0{,}9$ și

$$8\left(\frac{12}{25}\right)^3 < 0{,}9.$$

6) Evident $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ (vezi ex. 60, 61).
Deci $\log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 9 < 3 \log_6 7 < 3{,}3$, deoarece
$\log_6 7 < 1{,}1 \Rightarrow 7^{10} < 6^{11}$, dar $6^{11} = 6 \cdot 36^5 > 6 \cdot 35^5 = 6 \cdot 5^5 \cdot 7^5$ s.a.m.d.

7) Se aplică inegalitatea mediilor:

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 4\sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \frac{2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{2} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5}} = 4\sqrt[4]{\log_2 6},$$

dar $4\sqrt[4]{\log_2 6} > 5 \Leftrightarrow \log_2 6 > \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 6^{256} > 2^{625} \Leftrightarrow 36^{128} > 32^{125}.$

43. $a^A = b$, $(na)^B = nb$,
deci $nb = na^A < n^A a^A = (na)^A$, de unde rezultă că

$$(na)^B < (na)^A \text{ și cum } na > 1 \Rightarrow B < A.$$

44. $\underbrace{1{,}00\ldots02}_{k} = 1 + 2\cdot 0{,}0\ldots01 < (1 + \underbrace{0{,}00\ldots01}_{k})^2 =$

$= (\underbrace{1{,}00\ldots01}_{k})^2 \Rightarrow \lg \underbrace{1{,}00\ldots02}_{k} < 2\lg \underbrace{1{,}00\ldots01}_{k}$. Însumînd după k:

$$\sum_{k=0}^{n} \lg \underbrace{1{,}00\ldots02}_{k} < 2\sum_{k=0}^{n} \lg \underbrace{1{,}00\ldots01}_{k} = 2\lg \prod_{k=0}^{n} (\underbrace{1{,}00\ldots01}_{k}).$$

45. $\left(\log_c a - \frac{\log_c a}{\log_c d}\right)\left(\log_c b - \frac{\log_c b}{\log_c d}\right) > 0 \Leftrightarrow \log_c a \log_c b\,(1 - \log_d c)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\log a}{\log c} \cdot \frac{\log b}{\log c}\left((1 - \log_d c) > 0\right.$.

Deci $c \neq d$ și a și b să aibă aceeași poziție față de 1.

47. 1) Fie $a > b$. Considerăm cazurile:

$\alpha)$ $1 < b < a \Rightarrow \log_a b < 1 < \log_b a$.

$\beta)$ $b < a < 1 \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

$\gamma)$ $b < 1 < a$ atunci dacă $1 < \frac{1}{b} < a$, din (α) rezultă:

$\log_a \frac{1}{b} < 1 < \log_{\frac{1}{b}} a \Rightarrow \log_b a < -1 < \log_a b < 0$, iar dacă $1 < a < \frac{1}{b}$ atunci din 2 rezultă $\log_a b < -1 < \log_b a < 0$.

$\delta)$ Dacă $a = b \Rightarrow \log_a b = \log_b a = 1$. În mod analog dacă $b > a$.

2) Dacă a și b au aceeași poziție față de 1, avem

$\log_{a+1} b < \log_a b$, iar dacă a și b au poziții diferite față de 1, atunci se verifică ușor că $\log_{a+1} b > \log_a b$.

Dacă $b = 1 \Rightarrow \log_{a+1} b = \log_t b = 0$.

3) Dacă $b = 1 \Rightarrow 0 = \log_a b < \frac{b}{a}$. Dacă a și b au poziții diferite față de 1 rezultă $\frac{b}{a} > 0$ și $\log_a b < 0 \Rightarrow \log_a b < \frac{b}{a}$.

Dacă a și b au aceeași poziție față de 1, atunci dacă:

i) $0 < b < a < 1 \Rightarrow \frac{b}{a} < 1 < \log_a b$.

ii) $1 < b < a$ și $b^a < a^b \Rightarrow \log_a b < \frac{b}{a}$.

iii) $1 < b < a$ și $b^a > a^b \Rightarrow \log_a b > \frac{b}{a}$.

evident dacă $1 < b < a$ și $b^a = a^b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{b}{a}$.

48. 1) și 2) rezultă din monotonia funcției logaritmice.

3) Se ține seama de inegalitățile $(1 + a)^x \geqslant 1 + a^x$ dacă $x \in (1,\infty)$ și $(1 + a)^x \leqslant 1 + a^x$ dacă $x \in [0,1]$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Dacă $1 < b < a \Rightarrow \log_a b$, $\log_{a+1}(b + 1) \in (0,1)$. Fie $k = \log_a b \Rightarrow a^k = b \Rightarrow$ $\Rightarrow b + 1 = a^k + 1 \geqslant (1 + a)^k \Rightarrow \log_{a+1} b + 1 > \log_{a+1}(a + 1)^k = k = \log_a b$.

Dacă $1 < a < b \Rightarrow \log_a b$, $\log_{a+1} b + 1 \in (1, \infty)$ și fie $k = \log b \Rightarrow a^k = b \Rightarrow$ $\Rightarrow b + 1 = a^k + 1 \leqslant (1 + a)^k \Rightarrow \log_{a+1}(b + 1) \leqslant k \leqslant \log_a b$.

49. Notăm $2^a = x$, $2^b = y$, $2^c = z$, inegalitatea devine

$$xy + yz + zx < 2xyz + 1 \Rightarrow 2xyz - xy - yz - zx + 1 =$$
$$= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(yz-1) + (y-1)(z-1) > 0.$$

50. a) $e^x + e^z \geqslant 2\sqrt{e^{x+z}} = 2\sqrt{e^{2y}} = 2e^y$.

b) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\lg y}{\lg x} \geqslant \frac{\lg z}{\lg y} \Leftrightarrow \lg^2 y \geqslant \lg x \lg z$, dar din $y^2 = xz \Rightarrow 2\lg y = \lg x + \lg z \geqslant 2\sqrt{\lg x \lg z} \Rightarrow \lg^2 y \geqslant \lg x \lg z$.

G.M. 8/1980

51. Dacă $x \in [1, 11)$, atunci $0 \leqslant \log_{11} x < 1$, $0 \leqslant \log_{12} x < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow [\log_{11} x] = 0$ și $[\log_{12} x] = 0 \Rightarrow [\log_{12} x] \leqslant [\log_{11} x]$.

Dacă $x \in [11, 12)$, atunci $1 \leqslant \log_{11} x$ și $\log_{12} x < 1$, deci $[\log_{11} x] = 1$ și $[\log_{12} x] = 0 \Rightarrow [\log_{12} x] \leqslant [\log_{11} x]$.

Dacă $x \in (12, \infty)$, atunci $\log_{12} x \leqslant \log_{11} x \Rightarrow [\log_{12} x] \leqslant [\log_{11} x]$.

Dacă $x \in (0,1) \Rightarrow \log_{11} x < \log_{12} x < 0 \Rightarrow [\log_{11} x] \leqslant [\log_{12} x] \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

52. Logaritmînd inegalitatea rezultă:

$$\frac{a+b+c}{3}(\lg a + \lg b + \lg c) \leqslant a \lg a + b \lg b + c \lg c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(\lg a - \lg b) + (b-c)(\lg b - \lg c) + (c-a)(\lg c - \lg a) \geqslant 0$$

deoarece $(x-y)(\lg x - \lg y) \geqslant 0$.

(Se poate aplica inegalitatea lui Cebîșev).

Generalizare $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \leqslant x_1^{x_1} x_2^{x_2} \ldots x_n^{x_n}$.

53. 1) Se ține seama de $\log_a b + \log_b a \geqslant 2$.

2) $\log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab = (\log_a b + \log_a c)(\log_b a + \log_b c)(\log_c a + \log_c b) \geqslant 2\sqrt{\log_a b \log_a c} \cdot 2\sqrt{\log_b a \log_b c}\, 2\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b} = 8$.

4) Se aplică inegalitatea mediilor:

$$\log_a^n bc + \log_b^n ac + \log_c^n ab \geqslant 3\sqrt[3]{(\log_a^n bc)(\log_b^n ac)(\log_c^n ab)} =$$
$$= 3\left(\sqrt[3]{\log_a bc \log_b ac \log_c ab}\right)^n \geqslant 3\left(\sqrt[3]{8}\right)^n = 3 \cdot 2^n.$$

5) Aplicînd inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{a+c} \geqslant 3\sqrt{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(a+c)}} =$$
$$= \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

54. Soluția I. se adună inegalitățile evidente

$\log_{ab} bc + \log_{bc} ab \geqslant 2$, $\log_{ac} ab + \log_{ab} ac \geqslant 2$, $\log_{bc} ac + \log_{ac} bc \geqslant 2$.

Soluția II. Se transformă într-o bază oarecare situată în același interval cu numerele a, b, c și obținem:

$\frac{\log c}{\log a + \log b} + \frac{\log a}{\log b + \log c} + \frac{\log b}{\log a + \log c} \geqslant \frac{3}{2}$. Notînd cu

$x = \log a$, $y = \log b$, $z = \log c \Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$,

unde $x, y, z \in (0, \infty)$, care se mai scrie

$$\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{y+z+x}{z+x}+\frac{z+y+x}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}+3 \Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geqslant 9,$$

care este cunoscută.

55. Evident $\log_2 a + \log_3 b + \log_4 c < \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c$, apoi se înmulțesc cu 3 toți termenii și se adună 3 în fiecare membru. În final se ține seama de inegalitatea

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(a+c) \leqslant \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

56. Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{\log_2(x^2-1)}{\log_2 x} < \frac{\log_2 x}{\log_2(x-1)} + \frac{\log_2 x}{\log_2(x+1)} \Leftrightarrow \log_2^2 x > \log_2(x-1)\log_2(x+1).$$

Deoarece $x > 2 \Rightarrow x - 1 > 1 \Rightarrow \log_2(x \pm 1) > 0$ și aplicînd inegalitatea mediilor $\Rightarrow \sqrt{\log_2(x-1)\log_2(x+1)} \leqslant \frac{\log_2(x^2-1)}{2} < \frac{\log_2 x^2}{2}$.

57. Evident din condiția $a + b + c = 1 \Rightarrow a, b, c \in (0, 1)$.
Inegalitatea este echivalentă cu $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc \Leftrightarrow (b+c)(a+b)(a+c) \geqslant 8abc$ care este bine cunoscută.

58. 1) Evident $\log_2 a > \log_3 a \ldots > \log_n a$.

2) $\log_k a^k > \log_{k+1} a^{k+1} \Leftrightarrow k \log_k a > (k+1)\log_{k+1} a \Leftrightarrow k > \frac{k+1}{\log_k k+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_k (k+1)^k > \log_n k^{k+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k > k$, care este adevărată pentru $k \geqslant 3$. $\log_2 x^2 = \log_4 x^4$.

59. $\log_{\frac{1}{2}} ab = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} b \geqslant 2\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} a \log_{\frac{1}{2}} b} = 2 \Rightarrow ab \leqslant \frac{1}{4}$.

egalitate pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

Cea mai mică valoare a produsului ab nu există.

Dacă $a = \frac{1}{2^n}$ și $b = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \Rightarrow ab = 2^{-n-\frac{1}{n}}$ care tinde către zero.

60. Se arată că inegalitatea este echivalentă cu

$$\log_{a+1} a \log_{a+1}(a+2) < 1. \text{ Dar}$$

$$\sqrt{\log_{a+1} a \log_{a+1}(a+2)} \leqslant \frac{\log_{a+1} a + \log_{a+1}(a+2)}{2} = \frac{\log_{a+1}(a^2+2a)}{2} < \frac{\log_{a+1}(a+1)^2}{2} = 1.$$

61. Evident $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1)$ (vezi ex. precedent)

$$0 < a_n = \log_n(n+1) < \log_2 3 < 2.$$

R.M.T. 2|1984

62. Prin inducție.

G.M. 12|1984

63. Inegalitatea rezultă din $a+b+c=1$ și $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

64. Trecînd în membrul stîng obținem:

$$\log_{a^n}^2(a^n-1)+\log_{a^n}^2(a^n+1)-2\log_{a^n}\frac{(a^n-1)(a^n+1)}{a^n}<0 \Leftrightarrow$$

$$\log_{a^n}^2(a^n-1)+\log_{a^n}^2(a^n+1)-2\log_{a^n}(a^n-1)-2\log_{a^n}(a^n+1)+2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{a^n}(a^n-1)-1)^2+(\log_{a^n}(a^n+1)-1)^2>0.$$

65. $\log_2(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{ctg}^2 x)=\log_2\left(2+\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)>\log_2 4=2.$

66. Se aplică inegalitatea mediilor; obținem:

$$\ln(1+\sin^2 x)\ln(1+\cos^2 x)\leqslant\left(\frac{\ln(1+\sin^2 x)+\ln(1+\cos^2 x)}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\ln^2(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)=\frac{1}{4}\ln^2(2+\sin^2 x\cos^2 x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\ln^2\left(2+\frac{1}{4}\right)=\ln^2\frac{3}{2}.$$

67. $\log_{\sin^2 x}2\cos^2 x+\log_{\cos^2 x}2\sin^2 x=\log_{\sin^2 x}\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}+$

$$+\log_{\cos^2 x}\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\geqslant 0.$$ (vezi 86).

68. i) Evident $b^2+c^2\geqslant 2bc$, $a^2+c^2\geqslant 2ac$, $b^2+a^2\geqslant 2ab$ s.a.m.d.

ii) $b^3+c^3\geqslant bc(b+c)\Rightarrow\log_a(b^3+c^3)\geqslant\log_a b+\log_a c+\log_a(b+c)>$
$>\log_a b+\log_a c+1$ și analoagele.

(Pentru ii) nu este nevoie de ascuțitunghic).

69. Se aplică monotonia funcțiilor logaritmice și inegaitatea medii lor.

70. Se consideră cazurile posibile, de exemplu:

α) a și b au aceeași poziție față de 1, atunci $\log_a b<0$.

71. Se ogaritmează și obținem:

$a\log a+b\log b>b\log a+a\log b\Leftrightarrow(a-b)(\log a-\log b)>0.$

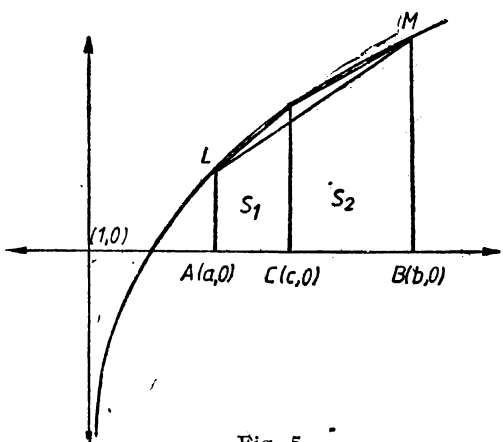


Fig. 5

72. $f(x)=\lg x$, $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}$, f este concavă pe intervalul $(0,\infty)$, deci și pe $(a,b)\Rightarrow$

$\Rightarrow s_1+s_2>\sigma[ABML]$.

$(c-a)(\lg a+\lg c)+(b-c)(\lg b+\lg c)>(b-a)(\lg b+\lg a)$.

$\lg(ac)^{c-a}+\lg(bc)^{b-c}>\lg(ab)^{b-a}$

$\Rightarrow\lg(ac)^{c-a}\cdot(bc)^{b-c}>\lg(ab)^{b-a}$

$\Downarrow$

$b^{a-c}c^{b-a}>a^{b-c}$.

73. a) Evident $1 + b + c + bc \leqslant (1 + a)^2 \Rightarrow \ln(1 + b)\ln(1 + c) \leqslant$

$$\leqslant \frac{\ln^2(1 + b)(1 + c)}{4} \leqslant \frac{\ln^2(1 + a)^2}{4} = \ln^2(1 + a).$$

b) $\sqrt{\log_a b} \leqslant \frac{\log_a b + 1}{2} = \log_a \sqrt{ab}$ şi $\sqrt{\log_b a} \leqslant \log_b \sqrt{ab} \Rightarrow a^{\sqrt{\log_a b}} \geqslant$

$\geqslant a^{\log_a \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ şi $b^{\sqrt{\log_b a}} \geqslant \sqrt{ab}$. Logaritmînd inegalitatea pe care o obţinem în baza 10 şi notînd $-x = \lg x$ şi $-y = \lg b$ $(x > 0,\ y > 0)$, inegalitatea devine $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$.

c) Logaritmînd în baza 10, schimbînd baza şi notînd $-x^n = \lg a$, $-y^n = \lg b$ inegalitatea se transformă $(x^{n+2} - y^{n+2})(x - y) \geqslant 0$ sau se poate aplica inegalitatea lui Abel: $x^n\left(\frac{x}{y} - 1\right) + y^n\left(\frac{y}{x} - 1\right) \geqslant 0$, unde se poate presupune

$x^n \geqslant y^n > 0 \quad x^n = a_1, y^n = a_2, \quad \frac{x}{y} - 1 = b_1, \quad \frac{y}{x} - 1 = b_2$ (vezi cap. III).

74. Se logaritmează inegalitatea, deci $\lg a - \lg b < \lg c - \lg a \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lg a > \lg b + \lg c \geqslant 2\sqrt{\lg b \cdot \lg c}$.

75. Evident $\frac{b}{a} > \frac{b + \alpha}{a + \alpha} \Rightarrow \log_a \frac{b}{a} > \log_a \frac{b + \alpha}{a + \alpha} > \log_{a+\alpha} \frac{b + \alpha}{a + \alpha}$.

76. Logaritmînd inegalităţile şi aplicînd inegalitatea mediilor obţinem:

$$2\lg b \geqslant \lg a + \lg c \geqslant 2\sqrt{\lg a \lg c} \quad (*)$$

$$2\lg c \geqslant \lg b + \lg d \geqslant 2\sqrt{\lg b \lg d} \quad (**).$$

Adunînd primele două inegalităţi din (*) şi (**) rezultă (1) şi înmulţind membru cu membru inegalităţile:

$$\lg b \geqslant \sqrt{\lg a \lg c}; \quad \lg c \geqslant \sqrt{\lg b \lg d} \text{ rezultă (2)}.$$

77. $(a + b)\lg \frac{a + b}{2} \geqslant (a + b)\lg \sqrt{ab} = \left(\frac{a + b}{2}\right)(\lg a + \lg b)$, dar

$\frac{(a + b)(\lg a + \lg b)}{2} \geqslant b\lg a + a\lg b$, care este echivalentă cu $(a - b)(\lg a -$

$- \lg b) \geqslant 0$. (Se poate utiliza inegalitatea lui Cebîşev).

Din cauza simetriei se poate lua $a \leqslant b \Rightarrow \lg a \leqslant \lg b$ şi deci

$b\lg a + a\lg b \leqslant \frac{1}{2}(a + b)(\lg a + \lg b) = (a + b)(\lg \sqrt{ab}) \leqslant (a + b)\lg \frac{a + b}{2}$.

78. a) Din $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \frac{1}{2}$.

b) Inegalitatea se mai scrie $\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x + \left(y - \frac{1}{2}\right)\ln y \geqslant 0$ (1)

dar din $x + y = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = -\left(y - \frac{1}{2}\right)$ şi (1) devine:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln \frac{x}{y} \geqslant 0 \quad (2).$$

Dacă $\frac{1}{2} \leqslant x < 1 \Rightarrow 0 < y \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} \geqslant 1 \Rightarrow \ln \frac{x}{y} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x}{y} \geqslant 0.$

Dacă $0 < x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant y < 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \leqslant 1 \Rightarrow \ln \frac{x}{y} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x}{y} \geqslant 0.$

c) Considerăm $y = 1 - x$ şi considerăm funcţia:

$f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln (1 - x)$, $f'(x) = 1 + \ln x - \ln (1 - x) - -1 = \ln \frac{x}{1 - x}$ şi $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$ este punct de minim al funcţiei,

deci $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x \ln x + (1 - x) \ln (1 - x) \geqslant \ln \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \ln x + y \ln y \geqslant \ln \frac{1}{2}$.

79. Se ţine seama de inegalitatea $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geqslant \sqrt{xy}$ şi $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, $x > 0$

deci $\log_a \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \log_b \frac{a^2 + c^2}{a + c} + \log_c \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geqslant$

$\geqslant \frac{1}{2} [\log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + \log_c a + \log_c b] \geqslant 3.$

80. Evident trebuie ca $\frac{y + 1}{y} > 0 \Rightarrow y \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

Inecuaţia se mai scrie $x^2\left(3 + \log_2 \frac{y + 1}{2y}\right) - 2x \log_2 \frac{y + 1}{2y} + 2 \log_2 \frac{y + 1}{2y} > 0$

$(\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow 3 + \log_2 \frac{y + 1}{2y} < 0$ şi

$$\Delta' = \log_2^2 \frac{y + 1}{2y} - 2 \log_2 \frac{y + 1}{2y}\left(3 + \log_2 \frac{y + 1}{2y}\right) \leqslant 0.$$

Notînd cu $z = \log_2 \frac{y + 1}{2y}$ obţinem sistemul $\begin{cases} z + 3 > 0 \\ z^2 + 6z \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow z \in [0, \infty)$

deci $\log_2 \frac{y + 1}{2y} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y + 1}{2y} \geqslant 1$,

de unde rezultă $y \in (0, 1]$.

81. Se aplică de două ori inegalitatea mediilor şi obţinem:

$$\frac{\log_b a^2}{b + c} + \frac{\log_c b^2}{b + c} + \frac{\log_d c^2}{c + d} + \frac{\log_a d^2}{a + d} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{2^4 \log_b a \log_c b \log_d c \log_a d}{(a + b)(b + c)(c + d)(a + d)}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt[4]{(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)}} \geqslant \frac{16}{a + b + c + d}, \text{ evident că}$$

$$\log_b a \log_d b \log_d c \log_a^d = 1.$$

82. 1) Din $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$ rezultă $\log_a \frac{2ab}{a+b} \geqslant \frac{1}{2} \log_a(ab)$ (1)

$$\log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant \frac{1}{2} \log_b ab. \quad (2)$$

Adunînd (1) cu (2), rezultă $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{2}(2 + \log_a b + \log_b a) \geqslant \frac{1}{2}(2+2) = 2.$$

2) Înmulțind (1) cu (2) rezultă

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant \frac{1}{4}(1 + \lg_a b)(1 + \log_b a) =$$

$$= \frac{1}{4}(2 + \log_a b + \log_b a) \geqslant \frac{1}{4}(2+2) = 1.$$

83. 1) Fie $1 < a < b$, atunci $1 < a < \frac{2ab}{a+b} < b$. De asemeni $\log_{\frac{2ab}{a+b}} b <$

$< \log_{\frac{2b}{b+1}} b$ deoarece $\frac{2ab}{a+b} > \frac{2b}{b+1}$. Atunci:

$E = \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b < \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2b}{b+1}} b$. Fie $\log_{\frac{2b}{b+1}} b = k > 1$.

Alegem a astfel ca $\frac{2b}{b+1} > a^k$; (cu un a ales ipoteza $1 < a < b$ rămîne adevărată). Deoarece

$$a^k < \frac{2b}{b+1} < \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a^k < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a < \frac{1}{k}$$

Rezultă $E > \frac{1}{k} \cdot k = 1 \Rightarrow \frac{1}{E} > 1$ ceea ce trebuia arătat.

2) Deoarece $\frac{2ab}{a+b} < 2a \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a > \log_{2a} a$.

Deci $E > \log_{2a} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b$. Fie $\log_{2a} a = k'$.

Alegem b astfel ca $b^{k'} > \sqrt{ab} \Rightarrow b > a^{\frac{1}{2k'-1}}$.

Deoarece $b^{k'} > \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} b^{k'} > 1 \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} b > \frac{1}{k'}$.

Deci $E > k' \cdot \frac{1}{k'} = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

84. Logaritmînd în bazele a; b și c inegalitatea:

$\frac{3abc}{ab+ac+bc} \leqslant \sqrt[3]{abc}$, obținem trei inegalități care prin adunare membru cu membru și ținînd seama de inegalitatea.

$\log_x y + \log_y x \geqslant 2$, $(\forall)\ x, y \in (0, 1)$ obținem 1) și înmulțindu-le membru cu membru obținem 2).

85. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ şi se logaritmează în bazele a, b şi c după care se adună şi se ţine seama de $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ pentru $x > 0$.

86. $E = \log_a \frac{2b}{a+b} + \log_b \frac{2a}{a+b} = \log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} - 2 =$

$= \log_a \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} + \log_b \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} - 2$, dar cum $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Rightarrow$

$\frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \sqrt{ab}$, deci $E \geqslant \log_a \sqrt{ab} + \log_b \sqrt{ab} - 2 = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a + 2) -$

$- 2 \geqslant 0$, (sau se ştie că $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 2$, vezi ex. 82.)

87. Vom demonstra inegalitatea: $c < A < B$.

Dacă $a > 1$ atunci funcţia $f: (1, \infty) \to \mathbf{R}$ cu $f(a) = \log(a+1)$ este strict descrescătoare, (vezi ex. 60). Prin urmare avem:

$\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5 > \log_5 6$ de unde rezultă:

a) $\log_2 3 > \log_3 4$

$\log_4 5 > \log_5 6$. Aplicînd inegalitatea lui Cebîşev obţinem:

$\frac{(\log_2 3 + \log_3 4)(\log_4 5 + \log_5 6)}{2} < \log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6$,

adică

$\log_3 4 \cdot \log_4 5 + \log_2 3 \cdot \log_5 6 < \log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6$ adică $c < A$ (1).

b) $\log_2 3 > \log_5 6$

$\log_3 4 > \log_4 5$ şi aplicînd inegalitatea lui Cebîşev obţinem în mod analog

$\log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6 < \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$. adică $A < B$ (2).

c) $\log_2 3 > \log_4 5$

$\log_3 4 > \log_5 6$ şi aplicînd inegalitatea lui Cebîşev obţinem

$\log_2 3 \cdot \log_5 6 + \log_3 4 \cdot \log_4 5 < \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$ adică $C < B$ (3)

Din (1), (2) şi (3) obţinem $C < A < B$.

88. Se verifică că $2\sqrt{2} < \log_{2k}(2k+1) + \frac{2}{\log_2(2k+1)} < 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} <$

$< x + \frac{2}{x} < 3$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0$ şi $x^2 - 3x + 2 < 0$, dar $1 = \log_{2k} 2k <$

$< \log_{2k}(2k+1) < \log_{2k}(2k)^2$.

După însumare de la 1 la n, rezultă inegalitatea din enunţ.

89. a) Edident, suma din stînga se scrie

$$\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!)\log_a^2 b=\log_a^2 b\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!\right)=\log_a^2 b\,[(n+1)!-1]<$$
$$<(n+1)!\log_a^2 b.$$

b) Evident, suma din stînga se mai scrie

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}\log_a^2 b=\log_a^2 b\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\log_a^2 b\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)<\log_a^2 b.$$

90. Se aplică inegalitatea mediilor la a) și b).

91. Evident $\log_a x_k>0$. Se aplică inegalitatea mediilor pentru numerele $\log_a x_k$ și se ține seama de inegalitatea din ipoteză.

92. Suma se mai scrie $\sum_{k=1}^{n}\log_{k+2}(k+1)\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\log_{k+2}k+1}$

$=n\sqrt[n]{\log_{n+2}2}$ și $\sum_{k=1}^{n}\log_{k+2}(k+1)<\sum_{k=1}^{n}\log_{k+2}(k+2)=n.$

93. Se transformă într-o bază oarecare situată în același interval cu numerele $a_k\ldots$, obținem:

$$\frac{\log a_1}{\log a_2+\log a_3+\ldots+\log a_n}+\ldots+\frac{\log a_n}{\log a_1+\ldots+\log a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Notînd $\log a_k=x_k$ inegalitatea devine

$$\frac{x_1}{x_2+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+\ldots+x_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1},$$

care este cunoscută.

94. Se aplică inegalitatea mediilor, membrul stîng devine mai mic

decît $n\sqrt[n]{\dfrac{m^n\log_{a_1}a_1\log_{a_2}a_2\ldots\log_{a_n}a_1}{s_1s_2s_3\ldots s_n}}$, dar cum

$\log_{a_1}a_2\log_{a_2}a_3\ldots\log_{a_n}a_1=1$, ultima expresie devine egală cu

$$\frac{nm}{\sqrt[n]{s_1s_2\ldots s_n}}\geqslant\frac{nm}{\dfrac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}}=\frac{n^2m}{m(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

95. Evident $x_k^2\geqslant x_k-\frac{1}{4}$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$ și cum $x_k\in(0,1)$ rezultă că $\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geqslant\log_{x_k}x_{k+1}^2$, $k=\overline{1,2,\ldots n}$, (1) deci

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}\ (\text{unde}\ x_{n+1}=x_1),\ \text{dar}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}}=n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{\lg x_{k+1}}{\lg x_k}}=n.$$

Deci $2\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1} \geqslant 2n$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că

$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right) \geqslant 2n$. Minimul se realizează pentru cazurile cînd

$x_k - \frac{1}{2} = 0$, $k = \overline{1, 2, \ldots n}$, deci cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$.

96. a) Din $\sum_{k=1}^{n}\lg x_k = \lg\prod_{k=1}^{n}x_k < 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}x_k \in (0,1)$, de unde rezultă că cel puţin un $x_k \in (0,1)$. Dar din $\prod_{k=1}^{n}\lg x_k > 0$ rezultă că există un număr par de numere $x_k \in (0,1)$, deci cel puţin două.

b) Evident $p = \lg\prod_{k=1}^{n}x_k = \sum_{k=1}^{n}\lg x_k$, atunci suma:

$$S_n = \lg x_1 \lg x_2 + \lg x_1 \lg x_3 + \ldots \lg x_{n-1} \lg x_n =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\lg x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\lg^2 x_k\right] = \frac{p^2-q}{2},$$

proprietatea se păstrează pentru o bază $a \in (0, \infty) - \{1\}$.

97. Soluţia I. Egalitatea se mai scrie:

$\sum_{k=1}^{n}|\log x + \log x_k| + \sum_{k=1}^{n}|\log x - \log x_k| = |\log\prod_{k=1}^{n}x_k|$. Avem, evident inegalitatea $|\log x + \log x_1 + \log x + \log x_2 + \ldots + \log x + \log x_n -$
$- (\log x - \log x_1) - (\log x - \log x_2) \ldots - (\log x - \log x_n)| \leqslant$
$\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\log x + \log x_k| + \sum_{k=1}^{n}|\log x - \log x_k| = |\log\prod_{k=1}^{n}x_k|$, deci

$2|\log\prod_{k=1}^{n}x_k| \leqslant |\log\prod_{k=1}^{n}x_k| \Rightarrow \log\prod_{k=1}^{n}x_k = 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}x_k = 1$ şi egalitatea dată devine $\sum_{k=1}^{n}|\log xx_k| + \sum_{k=1}^{n}\left|\log\frac{x}{x_k}\right| = 0 \Rightarrow \log xx_k = 0$ şi $\log\frac{x}{x_k} = 0$ oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci $xx_k = 1$ şi $\frac{x}{x_k} = 1 \Rightarrow$

$$x = x_1 = x_2 \ldots = x_n = 1.$$

Soluţia II. Ţinînd seama de inegalitatea $|a + a_1| + |a - a_1) \geqslant 2|a_1|$.

Avem $\sum_{k=1}^{n}|\log x + \log x_1| + \sum_{k=1}^{n}|\log x - \log x_k| \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}|\log x_k|$ şi deoarece $\left|\sum_{k=1}^{n}\log x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\log x_k|$, atunci ţinînd seama de egalitatea din enunţ avem:

$2\sum_{k=1}^{n}|\log x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\log x_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|\log x_k| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ şi de unde rezultă uşor că şi $x = 1$.

98. Să se demonstreze că:

$$\lg_{x_1} x_1^{\frac{2}{x_1+x_2}} + \lg_{x_2} x_2^{\frac{2}{x_2+x_3}} + \quad + \log_{x_n} x_{n-1}^{\frac{2}{x_{n-1}+x_n}} + \log_{x_1} x_n^{\frac{2}{x_n+x_1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n}} \quad \text{unde } x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, 1) \text{ sau } (1, \infty).$$

$$I_n \overset{\text{not}}{=} \frac{\log_{x_2} x_1^2}{x_1 + x_2} + \ldots\ldots + \frac{\log_{x_n} x_{n-1}^2}{x_{n-1} + x_n} + \frac{\log_{x_1} x_n^2}{x_n + x_1} >$$

$$> 2n \sqrt[n]{\frac{\log_{x_2} x_1 \cdot \log_{x_3} x_2 \ldots \log_{x_n} x_{n-1} \cdot \log_{x_1} x_n}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)}}. \qquad (1)$$

Aplic inegalitatea mediilor pentru $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $\ldots$, $x_n + x_1$ obținem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)}} > \frac{n}{2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}. \qquad (2)$$

Din (1), (2) $\Rightarrow I_n > \dfrac{n^2}{x_1 + x_2 + \quad + x_n}$, dar

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots x_n^2}{n}}, \text{ deci } I_n \geqslant \frac{n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}}.$$

99. Impunem condițiile $x - 3 > 0$ $16 - x > 0$, $x - 3 \neq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (3,16) - \{4\}$.

Vom da un algoritm de studiere al semnului funcției f

$\log_a b > 0 \Leftrightarrow a$ și b au aceeași poziție față de 1, adică

$$\begin{matrix} a > 1 \\ b > 1 \end{matrix} \text{ sau } \begin{matrix} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) > 0.$$

$\log_a b < 0 \Leftrightarrow a$ și b au poziții diferite față de 1, adică

$$\begin{matrix} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{matrix} \text{ sau } \begin{matrix} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{matrix} \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) < 0.$$

$\log_a b = 0 \Leftrightarrow b = 1$. Deci pentru studiul semnului expresiei $\log_a b$ se va studia semnul expresiei $R = (a \quad 1)(b - 1)$; $R > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 0$ și $R < 0 \Leftrightarrow \log_a b < 0$. Pentru funcția $R(x) = (a - 1)(b - 1) = (x - 4)(15 - x)$ avem:

x		3		4		15		16	
$R(x) = (x - 4)(15 - x)$	|	|	$-$	$-$	$-$	|	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	|
$f(x) = \log 16 - x\, x - 3$	|	|	$-$	$-$	$-$	|	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	|

100. Se utilizează inegalitatea $\log_{a+1}(b + 1) < \log_a b$ atunci $1 < a < b$, deci maximul este $\log_x(x + 3)$ pentru orice $x > 1$.

Dacă $x \in (0,1)$ $\log_x(x + 3) < 0$ și $\log_{x+1} x + 3 > 0$, deci maximul este $\log_{x+1}(x + 4)$.

101. Fie $P = \log_{x_1} x_2 \log_{x_2} x_3 \qquad \log_{x_n} x_1 = \dfrac{\lg x_2}{\lg x_1} \dfrac{\lg x_3}{\lg x_2} \ldots \dfrac{\lg x_1}{\lg x_n} = 1$

și cum $\log_{x_k} x_{k+1} > 0$, rezultă că există cel puțin un factor mai mic decît 1 și cel puțin un factor mai mare decît 1, deci $\min A < 1$ și $\max A > 1$.

102. Evident $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$.

Notam $\log_a b = x$, $\sqrt{\log_b c} = y$, $\sqrt[3]{\log_c a} = z$ şi deci $xy^2z^3 = 1$. Inegalitatea se mai scrie $x + y + z > 2$.

Dar $x + y + z = x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} > 6\sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{4 \cdot 27}} =$

$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4 \cdot 27}} > 2.$

103. Evident $\log_n(n+1) + \log_{n+1} n > 2\sqrt{\log_n(n+1)\log_{n+1} n} = 2$ şi $\log_n(n+1) + \log_{n+1} n < \log_n n^2 + \log_{n+1} n + 1 = 3$.

104. Dacă $n > k$ obţinem că $\log_k n = t > 1$.

Avem $\log_{\frac{n}{k}} n = \frac{t}{t-1}$.

105. a) $f(x) = 5 \Leftrightarrow (a^x - 1)(b^x - 3) = 0$. Dacă $b = 1 \Rightarrow x = 0$, iar dacă $b \neq 1$ atunci $x_1 = 0$ şi $x_2 = \frac{\lg 3}{\lg b}$.

b) $f(x) = -2a^x + 7$. Dacă $0 < a < 1 \Rightarrow f$. strict crescătoare, deci injectivă, iar dacă $a > 1 \Rightarrow f$ strict descrescătoare, deci injectivă. Se observă că $\mathrm{Im} f = (-\infty, 7)$, deci f nu este surjectivă.

106. Evident f este funcţie pară, deci putem considera $x \in (0, a)$. Fie $a > 1$ atunci $\log_a(a + x) \geqslant 0$ iar $\log_a(a - x) \leqslant 0$ pentru $x \in [a-1, a]$, deci produsul este mai mic decît zero şi deci mai mic decît 1. Dacă $x \in (0, a-1)$, atunci $\log_a(a - x) > 0$ şi $\log_a(a + x)\log_a(a - x) > 0$, prin urmare, din inegalitatea mediilor avem:

$$\log_a(a + x)\log_a(a - x) \leqslant \left(\frac{\log_a(a + x)\log_a(a - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\log_a^2(a^2 - x^2) \leqslant \frac{1}{4}\log_a^2 a^2 = 1.$$

În mod analog cazul $0 < a < 1$.

G.M. 1/1986

107. Distingem cazurile:

1° Dacă $a = b = 1$ $f(x) = 2$, funcţie constantă.

2° Dacă $a > 1$ şi $b \geqslant 1$ sau $a \geqslant 1$ şi $b > 1$, atunci f este strict cresc.

3° Dacă $0 < a < 1$ şi $0 < b \leqslant 1$ sau $0 < a \leqslant 1$ şi $0 < b < 1$ atunci f este strict descrescătoare.

4° Dacă $a > 1$ şi $0 < b < 1$ sau $0 < a < 1$ şi $b > 1$ atunci f nu este monotonă. Într-adevăr fie $a > 1$ şi $0 < b < 1$ atunci

$$\lim_{x \to \infty} a^x\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right] = \infty(1 + 0) = \infty \text{ şi}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} b^x\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right] = \infty\,(1 + 0) = \infty.$$

Deci f nu poate fi monotonă. Cazul $ab = 1$, adică $b = \frac{1}{a}$ a mai fost tratat.

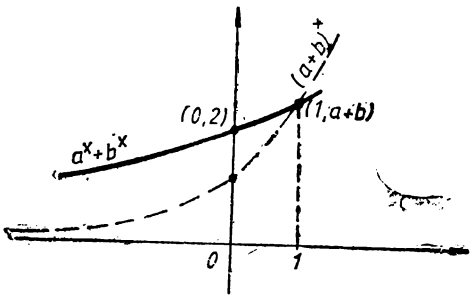


Fig. 6

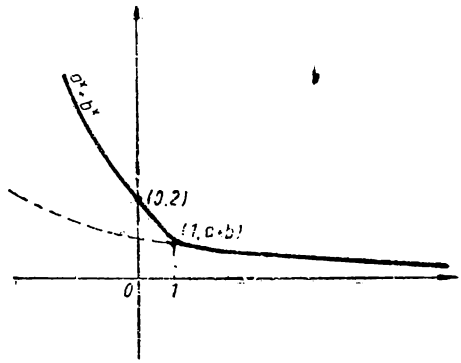


Fig. 7

108. Considerăm funcția $g(x) = \frac{a^x + b^x}{(a+b)^x} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x$

g este strict descrescătoare și $g(1) = 1$. Prin urmare:

pentru $x \geqslant 1 \Rightarrow g(x) \leqslant g(1) \Leftrightarrow g(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow a^x + b^x \leqslant (a+b)^x$ și

pentru $x \leqslant 1 \Rightarrow g(x) \geqslant g(1) \Leftrightarrow g(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow a^x + b^x \geqslant (a+b)^x$,

deci $f(x) = \begin{cases} a_x + b^x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ (a+b)^x, \text{ dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$

α) Dacă $a, b \in (1, \infty)$, atunci din graficul funcției f rezultă că f este bijectivă (vezi fig. 6).

β) Dacă $a, b \in (0,1)$ și $a + b > 1$ atunci din graticul funcției rezultă că f este bijectivă (vezi. fig. 7).

γ) Dacă $a, b \in (0, 1)$ și $a + b \geqslant 1$, atunci din graficul funcției rezultă că f. nu este injectivă și nici surjectivă (vezi fig. 8).

δ) Dacă $a \in (1, \infty)$ și $b \in (0, 1)$, atunci $a + b > 1$ și deci $(a+b)$ este strict crescătoare, dar deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x + b^x = \lim\limits_{x \to -\infty} a^x + \lim\limits_{x \to -\infty} b^x = 0 + \infty = \infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} (a+b)^x = \infty$, rezultă că f nu poate fi injectivă.

109. Funcția f este pară, deci nu este injectivă.

$$f(x) = 2\log_a |x| + a^{|x|},$$

pentru

$x \in (0, \infty)$, $f(x) = 2\log_a x + a^x$ este strict crescătoare (strict descresc.) dacă $a > 1$ $(0 < a < 1)$,

pentru

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = 2\log_a(-x) + a^{-x}$ este strict descrescătoare (strict crescătoare dacă $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

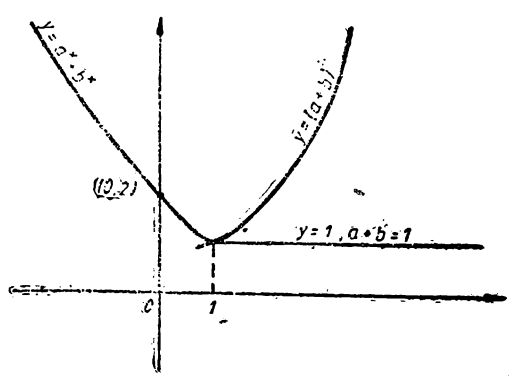


Fig. 8

110. Din condițiile date rezultă, că $ax^2 + bx + c > 0$, $\forall$) $x \in \mathbf{R}$.

Dacă $d > 1$ $(0 < d < 1)$ atunci pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ f este strict descrescătoare (crescătoare), iar pe intervalul $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, f este strict crescătoare (descrescătoare).

Dacă $a(d-1) > 0$, atunci g este strict crescătoare iar dacă
$a(d-1) < 0$, atunci g este strict descrescătoare.

111. Fie $f: [1,64] \to \mathbf{R}$, funcția f se mai scrie:

$f(x) = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x\,(3 - \log_2 x)$. Notînd cu $t = \log_2 x \in [0,6]$

$g(t) = t^4 - 12t^3 + 36t^2 = (t^2 - 6t)^2$ și deoarece pentru $t = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow h_{\min} = h(3) = -9$, iar pentru $t \in [0,6]$ avem $h(t) \in [-9, 0]$, prin urmare $g(t) \in [0,81]$, de unde rezultă

$\max g(t) = 81$ care se obține pentru $t = 3$, ceea ce înseamnă $t \in [0,6]$
$\max f(x) = 81$ pentru $x = 8$; iar $x \in [1,64]$
$\min f(x) = 0$, pentru $x \in \{1, 64\}$.

112. Împărțind numărătorul și numitorul cu 27^x și notînd cu $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, se obține funcția $g(t) = \frac{t^3 + 1}{3t^2 + 8t + 5} = \frac{t^2 - t + 1}{3t + 5} > 0$.

Se arată că pentru $t > 0$ $g(t) \in \left[\frac{1}{9}, \infty\right)$, deci $g_{\min} = \frac{1}{9}$ pentru $t = \frac{2}{3}$, și $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1$.

113. Dacă $a, b \in (1, \infty)$ sau $(a, b) \in (1, \infty)$, atunci funcțiile f și g sînt strict crescătoare. Dacă a și b au poziții diferite față de 1, atunci funcțiile f și g sînt strict descrescătoare.

(Compuneri de funcții monotone)

114. Dacă $a, b \in (1, \infty)$, atunci f este strict crescătoare iar din
$\log_a x > 0$ și $\log_b x > 0 \Rightarrow x \in (1, \infty) = A$ și $f(A) = \mathbf{R}$.

Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci f este tot strict crescătoare și din $\log_a x > 0$ și $\log_b x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1) = A$, $f(A) = \mathbf{R}$.

Dacă a și b au poziții diferite față de 1, atunci mulțimea $A = \emptyset$.

115. Dacă $a > 1$ și $b > 1$, atunci f este strict crescătoare.

Dacă $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, atunci f este strict descrescătoare.

Dacă $a > 1$ și $0 < b < 1$, atunci funcția f se mai scrie

$$f(x) = \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a x \cdot \log_b ab,$$

deci dacă $ab > 1 \Rightarrow f$ strict crescătoare, iar dacă $0 < ab < 1$ rezultă f strict descrescătoare.

Dacă $ab = 1 \Rightarrow f(x) = 0$. Analog în cazul $0 < a < 1$, $b > 1$.

116. Dacă a și b au poziții diferite față de 1, adică $a, b \in (1, \infty)$ sau $a, b \in (0, 1)$, atunci $a^{\log_b x}$ și $b^{\log_a x}$ sînt strict crescătoare, deci f este strict crescătoare.

Dacă a și b au poziții diferite față de 1, atunci $a^{\log_b x}$ și $b^{\log_a x}$ sînt strict descrescătoare și deci f este strict descrescătoare.

117. $f(x) \geq 2(\sqrt{ab})^x + 2(\sqrt{cd})^{-x} = 2\left[(\sqrt{ab})^x + \frac{1}{(\sqrt{ab})^x}\right] \geq 4$, și evident $f(0) = 4$, prin urmare $f(\mathbf{R}) = [4, \infty)$

Generalizare: $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x + b_1^{-x} + b_2^{-x} + \ldots + b_n^{-x} \geq$

$\geq n(\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^x + n(\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n})^{-x} = n\left[(\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^x + \frac{1}{(\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^x}\right] \geq 2n$

și $f(0) = 2n$ (condiția $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n$).

118. 1) Evident $\ln g = x \ln x$.

Dacă $x \in (1, \infty)$, ambele funcții sînt strict crescătoare și pozitive deci $\ln g$ și g sînt strict crescătoare.

Pe intervalul $(0, 1)$ funcția nu este monotonă deoarece

$$\lim_{x \to 1} x^x = 1 \text{ și } \lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

2) Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $\ln f = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$ unde ambele funcții $x + \frac{1}{x}$ și $\ln x$ sînt strict crescătoare și pozitive deci și $\ln f$ este strict crescătoare, de unde rezultă că f este strict cresc. Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $-\ln f = \left(x + \frac{1}{x}\right)(-\ln x)$ este strict descresc., deoarece funcțiile $x + \frac{1}{x}$ și $-\ln x$ sînt strict descrescătoare și pozitive, prin urmare $\ln f$ este strict crescătoare, de unde rezultă f strict crescătoare. Se constată ușor, că oricare ar fi $a \in (0, 1)$ și $b \in (1, \infty)$ $f(a) < f(b)$, deci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

119. 1) Dacă $a \in (0, 1)$, funcția $\log_a x$ este strict descrescătoare și funcția $a^x \cdot \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare, ca produs de funcții strict descrescătoare și pozitive, deci f este strict descrescătoare, prin urmare injectivă.

2) Într-adevăr, deoarece pentru $x \in (0, 1]$, $\log_a x \geq 0$ și $\frac{a^x}{x} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) > 0.$$

120. 1) Evident, dacă $a > 1$, f este strict crescătoare ($-a^{-x}$ este strict cresc.), iar dacă $a \in (0, 1)$, funcția f este strict descrescătoare.

2) Fie $y \in \mathbf{R}$, atunci ecuația $a^x - a^{-x} = y \Leftrightarrow a^{2x} - ya^x - 1 = 0$ are soluția $a^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} > 0 \Rightarrow x = \log_a \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ deci f este surjectivă și $f^{-1}_{(x)} = \log_a \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

121. 1) Evident funcția f este pară. Vom considera $x \in [0, \infty)$, $f(x) = a^x + \frac{1}{a^x} \geq 2$, și pentru orice $y \in [2, \infty)$ există $x \in [0, \infty)$ a.î. $f(x) = y$, deci $\mathrm{Im} f = [2, \infty)$.

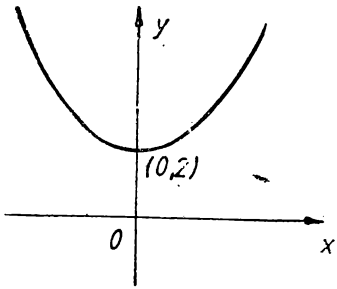


Fig. 9

2) Fie $x \geqslant y \geqslant 0$, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{a^x - a^y}{x-y} \cdot \frac{a^{x+y}-1}{a^{x+y}} > 0$ deoarece, dacă $a>1$, $\frac{a^x - a^y}{x-y} \geqslant 0$ (a^x este strict crescătoare) și $a^{x+y} - 1 > 0$ iar dacă $0 < a < 1$, $\frac{a^x - a^y}{x-y} < 0$ (deoarece a^x este strict descrescătoare) și $a^{x+y} - 1 < 0$, prin urmare funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$, oricare ar fi $a > 0$, $a \neq 1$.

Funcția f fiind pară, rezultă deci că pe intervalul $(-\infty, 0]$ funcția f este strict descrescătoare și $\min\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 2$ care se obține pentru $x = 0$.

Graficul lui f, în figura alăturată, unde creșterile și descreșterile sînt de tip exponențial.

Pe intervalul $[0, \infty)$ f este bijectivă și $f_1^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$, iar pe intervalul $(-\infty, 0]$, f_2 este bijectivă și $f_2^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}$.

122. 1) Evident dacă $a > 1$, g este strict crescătoare, iar dacă $a \in (0, 1)$, g este strict descrescătoare.

Arătăm că dacă $a > 1$, funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Într-adevăr, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{a^x - a^y}{x-y} \cdot \frac{a^{x+y} - a}{a^{x+y}}$.

Cazul $a > 1$. Dacă $x, y \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ atunci $\frac{a^x - a^y}{x-y} > 0$ și $a^{x+y} - a \geqslant 0$, deci $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqslant 0$ de unde rezultă că f este strict crescătoare.

Dacă $x, y \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, rezultă $a^{x+y} - a \leqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant 0$ deci f este strict descrescătoare.

În cazul $0 < a < 1$, funcția f are aceeași monotonie pe fiecare din intervalele considerate $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{a}$ sau $f(x) = a^x + a^{1-x} \geqslant 2\sqrt{a^x a^{1-x}} = 2\sqrt{a}$. Evident, dacă $x \in [0, 1]$ $f(x) \leqslant f(1) \Rightarrow f(x) \leqslant a + 1$, de unde rezultă 3).

2) Din (1) rezultă că g este injectivă (fiind strict monotonă). Arătăm că g este surjectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$, atunci ecuația $a^x - a^{1-x} = y \Leftrightarrow a^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4a}}{2} > 0$ (ecuația s-a pus sub forma $a^{2x} - a^x y - a = 0$) adică $x = \log_a \frac{y + \sqrt{y^2 + 4a}}{2}$, deci g este surjectivă și $g^{-1}(x) = \log_a \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4a}}{2}\right)$.

123. Fără a micşora generalitatea putem presupune $a > b$.

(Dacă $a = b$, $f(x) = a \cdot 2^{\frac{1}{x}}$, care este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele date).

$$f(x) = \left\{a^x\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right]\right\}^{\frac{1}{x}} = a\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}.$$

Fie $g(x) = \ln f(x) = \ln a + \frac{1}{x}\ln\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right]$, dar cum funcţiile $\frac{1}{x}$ şi $\ln\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right]$ sînt strict descrescătoare şi pozitive, rezultă că $g(x)$ este strict descrescătoare, deci f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$. Pe intervalul $(-\infty, 0)$ f se mai scrie

$$f(x) = b\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}} \text{ şi } g(x) = \ln b + \frac{1}{x}\ln\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right].$$

Funcţiile $-\frac{1}{x}$ şi $\ln\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right]$ sînt strict crescătoare şi pozitive, deci $-\frac{1}{x}\ln\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right]$ este strict crescătoare, de unde rezultă că $-\frac{1}{x}\ln\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right]$ este strict descrescătoare.

Prin urmare f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

124. Funcţia f se mai scrie

$$f(x) = n + \sum_{k \neq j}\left[\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^x + \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^x\right] = n + \sum_{k \neq j}\left[\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^x + \left(\frac{a_k}{a_j}\right)^{-x}\right],$$

dar funcţiile de forma $h(x) = a^x + a^{-x}$ sînt injective pe fiecare din intervalele de mai sus (h este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ şi strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$). Evident funcţia f este funcţie pară.

125. Se arată că ecuaţia $(1 + a)^x = 1 + a^x$ are soluţia unică $x = 1$. Funcţia $g(x) = \left(\frac{1}{1+a}\right)^x + \left(\frac{a}{1+a}\right)^x$ este strict descrescătoare şi $g(1) = 1$. Să determinăm valorile pentru care $1 + a^x > (1 + a)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a}\right)^x + \left(\frac{a}{1+a}\right)^x > 1$, adică $g(x) > g(1) \Rightarrow x < 1$.

Evident pentru $x > 1$, $1 + a^x < (1 + a)^x$.

Prin urmare

$$f(x) = \begin{cases} 1 + a^x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ (1 + a)^x, \text{ dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

1) Graficul funcţiei în fig. 10 dacă $a > 1$ şi fig. 11 dacă $0 < a < 1$

126. Distingem cazurile:

1) Dacă $a \in (0, 1]$, atunci este strict crescătoare.

Dacă $a \in (1, \infty)$, atunci $f(x) = a^x\left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x - 1\right]$ este strict crescătoare ca produsul a două funcţii strict crescătoare şi strict pozitive.

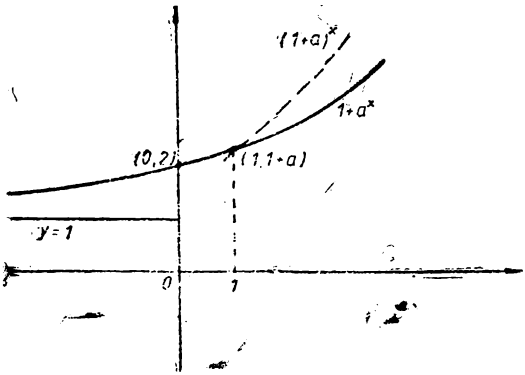


Fig. 10

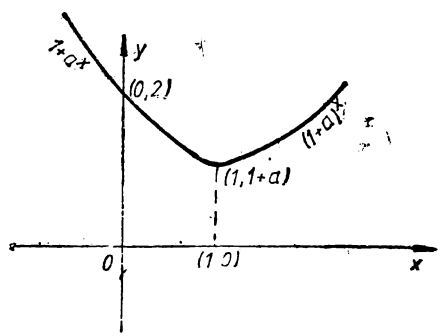


Fig. 11

2) $\left[(1988)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = \left(1987^{\frac{x}{3}} + 1\right)^3 \Rightarrow (1988)^{\frac{x}{3}} = 1987^{\frac{x}{3}} + 1 \Rightarrow 1988^{\frac{x}{3}} -$ $- 1987^{\frac{x}{3}} = 1$, dar în baza lui 1) funcția $f(x) = 1988^{\frac{x}{3}} - 1987^{\frac{x}{3}}$ este strict crescătoare și deci $x = 3$ este soluție unică.

127. Dacă $a > 1$, atunci funcțiile $(a-1)x + b$, a^x, $\log_a x$ sînt strict crescătoare de unde rezultă că f și g sînt injective.

Dacă $0 < a < 1$, atunci funcțiile $(a-1)x + b$, a^x, $\log_a x$ sînt strict descrescătoare de unde rezultă ca mai sus că f și g sînt injective.

Fie $y \in \mathbf{R}$, atunci ecuația $(a-1)x + b + a^x = y \Leftrightarrow a^x = -(a-1)x - b + y$ are o singură soluție, deoarece funcțiile din cei doi membri sînt de monotonii diferite iar graficele celor două funcții au un punct comun. În mod analog pentru ecuația $(a-1)x + b + \log_a x = y \Leftrightarrow \log_a x = -(a-1)x - b + y$. Prin urmare pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$ și $b \in \mathbf{R}$, funcțiile f și g sînt bijective.

128. Cazul $a > 1$, atunci funcția $g(x) = (a-1)x^2 + bx + c$ este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece $x_{\min} = -\frac{b}{2(a-1)} < 0$ și prin urmare funcția f este strict crescătoare, deci injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$, atunci ecuația $f(x) = y \Leftrightarrow g(x) + \log_a x = y \Leftrightarrow \log_a x = y - g(x) = h(x)$. Funcțiile $\log_a x$ și $h(x)$ sînt de monotonii diferite și din reprezentarea grafică de mai jos rezultă că ecuația $\log_a x = h(x)$ are o soluție în intervalul $(0,\infty)$ oricare ar fi $y \in \mathbf{R}$, deci funcția f este bijectivă.

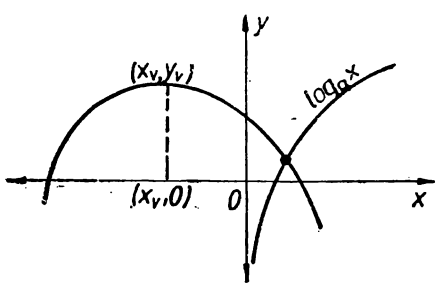


Fig. 12

Analog în cazul $0 < a < 1$.

129. 1) Ecuația are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Arătăm că ecuația de mai sus nu mai are alte soluții. Într-adevăr reprezentînd grafic funcțiile $u(x) = (2a+1)^x$ și $v(x) = 2ax + 1$ rezultă că $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ sînt so-

luţii unice şi din figura alătuată rezultă că:

$$f(x) = u(x) - v(x) > 0, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \text{ şi } f(x) = u(x) - v(x) < 0 \text{ dacă } x \in (0, 1).$$

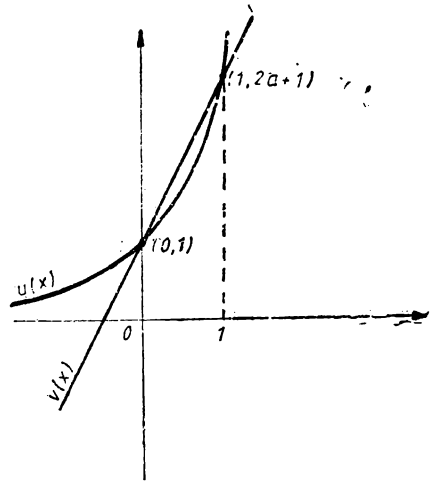


Fig. 13

2) Ecuaţia $\sum_{k=1}^{n} \log_{2k+1}(2kx + 1) = nx$ are soluţii $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. Arătăm că ecuaţia nu mai are alte soluţii.

Într-adevăr, ecuaţia se mai scrie $\sum_{k=1}^{n} \log_{2k+1} \frac{2kx + 1}{(2k + 1)^x} = 0$ şi din 1) rezultă că dacă $x \in (0, 1)$, $\frac{2kx + 1}{(2k + 1)^x} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \log_{2k+1} \frac{2kx + 1}{(2k + 1)^x} > 0$, iar dacă $x \in \left(-\frac{1}{2n}, 0\right) \cup (1, \infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2kx + 1}{(2k + 1)^x} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \log_{2k+1} \frac{2kx + 1}{(2k + 1)^x} < 0.$$

130. 1) Inecuaţia se mai scrie în forma echivalentă

$$(a + 1)^x - ax - 1 + (b + 1)^x - bx - 1 \leqslant 0.$$

Notăm cu $f_a(x) = (1 + a)^x - ax - 1$, $f_b(x) = (1 + b)^x - bx - 1$. Observăm că funcţiile se anulează pentru $x = 0$ şi $x = 1$ şi din reprezentarea grafică de mai jos rezultă că pentru orice $x \in [0, 1]$ $f_a(x) \leqslant 0$ şi $f_b(x) \leqslant 0 \Rightarrow f_a(x) + f_b(x) \leqslant 0$, iar pentru restul valorilor $f_a(x) + f_b(x) > 0$, deci soluţia inecuaţiei este intervalul $x \in [0, 1]$.

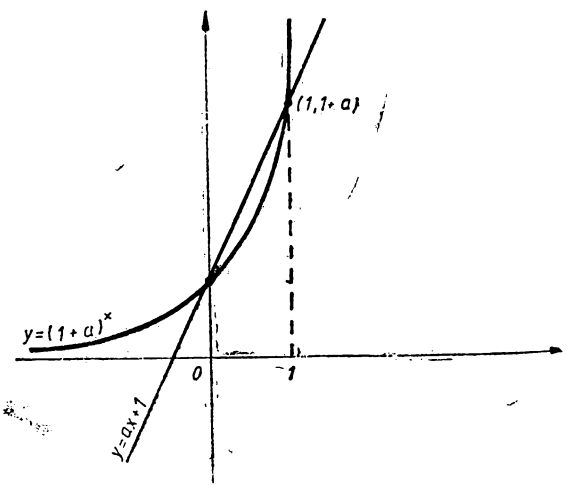


Fig. 14

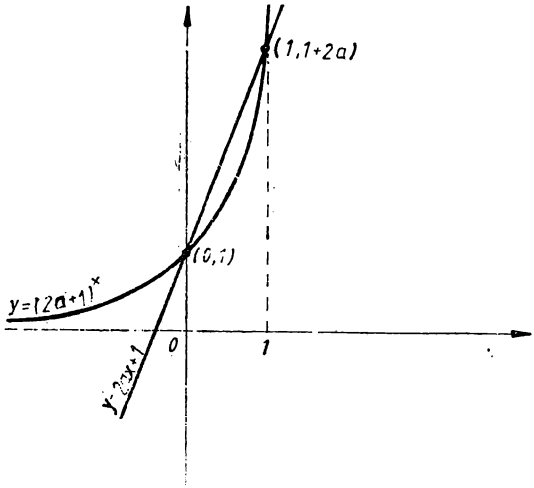


Fig. 15

2) Inecuația se mai scrie în formă echivalentă:

$$\log_{2a+1}\frac{2ax+1}{(2a+1)^x}+$$

$$+\log_{2b+1}\frac{2bx+1}{(2b+1)^x}\geqslant 0.$$

Observăm că pentru $x=0$ și $x=1$ se obține egalitate.

Notînd cu

$$g_a(x)=\log_a\frac{2ax+1}{(2a+1)^x} \text{ și}$$

$g_b(x)=\dfrac{2bx+1}{(2b+1)^x}$ din fig. 15 rezultă că pentru orice $x\in[0,1]$ $\dfrac{2ax+1}{(2a+1)^x}\geqslant 1\Rightarrow\log_{2a+1}\dfrac{2ax+1}{(2a+1)^x}=$ $=g_a(x)\geqslant 0$ și la fel $g_b(x)\geqslant 0\Rightarrow g_a(x)+g_b(x)\geqslant 0$, $(\forall)\ x\in[0,1]$.

131. 1) $g(x)=b\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^x-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1-x}\right]=b[c^x-c^{1-x}]$, dar s-a demonstrat la exercițiul 122 că funcția $h=c^x-c^{1-x}$ este bijectivă, deci și g este bijectivă.

2) Punctul $A(a,b)$ este centru de simetrie pentru graficul funcției g, dacă $g(2a-x)+g(x)=2b$. În cazul nostru se verifică că

$$g(1-x)+g(x)=0.$$

3) Evident dacă $c>1$, h este strict crescătoare deci și g.

Prin urmare pentru $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow g(0)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$

$$b-a\leqslant g(x)\leqslant a-b\Rightarrow|g(x)|\leqslant|a-b|.$$

Pentru $0<c<1$, h este strict descrescătoare, deci și funcția g.

Prin urmare pentru $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow g(0)\geqslant g(x)\geqslant g(1)\Leftrightarrow$

$$a-b\leqslant g(x)\leqslant b-a\Leftrightarrow|g(x)|\leqslant|a-b|.$$

132. Evident, dacă $a=b\Rightarrow f(x)=a+b$

$f(x)=b\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+a\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$. Notăm $g(x)=\dfrac{f(x)}{b}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x-1}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+$

$$+\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}=c^x+c^{1-x},$$

obținîndu-se funcția de la ex. 122 unde s-a demonstrat că este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ și

$$f_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{ab}.$$

Prin urmare:

$$2\sqrt{ab}\leqslant f(x)\leqslant f(1)=f(0)=a+b.$$

3) Se știe că dreapta $x = a$ este axă de simetrie a graficului funcției f dacă și numai dacă $f(x) = f(2a - x)$, deci în cazul nostru se verifică ușor că $f(x) = f(1 - x)$.

133. Funcția se mai scrie $f(x) = b^c\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{a}{b}\right)^{c-x}\right]$.

Notînd cu $t = \frac{a}{b} > 0$, $t \neq 1$ și $g(x) = t^x + t^{c-x}$.

Fie $x \geqslant y \geqslant \frac{c}{2}$ și $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{t^x - t^y}{x - y} \cdot \frac{t^{x+y} - t^c}{t^{x+y}}$.

Dacă $t > 1$, atunci $\frac{t^x - t^y}{x - y} > 0$ și $t^{x+y} - t^c > 0$, deci $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} > 0 \Rightarrow g$ strict crescătoare.

Dacă $0 < t < 1$, atunci $\frac{t^x - t^y}{x - y} < 0$ și $t^{x+y} - t^c < 0$ deci $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow g$ strict crescătoare. În mod analog se arată că g este strict descrescătoare $\left(-\infty, \frac{c}{2}\right]$.

2) Evident $\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f\left(\frac{c}{2}\right)$, deci $f(x) \geqslant f\left(\frac{c}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 2(ab)^{\frac{c}{2}} \Rightarrow$

$$a^{2x}b^c + b^{2x}a^c \geqslant 2(ab)^{\frac{c}{2}} a^x b^x \qquad m \leqslant 2(\sqrt{ab})^c.$$

134. Funcția f se mai scrie

$$f(x) = abc\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{a}\right)^x + \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{c}{a}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x + \left(\frac{c}{b}\right)^x\right]$$

dar se știe că funcția $h(x) = a^x + a^{-x}$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$, **funcția f fiind suma a trei funcții de forma lui h, este strict crescătoare, deci injectivă.**

2) Evident $f(x) \geqslant f(0) = 6$ $\Rightarrow \min_{x \in \mathbf{R}_+} f(x) = 6abc$.

135. Soluția I. Egalitatea se mai scrie $\frac{\ln(bx + c)}{\ln a} = \frac{b \ln x}{\ln a} + c$

$$\ln(bx + c) = b\ln x + c\ln a, \qquad (\forall)\ x \in (0, \infty)$$

Derivînd, avem $\frac{b}{bx + c} = \frac{b}{x}$, $(\forall)\ x \in (0, \infty) \Rightarrow bx + c = x$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow c = 0$ și $b = 1$ și $a > 0$, $a \neq 1$ arbitrar.

Soluția II. Egalitatea devine $\log_a(bx + c) = \log_a x^b + \log_a a^c =$ $= \log_a a^c x^b \Rightarrow bx + c = a^c x^b$ $(\forall)\ x \in (0, \infty)$. Dînd lui x valorile 1, a, $\frac{1}{a}$.

Obținem sistemul $\begin{cases} b + c = a^c \\ ab + c = a^{b+c} \\ \frac{b}{a} + c = a^{c-b} \end{cases}$

Înmulțind ultimele două egalități avem $b^2 + c^2 + abc + \frac{bc}{a} = a^{2c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + abc + \frac{bc}{a} = (b + c)^2 \Rightarrow abc + \frac{bc}{a} - 2bc = 0 \Rightarrow \frac{bc(a-1)^2}{a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow bc = 0 \Rightarrow abc + \frac{bc}{a} - 2bc = 0 \Rightarrow \frac{bc(a-1)^2}{a} = 0 \Rightarrow bc = 0 \Rightarrow c = 0$

şi din prima egalitate a sistemului rezultă $b = 1$.

136. Deoarece a^x este injectivă, rezultă că f este injectivă şi cum f este monotonă rezultă f strict monotonă.

Cazul I. Fie f strict crescătoare, atunci dacă există $x' \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x') = 0$ avem: 1) pentru $x_1 < x' \Rightarrow f(x_1) < f(x') = 0 \Rightarrow f(x_1) < 0$

2) pentru $x_2 > x' \Rightarrow f(x_2) > f(x') = 0 \Rightarrow f(x_2) > 0$, să presupunem că $f(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, atunci $f(f(x)) > f(0) \Rightarrow a^x > f(0)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ absurd (deoarece a^x poate lua valori pozitive oricît de mici $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Dacă $f(x) < 0$ $f(f(x)) < f(0) \Rightarrow a^x < f(0)$ absurd.

Prin urmare funcţia f are valori pozitive şi negative

Din cele de mai sus, se arată că există $x_0 \in \mathbf{R}$, a.î. $f(x_0) = 0$.

Cazul II. Funcţia f este strict descrescătoare (se procedează în mod analog).

137. Fie $a > 1$.

Dacă $y = -x \Rightarrow f(a^x + a^{-x}) = f(0)$, dar cum funcţia $g(x) = a^x + a^{-x}$; $g: [0, \infty) \to [2, \infty)$ este bijectivă (vezi ex. 120).

Atunci rezultă $f([2, \infty)) = f(0)$, deci f este constantă pe $[2, \infty)$. La fel dacă $x \in (-\infty, 0]$, $g: (-\infty, 0] \to [2, \infty)$ este bijectivă şi deci

$$f([2, \infty)) = f(0).$$

Fie $y = 0$, atunci $f(a^x + 1) = f(x)$ (1).

Dacă $x \in [0, \infty) \Rightarrow a^x + 1 \in [2, \infty)$, dar $f([2, \infty)) = f(0) =$ constant deci $f(x) =$ constant pe intervalul $[0, \infty)$.

Dacă $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow a^x + 1 \in (1, 2]$, dar $f((1, 2]) =$ constant, deci din (1) rezultă că $f(x) = f(0) =$ constant pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Aşadar, $f(x) = f(0)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

În mod analog se tratează cazul $0 < a < 1$.

138. a) $x = 0$.

b) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

c) $x = 3$.

d) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

e) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$.

f) $x = 1$.

139. a) Ecuaţia este echivalentă cu $3^{x-1} = 2^{\frac{-2(x-1)}{x+2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{x-1} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+2}}\right]^{x-1} \Rightarrow x_1 = 1$ şi $x_2 = -2 - \frac{\lg 4}{\lg 3}$.

b) Ecuația devine $5^{x-2} = 2^{-\frac{x-2}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{2^{-\frac{1}{x+1}}}{5}\right)^{x-2} = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ și $2^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{5} \Rightarrow x_2 = -1 - \frac{\lg 2}{\lg 5}$, care nu poate fi soluție deoarece $x + 1 \geqslant 2$, și $x + 1 \in \mathbf{N}$.

Observație: x_2 ar fi soluție numai dacă ecuația ar fi avut forma $5^x \cdot 8^{\frac{-x}{x+1}} = 100$.

c) $4^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{x}}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{3^{\frac{1}{x}}}{4}\right)^{x+1} = 1 \Rightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{\lg 3}{\lg 4}$.

140. a) b) c) Se notează $3^{\frac{x}{3}} = y$ sau a) $\left(3^{\frac{x}{3}} - 1\right)^3 = 0$, b) $\left(3^{\frac{x}{3}} - 3\right)^3 = 0$

d) $\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right)^3 = 8 \Rightarrow x = 1$.

141. a) Se notează $3^x + \frac{3}{3^x} = y \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

b) Se notează $3^x = y \Rightarrow x = 1$.

c) Se notează $2^x = y$ sau se observă că $\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1$.

d) Impunînd că $x = 0$ este soluție rezultă $m = 1$ și rezolvînd ecuația rezultă soluția unică $x = 0$.

142. a) Ecuația se mai scrie $4(3^x)^2 + 3(4^x)^2 = 7 \cdot 3^x \cdot 4^x / : (4^x)^2$ și notînd $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$ obținem $4t^2 - 7t + 3 = 0$ cu $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{3}{4}$, adică $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 0$ și $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = 1$.

b) $4(9^x)^2 - 12 \cdot 4^x \cdot 9^x + 9(4^x)^2 = 0 / : (4^x)^2$, se obține $\underbrace{\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

de unde rezultă $2x = 1$ adică $x = \frac{1}{2}$.

c) Se împarte cu $(3^x)^2$ și se obține $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$, singura soluție care convine.

d) $(2^x)^2 \cdot 2 + (3^x)^2 \cdot 3 = 5 \cdot 3^x \cdot 2^x / : (3^x)^2$. Se obține $\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

adică $1 = -x$, $x = -1$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ adică $x_2 = 0$.

e) $9 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 4 \cdot 3^x / : 3^x$; $9 \cdot \frac{4^x}{3^x} - 9\frac{4^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{2}}}{3^x} = \frac{4 \cdot 3^x}{3^x}$;

$9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{x/2} = 4$. Din $\left(\frac{4}{3}\right)^{x/2} = \frac{4}{3}$ rezultă soluția $x = 2$.

g) $2^x + 2^{\frac{x+2}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 5^x = 0 / : 5^x$ de unde rezultă $\left(\frac{2}{5}\right)^{x/2} = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$

$\downarrow$

$2^{x/2} \cdot 2$

adică $\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0.$

h) $(27^x - 8^x)6 = 7(18^x - 12^x)$; $6 \cdot (3^x)^3 - 6(2^x)^3 = 7 \cdot 2^x \cdot (3^x)^2 -$ $- 7 \cdot 3^x \ (2^x)^2$.

Se împarte cu $(2^x)^3$ şi se obţine ecuaţia de gr. III:

$6t^3 - 7t^2 + 7t - 6 = 0$ cu $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ şi cu soluţia reală $t_1 = 1$ de unde

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$$

i) $9 \ (2^x)^2 \cdot 4 + 4 \cdot (3^x)^2 \cdot 9 = 97 \cdot 3^x \cdot 2^x / : (3^x)^2$.

Se obţine $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x_1 = -2$ şi $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow x_2 = 2.$

j) $3 \cdot (2^x)^4 + 2 \ (3^x)^4 = 5(3^x)^2 \cdot (2^x)^2 / : (3^x)^4$. Notînd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$

obţinem $3t^4 + 2 - 5t^2 = 0$ de unde $t^2 = 1$ şi $t^2 = \frac{2}{3}$

Din $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$

k) Notăm $2^x = t \Rightarrow 2^{x+1} = x + 1$ sau $2^{x+1} = -2x - 1 \Rightarrow x \in \{0, +1, -1\}$.

143. a) $x = \pm 6$.

b) Se împarte cu 2^x şi se obţine $f(x) = 1$, unde f strict descrescătoare soluţie unică $x = 2$.

c) $x = \pm 3$; d) $x = \pm 6$; e) $x = \pm 8$.

f) Se imparte cu $(\sqrt{2})^x$, $x = \pm 2$.

g) Se împarte cu 2^x, $x = \pm 1$.

h) Se împarte cu $(\sqrt{2a})^x$, se obţine $f(x) = 1$, f strict descrescătoare.

i) Ecuaţia este echivalentă $6^{2x} - 2 \cdot 4^{2x} - \frac{4}{81} \cdot 9^{2x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2} \log_{2/3} \frac{1}{18}$.

j) Se împarte cu $(\sqrt{a - b})^x$ şi rezultă $x = \pm 1$.

144. a) Notăm $\sqrt[2x]{8x} = y \Rightarrow y - 2y^2 + 6 = 0$; $2y^2 - y - 6 = 0$, $y = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[2x]{8x} = 2 \Rightarrow 8x = 4^x$ cu soluţia unică $x = 2$.

b) În mod analog, se obţin din $8x = 4^x$ soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2 \in (0, 1/4)$. Într-adevăr fie $f(x) = 4^x - 8x$, evident $f(0) = 1 > 0$ şi $f(1/4) < 0$ deci ecuaţia mai are o soluţie $x_2 \in (0, 1/4)$.

145. Se separă bazele şi toate ecuaţiile au soluţia $x = {}^3/_2$.

146. a)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		0		$x+1$		
$\lvert 2^x-1\rvert$		-2^x+1		0		2^x-1	

$x \in (-\infty, -1] \Rightarrow 2^{-x-1} - (-2^x + 1) = 2^x + 1$

$\frac{1}{2^{x+1}} + 2^x - 1 = 2^x + 1 ; \frac{1}{2^{x+1}} = 2 ; \ 1 = 2^{x+2}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2.$

$x \in (-1, 0) \Rightarrow 2^{x+1} - (-2^x + 1) = 2^x + 1 ; \ 2^{x+1} + 2^x - 1 = 2^x + 1 ;$

$2^{x+1} = 2 ; \ x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \notin (-1, 0).$

$x \in [0, +\infty) \Rightarrow 2^{x+1} - (2^x - 1) = 2^x + 1 ; \ 2^{x+1} - 2^x + 1 = 2^x + 1$

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x ; \ 2^{x+1} = 2^{x+1} \Rightarrow x \in [0, +\infty).$

Soluţiile ecuaţiei date sînt $x \in [0, \infty) \cup \{-2\}$.

b) $x \in [-1, \infty) \cup \{-3\}$.

g)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert 2^x-1\rvert$	-2^x+1		0	2^x-1	
$\lvert 2^{-x}-1\rvert$		$2^{-x}-1$	0	$-2^{-x}+1$	

$x \in (-\infty, 0] \Rightarrow -2^x + 1 - (2^{-x} - 1) = \lambda(2^x - 2^{-x}) ; \ 2^x(-1 - \lambda) +$

$+ 2^{-x}(\lambda - 1) + 2 = 0 ; \ -2^x(1 + \lambda) + \frac{1}{2^x}(\lambda - 1) + 2 = 0 ; \ 2^x = y$

$y^2(1 + \lambda) - 2y - (\lambda - 1) = 0 ; \ y_1 = 1 ; \ y_2 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$

deci $2^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $2^x = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$ dacă $\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} > 0$, adică $\lambda \in (-1, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_2 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$

Pentru ca aceste soluţii să aparţină interv. $(-\infty, 0]$, trebuie ca

$\log_2 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \leqslant 0 ; \ \log_2 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \leqslant \log_2 1 ; \ \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \leqslant 1$; adică $\lambda \in [0, 1)$

$x \in (0, \infty) \Rightarrow 2^{+x} - 1 - (-2^{-x} + 1) = \lambda(2^x - 2^{-x}) ; \ 2^{+x} - 1 + 2^{-x} - 1 =$

$= \lambda(2^x - 2^{-x})$ care rezolvată dă $x = \log_2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$ dacă $\lambda \in (0, 1)$;

În concluzie: dacă $\lambda \in (0, 1)$ ecuaţia are două soluţii, iar dacă $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ecuaţia are o singură soluţie $x = 0$.

Dacă $x \in (0, \infty) \Rightarrow x = \log_2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$.

147. a) $6^x = 2^x + 32 \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 32\left(\frac{1}{6}\right)^x = f(x)$ unde f este strict descrescătoare, $x = 2$ soluţie unică.

b) $2^{2x} - 1 - 3^x(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x + 1 - 3^x) = 0 \Rightarrow 2^x -$

$- 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $3^x = 1 + 2^x \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = f(x)$, f strict descrescătoare deci $x = 1$.

c) $x = 2$ soluţie unică.

d) $1=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x=f(x)$, f strict descrescătoare, $x=3$.

e) $9\cdot 7^x+1=64^{\frac{1}{x}}$. Dacă $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f(x)=64^{\frac{1}{x}}<1<g(x)=9\cdot 7^x+1$. Dacă $x\in(0,\infty)$ atunci $x=1$ este soluția unică, f strict descrescătoare și g strict crescătoare.

f) $[(\sqrt{3})^x+(\sqrt{2})^x][(\sqrt{3})^x-(\sqrt{2})^x-1]=0\Rightarrow(\sqrt{3})^x=(\sqrt{2})^x+1$ și $x=2$ este soluție unică.

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2}+\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}=1\Rightarrow f(x)=1$, f strict descrescătoare pe $(0,\infty)$ deci $x=1$ este soluție unică, funcția fiind pară $\Rightarrow x=\pm 1$.

148. a) $5^x=(1+2^x)^2\Rightarrow 1+2^x=5^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow 1+2^x=(\sqrt{5})^x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^x=1$, de unde rezultă soluția unică $x=2$.

b) $9^x=[(\sqrt{5})^x+(\sqrt{4})^x]^2\Rightarrow(\sqrt{5})^x+2^x=3^x\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$ de unde rezultă soluția unică $x=2$.

c) $9^x=[(\sqrt{2})^x+(\sqrt{7})^x]^2\Leftrightarrow(\sqrt{2})^x+(\sqrt{7})^x=3^x\Rightarrow x=2$.

d) Ecuația se mai scrie: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+2}-1+\left(\frac{1}{6}\right)^x[1-\sqrt{2}^{x+1}]=0\Leftrightarrow$

$$\frac{1-\sqrt{2}^{2x+2}}{(\sqrt{2})^{2x+2}}+\left(\frac{1}{6}\right)^x[1-(\sqrt{2})^{x+1}]=0\Leftrightarrow[1-\sqrt{2}^{x+1}]\left[\left(\frac{1}{6}\right)^x+\frac{1+\sqrt{2}^{x+1}}{2^{x+1}}\right]=$$

$=0\Rightarrow 2^{\frac{x+1}{2}}=1\Rightarrow x=-1$, sau se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu $2\cdot 6^x$ și se obține:

$$2\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}-3^x-2=0\Rightarrow\left(2^{\frac{x+1}{2}}\right)^2\cdot 3^x+2\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}-3^x-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{\frac{x+1}{2}}-1\right)\left(3^x\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}+3^x+2\right)=0\Rightarrow 2^{\frac{x+1}{2}}=1\Rightarrow x=-1.$$

149. a) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^x=y$; b) $y=(\sqrt{6}-\sqrt{3})^x$, c) $y=(2+\sqrt{3})^x$.

150. a) $x^2-6x+8=12\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{13}$, $x_3=1$.

b) $x-2=1\Rightarrow x_1=3$ și din $x^2-9x+20=0\Rightarrow x_2=5$ și $x_3=4$.

c) $x-3=1\Rightarrow x_1=4$ și $x_2=5$, $x_3=6$.

d) $2x-5=1\Rightarrow x_1=3$, iar din $2x^2-x=14x-28\Rightarrow x_2=4$ și $x_3=\frac{7}{2}$.

151. a) Se scoate factor comun $(2x+1)^x$ și se obține $(2x+1)^x[2(x+1)-2x-1]=(x-1)^x$ adică $(2x+1)^x=(x-1)^x\Rightarrow 2x+1=x-1\Rightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$.

b) $(3x-2)^x[3x-2-3x+1]=-(x+2)^x$; $-(3x-2)^x=-(x+2)^x\Rightarrow 3x-2=x+2$, $x_1=2$ și $x_2=0$.

c) $(x+3)^{x-2}[4x+5-x-3] = (3x+2)^{x-1}$; $(x+3)^{x-2}(3x+2) = (3x+2)^{x-1}(x+3)^{x-2} = (3x+2)^{x-2}$ de aici $x+3 = 3x+2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ și $x-2=0 \Rightarrow x_2 = 2$.

d) $(2x-3)^{x-2}[2x-3+3x+8] = 5(x+1)^{x+3}$,

$(2x-3)^{x+2} \cdot 5(x+1) = 5(x+1)^{x+3} \Leftrightarrow (2x-3)^{x+2} = (x+1)^{x+2}$

de unde $2x-3 = x+1 \Rightarrow x_1 = 4$ și $x+2=0 \Rightarrow x_2 = -2$.

152. Pentru a) și b) se utilizează observația 1, și rezultă: a) $x=2$ b) $x=2$. Pentru c) se poate utiliza reprezentarea grafică obținîndu-se $x_1 = 1$ și $x_2 \in (-2, -1)$.

d) $2^{x-3} = (5^{x-2})^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{5^{x-2}}{2}\right)^{x-3} = 1 \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = 2 + \frac{\lg 2}{\lg 5}$

e) În mod analog $\Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = \frac{\lg 3}{\lg 5} + 4$.

f) Se utilizează graficul celor două funcții din care rezultă două soluții $x_1 \in (-4, -3)$
$x_2 \in (2, 3)$.

Dacă se consideră funcția

$$f(x) = 2^x - x - 4,$$

obținîndu-se $f(-4) > 0$, $f(-3) < 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$.

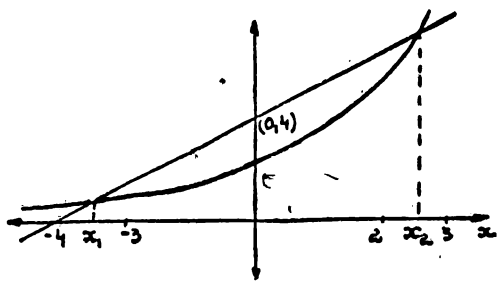


Fig. 16

g) Ecuația se scrie $7^{x-2} = 6(x-2)+1 \Leftrightarrow 7^t = 6t+1$. Din graficul funcțiilor $f(t) = 7^t$ și $g(t) = 6t+1$, rezultă soluțiile $t_1 = 0$ și $t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

h) Ecuația se scrie $9 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{x-1} + 100\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1} = 1$, unde funcția din stînga este strict descrescătoare, deci $x=4$ este soluție unică.

i) Soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = -1$ rezultă din reprezentările grafice ale funcțiilor $f(x) = 3^{x+2}$ și $g(x) = 26x + 29$, în mod analog ca la f).

153. a) $x^x = y \Rightarrow x^x = x^2$, $x^x = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) $(2^x+1)(2^{3-x} - x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 2$.

c) Se notează $2^{x+1} = y \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -x+2$, $x_1 = \log_2 \frac{1}{6}$, $x_2 = 0$.

d) Se notează $3^x = y \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -x+3$, $x_1 = -1$ și x_2 soluție unică a ecuației $3^x = -x+3$.

e) $x \in \{2, 3\}$; f) $x \in \{0, 1, -1\}$; g) $x = 2$.

154. a) Dacă se notează $2^x = a$ și $3^x = b$ se obține $(2b - 3a)(2ab + a + 1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 0 \Rightarrow x = 1$.

b) Dacă notăm $2^{x-1}=a$, $3^{x-1}=b$ se obține

$54a+48b-6ab-432=0 \Leftrightarrow (a-8)(9-b)=0 \Rightarrow a=8$ sau $b=9$, adică $2^{x-1}=8 \Rightarrow x=4$ sau $3^{x-1}=9 \Rightarrow x=3$.

c) Se notează $2^x=y$ și ecuația devine $\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^3=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=0$

d) Se împarte cu 5^{4x} și se notează $\left(\frac{2}{5}\right)^x=y$ obținîndu-se ecuația reciprocă $y^4-y^3-y^2-y+1=0 \Leftrightarrow y^2+\frac{1}{y^2}-\left(y+\frac{1}{y}\right)-1=0$.

Notăm $y+\frac{1}{y}=z$, atunci $z^2-z-3=0$ $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$$y+\frac{1}{y}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ s.a.m.d.}$$

e) Se descompune în factori, grupînd primul cu al treilea termen și al doilea cu ultimul termen, obținîndu-se:

$(\sqrt[3]{3^{x-2}}-\sqrt{2^{x-2}})(\sqrt[3]{3^x}-\sqrt{2^x})=0$, de unde rezultă $x_1=0$ și $x_2=2$.

f) Notînd $2^x=a$ și $3^x=b$ obținem $(a-b)(ba^2+6b^2-13ab)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^x=3^x \Rightarrow x=0$ și $6\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+6 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3} \Rightarrow x=1$ și $\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=-1$.

155. a) $2^{\frac{2x-1}{x-1}}+2^{\frac{3x-2}{x-1}}=24$. Se scoate factor $2^{\frac{2x-1}{x-1}}$ și se obține $x=2$.

b) $2^3\cdot 2^{\frac{1}{x-1}}+3^2\cdot 3^{\frac{1}{x-1}}=43$. Notăm $\frac{1}{x-1}=t \Rightarrow 8\cdot 2^t+9\cdot 3^t=43 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8+9\left(\frac{3}{2}\right)^t=43\left(\frac{1}{2}\right)^t \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=2$.

156. Ecuația se mai scrie $\frac{1}{\sqrt{3^x+4^x}}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\frac{6}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3^x+4^x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}=\frac{6}{5}$ unde funcția din stînga este strict descrescătoare, deci $x=2$ soluție unică.

157. a) Notăm $f(x)=|x-2|\sqrt{x^2-4x+5}$, atunci ecuația devine $2^f+f=3$.

Dacă $f>1 \Rightarrow 2^f>2 \Rightarrow 2^f+f>3$.

Dacă $0<f<1 \Rightarrow 2^f<2 \Rightarrow 2^f+f<3$.

Deci $f=1$. Dacă $x \geqslant 2$, atunci f strict crescătoare și

$$(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}=1 \Leftrightarrow (x-2)^2[(x-2)^2+1]=1 \Rightarrow x_1=$$
$$=2+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Dacă $x<2$, atunci f strict descrescătoare și $x_2=2-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

b) Notăm cu $f(x) = |2x - 1|\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$, atunci ecuația devnie $2^f + f = 3$.

Dacă $f > 1 \Rightarrow 2^f > 2 \Rightarrow 2^f + f > 3$.

Dacă $0 < f < 1 \Rightarrow 2^f < 2 \Rightarrow 2^f + f < 3$.

Deci $f = 1$. Dacă $x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f$ strict crescătoare și $x = 1$ soluție unică pe $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Dacă $x \leqslant \frac{1}{2}$, f strict descrescătoare și $x = 0$ soluție unică pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

Prin urmare $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

c) $x - 2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x-3}} \Rightarrow x = 3$.

d) Evident $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$. Fie $x > 1$, atunci ecuația devine $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = 2^{1-|x-2|}$, dar $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geqslant 2$, egalitate pentru $x = 2$ și $2^{1-|x-2|} \geqslant 2 \Rightarrow 1 - |x-2| \geqslant 1 \Rightarrow |x-2| \leqslant 0$, deci $x = 2$, soluție.

158. a) Ecuația se mai scrie:

$$(2^x - 3^x)^2 + (4^x - 3^x)^2 + (4^x - 2^x)^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

b) Notăm $2^x = a$, $3^x = b$, $4^x = c$, $5^x = d$ și ecuația se scrie:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = abc + abd + acd + bcd$$

$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$

$a^3 + b^3 + d^3 \geqslant 3abd$

$a^3 + c^3 + d^3 \geqslant 3acd$

$b^3 + c^3 + d^3 \geqslant 3bcd$, de unde avem $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant abc + abd + acd + bcd$, egalitate dacă $a^x = b^x = c^x = d^x \Rightarrow x = 0$.

c) $x = 2$ este soluție unică. Într-adevăr ecuația se mai scrie

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x \Leftrightarrow f(x) = g(x),$$

unde f este strict descrescătoare și g este strict crescătoare deci dacă ecuația are soluție, ea este unică.

d) $(3^x + 4^x + 5^x)^2 = (6^x)^2 \Leftrightarrow 3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ cu soluția unică $x = 3$.

e) Soluția I: $9^x + 36^x + 32^x + 32^x \geqslant 4\sqrt[4]{9^x \cdot 36^x \cdot 32^x \cdot 32^x} = 4 \cdot 24^x$, egalitatea are loc doar pentru $9^x = 36^x = 32^x \Rightarrow x = 0$.

Soluția II: Notăm $3^x = y \Rightarrow (2^{2x} + 1)y^2 - 2 \cdot 2^{3x+1} \cdot y + 2^{5x+1} = 0$

și $\Delta = -2^{5x+1}(2^x - 1)^2 \leqslant 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

f) $9^x + 54^x + 8^x + 8^x + 8^x \geqslant 5\sqrt[5]{8^x \cdot 8^x \cdot 8^x \cdot 54^x \cdot 9^x} = 5 \cdot 12^x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$.

g) $1 + \frac{1}{2^{2x-1}} = 3^x(1 + 2^x + 2^{2x})^x$. Funcția din membrul stîng este strict descrescătoare, iar cea din dreapta este strict crescătoare, ecuația deci are soluția unică $x = \frac{1}{3}$.

159. a) Evident funcția $g(x) = x - \frac{1}{x}$ este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci funcția $f(x) = a^{x-\frac{1}{x}} + b^{x-\frac{1}{x}}$ este strict descrescătoare, iar dacă $a, b \in (1, \infty)$ atunci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ de unde rezultă $x = 1$ soluție unică pe acest interval. La fel $x = -1$ este soluție unică pe $(-\infty, 0)$.

b) În mod analog, se obțin soluțiile $x = 2$, $x = -\frac{1}{2}$.

c) Se împarte cu $(ab)^{\frac{1}{x}}$ și se obține ecuația din a).

d) Evident pentru $x < 0$, $f(x) = a^x \cdot b^{\frac{1}{x}} + b^x a^{\frac{1}{x}} < 2ab$.

Pentru $x > 0$ $f(x) = a^x b^{\frac{1}{x}} + b^x a^{\frac{1}{x}} \geqslant 2\sqrt{(ab)^{x+1/x}} \geqslant 2\sqrt{(ab)^2} = 2ab$ egalitate doar pentru $x = 1$.

e) $x_1 = 2$ și $x_2 = 1/2$.

160. Ecuația se scrie $\frac{3^{\sqrt[24]{x}} + 3^{\sqrt[6]{x}} + 3^{\sqrt[3]{x}}}{3} \geqslant \sqrt[3]{3^{\sqrt[24]{x} + \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}}} \geqslant$

$\geqslant \sqrt[3]{3^{3\sqrt[3]{\sqrt[24]{x}\,\sqrt[6]{x}\,\sqrt[3]{x}}}} = 3^{\sqrt[9]{x}}$, egalitate pentru $x = 0$.

161. Arătăm că $x = 1$ este soluție unică.

Într-adevăr, fie $x > 1$ $\frac{2^{x^2}}{5^{x^5}} < \frac{2}{5}$ și $\frac{3^{x^4}}{5^{x^5}} < \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2^{x^2}}{5^{x^5}} + \frac{3^{x^4}}{5^{x^5}} < 1 \Rightarrow$

$$2^{x^2} + 3^{x^4} < 5^{x^5}.$$

În mod analog, dacă $0 \leqslant x < 1$, rezultă că $2^{x^2} + 3^{x^4} < 5^{x^5}$, iar dacă $x < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1$ și $1 - x^5 > 1 \Rightarrow 2^{1-x^2} < 2$ și $2^{1-x^5} > 5 \Rightarrow 2^{1-x^2} < 5^{1-x^5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2^{x^2}}{5^{x^5}} > \frac{2}{5}\ ;\ \text{la fel } \frac{3^{x^4}}{5^{x^5}} > \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2^{x^2}}{5^{x^5}} + \frac{3^{x^4}}{5^{x^5}} > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

162. Numitorul comun $(2^x + 1)(2^{x+1} + 3)$.

$\frac{2^{2x-1}}{(2^x+1)(2^{x+1}+3)} + \frac{2^{x-1}}{2^x+1} + \frac{2^{2x}}{2^{x+1}+3} = 2$. Notăm cu $y = 2^x$.

Se obține ecuația $2y^3 - 3y^2 - 17y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2$.

163. Dacă $n > 2$ și $2^x = y > 0$ atunci $8 = (1 + y)^n + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^n >$

$> 1 + 2y + y^2 + 1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{y}\right) + y^2 + \frac{1}{y^2} \geqslant 8$. Deci ecuația nu poate avea soluții. Prin urmare $n \in \{1, 2\}$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow y^2 - 6y + 1 = 0$ $y_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \log_2(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Pentru $n = 2 \Rightarrow (1 + y)^2 + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 = 8 \Rightarrow (y - 1)^2(y^2 + 4y + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x_3 = 0$.

164. Ecuația se mai scrie:

$$\frac{n(n+1)[n^{3x}-(n+1)^{3x}]}{n^x(n+1)^x[n^x-(n+1)^x]} = 3n^2+3n+1$$

$$\Leftrightarrow n^{1-x}(n+1)^{1-x}[n^{2x}+n^x(n+1)^x+(n+1)^{2x}] = 3n^2+3n+1$$

$$n^{x+1}(n+1)^{1-x}+n^{1-x}(n+1)^{x+1} = 2n^2+2n+1$$

$$n(n+1)\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^x+\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right] = 2n^2+2n+1$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^x+\left(\frac{n+1}{n}\right)^x = 2+\frac{1}{n(n+1)}. \text{ Notînd } \frac{n+1}{n} = a > 1.$$

Ecuația se mai scrie $a^x + a^{-x} = 2 + \frac{1}{a(n+1)}$, unde funcția $f(x) = a^x + a^{-x}$ este pară.

Pe intervalul $[0, \infty)$ funcția f este strict crescătoare, iar pe intervalul $(-\infty, 0)$ este strict descrescătoare (vezi ex. 121). Deci pe intervalul $[0, \infty)$ ecuația are soluția unică $x = 1$, iar pe intervalul $(-\infty, 0]$ soluția $x = -1$.

165. Ecuația se mai scrie $\sqrt{2x+2^x}+\sqrt[3]{3x+3^x} = \sqrt{(0,2)^x-2x}+\sqrt[3]{(0,3)^x-3x}$ unde funcția din stînga este strict crescătoare, iar cea din dreapta este strict descrescătoare, prin urmare $x = 0$ este unica soluție a ecuației.

166. Ecuația se mai scrie $1525^x = 19 + 14 \cdot 16^x$ și are soluția unică $x = \frac{1}{2}$, deoarece prin împărțire cu 25^x a ambilor membri rezultă $f(x) = 14\left(\frac{16}{25}\right)^x + 19\left(\frac{1}{25}\right)^x = 15$ unde f este strict descrescătoare.

167. Dacă $x \neq 0$ atunci rezultă că 9^y trebuie să fie par, absurd. Prin urmare $x = 0$ și atunci ecuația devine

$$3^{2y}+3\cdot 3^y-18 = 0 \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1.$$

168. Ecuația se scrie $4^x \cdot 9^{-1/x} + 9^x \cdot 4^{-1/x} = \frac{275}{6}$.

Se observă că funcția $f(x) = 4^x \cdot 9^{-1/x} + 9^x \cdot 4^{-1/x}$ este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, și $x_2 = 2$ sînt soluții unice pe intervalele respective.

169. a) Se arată că funcția $f(x) = a^x + a^{\frac{1}{x}}, a > 1$ este strict crescătoare pentru $x \in [1, \infty)$, deci ecuația are soluția unică $x_1 = 2$. Dar dacă ecuația are soluția x_0 ea are și $\frac{1}{x_0}$ deci și $x_2 = \frac{1}{2}$ este soluție.

b) Se arată că funcția $f(x) = (1+a)^x + a^x$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ deci ecuația are soluția unică $x_1 = 2$

170. Evident $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ sînt soluții ale ecuației.
Vom arăta că alte soluții nu există. Din $a + b = 2 \Rightarrow a > 1$ și $0 < b < 1$ sau invers. Fie $\alpha \in (0, 1)$, atunci $a = 1 + \alpha$ și $b = 1 - \alpha$ deci ecuația se mai scrie $(1+\alpha)^x + (1-\alpha)^x = 2$. Se aplică inegalitățile lui Bernoulli.

Dacă $x \in (0, 1) \Rightarrow (1 - \alpha)^x < 1 - \alpha x$ şi $(1 + \alpha)^x < 1 + \alpha x \Rightarrow (1 + \alpha)^x + (1 - \alpha)^x < 2$.

Dacă $x \in (1, \infty) \Rightarrow (1 - \alpha)^x > 1 - \alpha x$ şi $(1 + \alpha)^x + (1 - \alpha)^x > 2$.

Generalizare: $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x = n$, unde $a_i \in (0, \infty) - \{1\}$ $i = \overline{1 \ldots n}$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, şi în mod analog rezultă $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

171. Se verifică uşor că rădăcinile ecuaţiei sînt $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$.

Vom arăta că ecuaţia nu are alte rădăcini. Să presupunem că ecuaţia are cel puţin patru rădăcini, atunci în baza teoremei lui Rolle

$f'(x) = -(4^x + 2) + (2 - x)4^x \ln 4$ are cel puţin trei rădăcini, unde $(x) = (4^x + 2)(2 - x) - 6$, iar

$f''(x) = 4^x[(2 - x)/\ln^2 4 - 2\ln 4]$ are cel puţin două rădăcini, dar se observă uşor că $f''(x) = 0$ are o singură rădăcină.

172. Ecuaţia nu are soluţii negative. Pentru orice soluţie $x_0 > 0$ şi $\frac{1}{x_0}$ este soluţie. Este deci suficient să găsim soluţiile supraunitare. $x = 2$ este soluţie şi deci şi $\frac{1}{2}$ este soluţie.

Vom arăta că sînt singurele soluţii.

Fie $x > 2$, $4^x + 9^{1/x} > 4^2 + 9^{1/2}$ (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4^2(4^{x-2} - 1) > 9^{1/x}\left(9^{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{4^2}{9^{1/x}} > \frac{9^{\frac{x-2}{2x}} - 1}{4^{x-2} - 1}.$$

Dar $\frac{4^2}{9^{1/x}} > 1 > \frac{9^{\frac{x-2}{2x}}}{4^{x-2}} > \frac{9^{\frac{x-2}{2x}} - 1}{4^{x-2} - 1}$

$$9^x + 4^{\frac{1}{x}} > 9^2 + 4^{\frac{1}{2}} \quad (2) \Leftrightarrow 9^2(9^{x-2} - 1) > 4^{\frac{1}{x}}\left(4^{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9^2}{4^{1/x}} > \frac{4^{\frac{x-2}{2x}} - 1}{9^{x-2} - 1}. \text{ Dar } \frac{9^2}{4^{1/x}} > 1 > \frac{4^{\frac{x-2}{2x}}}{9^{x-2}} > \frac{4^{\frac{x-2}{2x}} - 1}{9^{x-2} - 1}.$$

Din (1) şi (2) rezultă $(4^x + 9^{1/x})(9^x + 4^{1/x}) > 1577$ pentru $x > 2$. Analog se demonstrează că pentru $1 \leqslant x < 2$,

$$4^x + 9^{1/x} < 4^2 + 9^{1/2} \quad (3) \quad \text{şi} \quad 9^x + 4^{1/x} < 9^2 + 4^{1/2} \quad (4).$$

Din (3) şi (4) rezultă $(4^x + 9^{1/x})(9^x + 4^{1/x}) < 1577$ pentru $x < 2$.

Soluţia II

Ecuaţia se mai scrie $36^x + 36^{\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} + 4^{x+\frac{1}{x}} = 1577$.

Evident funcţiile $4^{x+\frac{1}{x}}$ şi $9^{x+\frac{1}{x}}$ sînt strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$ şi la fel funcţia $36^x + 36^{\frac{1}{x}}$ tot strict crescătoare de unde rezultă că membrul stîng este o funcţie strict crescătoare, deci injectivă şi prin urmare $x_1 = 2$ este soluţie unică pe $(1, \infty)$ şi din observaţia de mai sus rezultă şi $x_2 = \frac{1}{2}$.

173. a) Evident $\sin 75 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Împărțind cu 8^x, rezultă soluția unică $x = \frac{1}{2}$.

b) Ecuația se mai scrie: $6\left(\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}\right)^x - \left(\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{3}}\right)^x = 5$ și cum

$$\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{3}} = 1, \text{ rezultă ușor că } x_1 = 0.$$

c) Ecuația se mai scrie: $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = (1 + 2^x + 3^x)^x$, unde funcțiile din cei doi membri sînt de monotonii diferite. Sol. unică $x_0 = \frac{1}{3}$.

d) Fie $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 11x^2$

$f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $f(4) > 0$ deci există soluții:

$$x_1 \in (-1, 0),\ x_2 \in (0, 1) \text{ și } x_3 = 3.$$

Din reprezentarea grafică a funcțiilor $u(x) = 2^x + 3^x + 4^x$ și $v(x) = 11x^2$ rezultă că ecuația are trei soluții.

e) Pentru $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow (4 - x)^{4-x} + (5 - x)^{5-x} \in \mathbf{Z}$, dar $4^x + 5^x \notin \mathbf{Z}$. Dacă $x > 5$ atunci $(4 - x)^{4-x} + (5 - x)^{5-x} \notin \mathbf{Z}$, dar $4^x + 5^x \in \mathbf{Z}$. Deci trebuie ca $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ rezultă soluția unică $x = 2$.

f) Dacă notăm cu $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ ecuația devine:

$a^{2x} + \frac{1}{a^{2x}} + a^{3x} + \frac{1}{a^{3x}} = 56$, dar se știe că funcțiile de forma $f(x) = a^x + a^{-x}$ sînt strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ (ex. 121).

Deci pentru $x \in (0, \infty)$ funcția din stînga este strict crescătoare iar pe $(-\infty, 0)$ este strict descrescătoare.

Ecuația are soluțiile unice $x = \pm a$.

g) Ecuația se mai scrie $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} + \left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}\right)^x +$

$$+ \frac{1}{\left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

Dar $a^x + \frac{1}{a^x} \geqslant 2$, egalitate doar pentru $x = 0$, deci soluția unică a ecuației este $x = 0$.

174. a) $3^{2x-1} + 5 = x^{9-2x} > 5 \Rightarrow 9 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{9}{2}$ și $x \in \mathbf{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{2, 3, 4\} \Rightarrow x = 2$ verifică ecuația.

b) În mod analog $x = 3$.

c) Ecuația se mai scrie $4^x = 2x^2$. Dacă $x \in (-\infty, 0)$ atunci ecuația are soluția unică $x_1 = -\frac{1}{2}$ deoarece funcțiile $f(x) = 4^x$ și $g(x) = 2x^2$ sînt de monotonii diferite.

Fie $x \in (0, \infty)$. Dacă $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 1 < f(x) \leqslant 2$ și

$$0 < g(x) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \neq g(x).$$

Dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow 2 \leqslant f(x) \leqslant 4$ și $\frac{1}{2} \leqslant g(x) < 2$.

Dacă $x \in [1, \infty)$ atunci funcția $h(x) = f(x) - g(x)$ este strict crescătoare și deci $h(x) > h(1) > 0$.

d) Soluția I: evident $x_0 = 2$ este soluție unică a ecuației, deoarece funcția $f(x) = (2x)^{x^2/2}$ este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$ sau dacă $0 < x < x_0 \Rightarrow 2x < 2x_0 \Rightarrow (2x)^{\frac{x^2}{2}} < (2x_0)^{\frac{x^2}{2}} < (2x_0)^{\frac{x_0^2}{2}} = 16$, iar dacă $x > x_0$. Dacă $x > x_0 \Rightarrow 2x > 2x_0 \Rightarrow 16 = (2x_0)^{\frac{x_0^2}{2}} < (2x)^{\frac{x_0}{2}} < (2x)^{\frac{x^2}{2}}$.

Soluția II. $\frac{x^2}{2} \log_2 2x = 4$, unde $g(x) = \frac{x^2}{2} \log_2(2x)$ este strict crescătoare deci $x_0 = 2$ este soluție unică.

e) Ecuația se mai scrie: $(x^2 - 1)(e^x - 1) + x(e^{x^2-1} - 1) = 0$ și are soluțiile $0, 1, -1$. Ecuația nu mai are alte soluții. Într-adevăr dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, atunci $(x^2 - 1)(e^x - 1) + x(e^{x^2-1} - 1) < 0$; dacă $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, atunci $(x^2 - 1)(e^x - 1) + x(e^{x^2-1} - 1) > 0$.

175. a) $\left(\frac{1}{ab}\right)^x [1 - (\sqrt{a})^{x+1}] + \frac{1 - (\sqrt{a})^{2(x+1)}}{a^{x+1}} = 0.$

$$[1 - (\sqrt{a})^{x+1}]\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^x + \frac{1 + (\sqrt{a})^{x+1}}{a^{x-1}}\right] = 0 \Rightarrow x = -1.$$

b) Notînd cu $u = a^x$, $v = b^x$ obținem $u^4 + 2u^3v - u^2v^2 - 2uv^3 + v^4 = 0$ și împărțind cu v^4 și notînd $\frac{u}{v} = t$ obținem:

$$t^4 + 2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \text{ cu soluțiile } t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ deci}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ s.a.m.d.}$$

c) Ecuația se mai scrie $ab[a^{2x} + b^{2x}]^2 = (ab)^x[a^{2x} + b^{2x}][a^2 + b^2] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a^{2x} + b^{2x})ab - (ab)\,[a^2 + b^2] = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a}{b} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{și } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = -1$$

d) Ecuația se mai scrie: $4^x \cdot x^3 + (4^{x+1} - 3^{x+1})x^2 - \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot 4^{x+1} - 4x(4^{x+1} - 3^{x+1}) + 4(4^{x+1} - 3^{x+1}) + 4 \cdot 4^x = (4^{x+1} - 3^{x+1})(x^2 - 4x + 4) + 4^x[x^3 - 3x^2 + 4] = (x - 2)^2[4^{x+1} - 3^{x+1} + 4^x(x + 1)] = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ și din $4^{x+1} - 3^{x+1} + 4^x(x + 1) = 0 \Rightarrow 4^x(x + 5) = 3 \cdot 3^x \Rightarrow x + 5 = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ care are soluția $x_2 = -1$.

e) Ecuația are soluția unică $x = 1$.

Într-adevăr, dacă $a \in (0, 1)$, funcția $f(x) = \frac{(a+1)^x + 1}{a^{x-1}} - \frac{a^x + 1}{(a+1)^{x-1}}$ este strict crescătoare, deci $x = 1$ este soluție unică.

Dacă $a = 1 \Rightarrow 2^x = 2^{2-x} \Rightarrow x = 1$.

Dacă $a > 1$, atunci $f(x) - f(1) = \frac{1}{[a(a+1)]^{x-1}} \cdot \{[(a+1)^{2x-1} -$

$- (a+1)^x \quad a^{x-1}] + [a^x(a+1)^{x-1} - a^{2x-1}] + [(a+1)^{x-1} - a^{x-1}]\} > 0$, pentru orice $x > 1$, deoarece $(a+1)^{x-1} > a^{x-1} \Rightarrow a^x(a+1)^{x-1} > a^{2x-1}$ și $(a+1)^{2x-1} > (a+1)^x a^{x-1}$, deci $f(x) - f(1) > 0$, $(\forall)\ x > 1$.

De asemenea $f(x) - f(1) < 0$ $(\forall)\ x < 1$.

Egalitate doar pentru $x = 1$.

f) Funcția $(x - n^2 - 1)^{\sqrt{2n-x}}$ este strict descrescătoare, deci $x_0 = -n^2 - 1$ este soluție unică doar dacă n este impar. Dacă n este par atunci $n + 1$ impar și deci trebuie ca $x \geqslant n^2 + 1$, dar cum $2n \geqslant x \Rightarrow n = 1$ și $x = 2$ care nu verifică ecuația.

176. $(4 + a^x)^{2n} + (4 + a^{-x})^{2n} \geqslant 2\sqrt{[(4 + a^n)(4 + a^{-n})]^{2n}} = 2[(4 + a^x)(4 + a^{-x})]^n = 2[16 + 4(a^x + a^{-x}) + 1]^n \geqslant 2[17 + 8]^n = 2 \quad 25^n \Rightarrow 50 \geqslant 2 \cdot 25^n$, inegalitate adevărată doar pentru $n = 1$. Prin urmare ecuația se scrie $(4 + a^x)^2 + (4 + a^{-x})^2 = 50$ cu soluția unică $x = 0$ rezultată din situațiile de egalitate de mai sus.

177. Evident pentru $x < 0$ $\frac{a^x}{x} + xa^{1/x} < 0$. Fie $x > 0$, atunci $\frac{a^x}{x} + xa^{1/x} \geqslant 2\sqrt{a^{x+1/x}} \geqslant 2\sqrt{a^2} = 2a$, egalitate pentru $x = 1$.

178. Ținînd seama că $a = \sqrt{bc}$ ecuația se mai scrie

$$(\sqrt{bc})^x + b^x = 2c^x \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

unde $t = \left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^x > 0$ deci $t = 1 \Rightarrow x = 0$

179. Evident $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} \geqslant 2\sqrt{a^{x^2-2x}\, b^{x^2-2x}} = 2\sqrt{(ab)^{x^2-2x}} \geqslant$

$\geqslant 2\sqrt{(ab)^{-1}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, dacă $a \neq b$, egalitate nu poate să se realizeze pentru nici o valoare a lui x.

Dacă $a = b$, atunci $x = 1$ este soluție.

180. Funcția $f(x) = (a^x + a^{-x})(1 + x^2)$ este pară și pentru $x \neq 0$ avem: $a^x + a^{-x} > 2$ și $1 + x^2 > 1 \Rightarrow (a^x + a^{-x})(1 + x^2) > 2$, deci $x = 0$ este soluție unică a ecuației $f(x) = 2$.

181. Dacă $a > 1$, atunci $f(x) = a^{x-2}$ este strict crescătoare, iar $g(x) = (1 - a)x + na - 3$ este strict descrescătoare, de unde rezultă ușor că $x = 3$ este soluție unică a ecuației. În mod analog dacă $0 < a < 1$, rezultă că $x = 3$ este soluția unică a ecuației.

182. a) $(a^x - b^x)^2 = b^x(a^x - b^x) \Rightarrow x_1 = 0$ şi $a^x = 2b^x \Rightarrow x_2 = \dfrac{\lg 2}{\lg a - \lg b}$

b) $(a^x - b^x)(a^{x-2} - b^{x-2}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

c) Înmulţim ambii membri cu b^{x-1} şi obţinem $a(a^{x-1} - b^{x-1})(a^{x+1} - b^{x+1}) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$

d) $(a^{x-c} - b^{x-c})(a^{x+c} - b^{x+c}) = 0 \Rightarrow x = \pm c.$

e) $x = -1.$

f) Se descompune în factori $[a^{x(x-1)} - 1][x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

g) Ecuaţia devine $\dfrac{1}{a^{x^2-3x+2}} + \dfrac{1}{a^{x^2-4x+3}} = \dfrac{2}{a^{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + a^{x-1} = 2a^{2x-2} \Rightarrow x = 1.$

h) se împarte cu $a^{\frac{1}{(x-2)(x-3)}}$ şi apoi se notează $a^{-\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 6 \Rightarrow x = 4.$

183. a) $a^x = 1 + (a-1)^x \Rightarrow 1 = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x + \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^x = f(x)$ unde f este strict descrescătoare, deci $x = 1$ este soluţie unică.

b) Ecuaţia se mai scrie $a^x - 1 = (\sqrt[n]{a^n - 1})^x \Leftrightarrow 1 = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x +$

$+\left(\sqrt[n]{\dfrac{a^n - 1}{a^n}}\right)^x = f(x)$, unde f este strict descrescătoare, deci $x = n$ este soluţie unică a ecuaţiei.

c) Împărţim ambii membri cu a^{nx} şi obţinem:

$$\left[\frac{(a+1)^n - a^n}{a^n}\right]^x = \left[\frac{(a+1)^x - a^x}{a^x}\right]^n \Leftrightarrow \left[\left(\frac{a+1}{a}\right)^n - 1\right]^x = \left[\left(\frac{a+1}{a}\right)^x - 1\right]^n \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (c^n - 1)^x = (c^x - 1)^n$, unde $c = \dfrac{a+1}{a} > 1$ şi se procedează ca în exerciţiul precedent.

d) Se împart ambii membri ai ecuaţiei cu b^{nx} şi obţinem

$\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^x - 1\right]^n = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1\right]^x \Leftrightarrow (c^x - 1)^n = (c^n - 1)^x$, unde $c = \dfrac{a}{b} > 1$ şi se procedează ca la b) sau $a^x - b^x = (\sqrt[n]{a^n - b^n})^x \Leftrightarrow 1 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x +$

$+\left(\sqrt[n]{\dfrac{a^n - b^n}{a^n}}\right)^x = f(x)$, f strict descr. $\Rightarrow x = n$ sol. unică.

184. Se împarte cu membrul drept şi se obţine o ecuaţie de forma $f(x) = 1$, unde f este strict descrescătoare $\Rightarrow$ a) $x = 1$, b) $x = 3$, d) $x = 1$.

c) $9^x + 3^{\frac{1-x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{3}} + \ldots + 3^{\frac{1-x}{n}} = (n+8)^x$. Se împarte cu $(n+8)^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 11.$

e) Membrul stîng este mai mare decît $2n$, iar membrul drept este mai mic decît $2n$, soluţia unică $x = 0$.

185. Aplicînd inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{n}{1+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}} \leqslant \frac{1+2^x+\ldots+n^x}{n} \Leftrightarrow$$

$$(1^x+2^x+\ldots+n^x)\left(\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}\right) \geqslant n^2$$

și $x^{2n} \geqslant 0$, egalitate doar pentru $x = 0$.

186. Ecuația se mai scrie

$$2^x+\frac{1}{2^x}+3^x+\ldots+n^x+\frac{1}{n^x}=2n-2,$$

dar $k^x+\frac{1}{k^x} \geqslant 2$ egalitate doar pentru $x = 0$, deci

$\sum_{k=2}^{n} k^x+\frac{1}{k^x} \geqslant 2n-2$, egalitate pentru $x = 0$, soluție unică $x = 0$.

187. Evident din $k^x + k^{-x} \geqslant 2$, rezultă că membrul stîng este mai mare decît $2n$, iar membrul drept este mai mic decît $2n$, egalitate numai pentru $x = 0$.

188. Considerăm funcțiile $f_k(x) = (1 + a_k)^x - a_k^x - 1$, $k = \overline{1, \ldots n}$, deci ecuația se scrie $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 0$. Ecuația are soluția unică $x = 1$.

Într-adevăr, din studiul semnului funcției $f(x)$ avem $f_k(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 1)$ și $f_k(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$, prin urmare $(\forall)\ x \in (-\infty, 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(x) < 0$ și $(\forall)\ x \in (1, \infty) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(x) > 0$, de unde rezultă că singura soluție este $x = 1$, pentru care $f_k(1) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, \ldots n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(1) = 0$.

189. a) Arătăm că $x = 2$ este soluție unică. Într-adevăr fie

$$A = e^{x^2-2x} - 1 \text{ și } B = 2 - x;\ xe^{2x}(e^{x^2-2x} - 1) = 2 - x.$$

Dacă $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow A > 0$ și $B < 0$,
$x \in [0, 2) \Rightarrow A \leqslant 0$ și $B > 0$,
$x \in (2, \infty) \Rightarrow A > 0$ și $B < 0$.

b) Arătăm că ecuația nu are soluții. Într-adevăr fie:

$A = e^{x^2-2x} - 1$ și $B = 2x - x^2$, $x = 0$ și $x = 2$ nu verifică ecuația

$$e^{2x}(2x - x^2)(e^{x^2-2x} - 1) = e^x \Rightarrow e^x(2x - x^2)(e^{x^2-2x} - 1) = 1.$$

Dacă $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow B < 0$ și $A > 0$,
$x \in (0, 2) \Rightarrow B > 0$ și $A < 0$,
$x \in (2, \infty) \Rightarrow A > 0$ și $B < 0$.

190. Ecuația se mai scrie: $\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^x+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^x+\ldots+$
$+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^x=\frac{1}{2}\left[\ln(a_1-x)+\ln(a_2-x)+\ldots+\ln(a_n-x)\right]+n,$
unde $x<\min\limits_{k=1,2,\ldots n} a_k$ și $a_k+\frac{1}{a_k}\geqslant 2$.
Evident $x=0$ este soluția unică a ecuației deoarece funcția $f(x)=$
$=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^x$ este strict crescătoare, iar funcția $g(x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(a_k-$
$-x)+n$ este strict descrescătoare.

191. a) Ecuația se mai scrie: $(5^x-1)^2+2^{y-1}(5^x-1)-3\cdot 2^{2y}=0$
$\Rightarrow z^2+2^{y-1}\cdot z+3\cdot 2^{2y}=0$ cu $5^x-1=z$; $z_1=-2^{y+1}$, $z_2=3\cdot 2^{y-1}$.
Obținem ecuațiile $5^x-1=-2^{y+1}\Rightarrow 5^x+2^{y+1}=1$ ecuație care nu are soluție și ecuația $5^x-1=3\cdot 2^{y-1}$ (1).
Observăm că pentru $y\in\{0,1,2,3\}$ ecuația nu are soluție pentru $y=4\Rightarrow$
$\Rightarrow x=2$.
Dacă $x=2m+1$, atunci ecuația (1) devine $5^{2m+1}-1=3\cdot 2^{y-1}=$
$=5^{2m}+5^{2m-1}+\ldots+5+1=3\cdot 2^{y-3}$, unde membrul stîng este impar, iar cel din dreapta par (pentru $y\geqslant 5$).

Dacă $x=2m$, ecuația (1) devine:
$25^m-1=3\cdot 2^{y-1}$ (2) $\Rightarrow 25^{m-1}+25^{m-2}+\ldots+25+1=2^{y-4}$
unde, pentru m impar membrul stîng este impar, iar cel drept este par, iar pentru m par ecuația (2) devine
$25^{2k}-1=3\cdot 2^{y-1}\Rightarrow 624\,(625^{k-1}+\ldots+625+1)=3\cdot 2^{y-1}\Rightarrow$
unde membrul din stînga este divizibil cu 13, absurd. Așadar unica soluție este $x=2$, $y=4$.

b) Ecuația se mai scrie:
$(5^x-1)^2-3^{y+2}(5^x-1)+8\cdot 9^y=0$. Notînd cu $z=5^x-1\Rightarrow z^2-$
$-3^{y+2}\cdot z+8\cdot 9^y=0\Rightarrow z_1=3^y$, $z_2=8\cdot 3^y\Rightarrow 5^x-1=3^y$ (1) și
$5^x-1=8\cdot 3^y$ (2).
Ecuația (1) nu are soluții naturale deoarece membrul stîng este par, iar cel drept este impar. Ecuația (2) are soluția $x=2$, $y=1$, se arată ca în exercițiul precedent

192. $2^{x^2+2}[2^{y-4}-1]=2^6\cdot 31\Rightarrow x^2+2=6$ și $2^{y-4}=32\Rightarrow(x_1,y_1)=$
$=(2,9)$; $(x_2,y_2)=(-2,9)$.

193. a) Se aplica inegalitatea mediilor și obținem:
$2^{x-1}+2^{y-1}\geqslant 2\sqrt{2^{x+y-2}}=2^{\frac{x+y}{2}}$, egalitate doar pentru $x=y=1$
b) În mod analog rezultă
$$2^{x-1}+2^{y-1}+2^{z-1}+1\geqslant 4\sqrt[4]{2^{x+y+z-3}}=2^{\frac{x+y+z+5}{4}}$$
egalitate dacă $x=y=z=1$.

194. a) Dacă $x\neq 0$ și $z\neq 0$, atunci $2^x+3^y+4^z$ este impar, deci egalitatea nu se poate realiza.
Dacă $x=0\Rightarrow 3^y+4^z=2049$, pentru $y\neq 0$ ecuația nu are soluții, deoarece 3^y și 2049 sînt divizibile cu 3 iar 4^z nu este, deci pentru $y=0\Rightarrow 4^z=$
$=2048$, care nu are soluții naturale.

Dacă $z = 0 \Rightarrow 2^x + 3^y = 2049$ şi raţionînd ca mai sus $\Rightarrow y = 0$ şi $x = 11$ deci soluţia ecuaţiei este $x = 11$, $y = 0$, $z = 0$.

b) Ţinînd seama că $1920 = 2^7 \cdot 15$ şi că

$$2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{x-z} + 2^{t-x}),$$

unde paranteza este număr impar, deducem $2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$ şi $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 15 \Rightarrow 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 14 \Rightarrow 2^{y-x}[1 + 2^{z-y} + 2^{t-y}] = 14 = 2 \cdot 7$.

Raţionînd ca mai sus rezultă $2^{y-x} = 2$ şi $2^{z-y} + 2^{t-y} = 6$, deci $y - x = 1$ şi $2^{z-y}(1 + 2^{t-z}) = 2 \cdot 3 \Rightarrow z - y = 1$ şi $t - z = 1 \Rightarrow x = 7$, $y = 8$, $z = 9$, $t = 10$.

c) (5, 5, 3), (5, 3, 5), (3, 5, 5).

195. Fie $y = 2n$, $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 3^{2n} - 1 = 2^x \Rightarrow 8(9^{n-1} + 9^{n-2} + \ldots + 9 + 1) = 2^x \Rightarrow 9^{n-1} + 9^{n-2} + \ldots + 9 + 1 = 2^{x-3}$ (1).

Dacă n = impar, atunci membrul stîng este impar şi deci (1) este posibil dacă $x = 3$ şi $n = 1$, deci ecuaţia are soluţia (3, 2).

Dacă n = par, atunci $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$ atunci $3^{4k} - 1 = 2^n \Leftrightarrow 80(3^{k-1} + 3^{k-2} + \ldots + 3 + 1) = 2^x$ (2).

Cum membrul stîng al egalităţii (2) se divide cu 5 iar membrul drept nu deci egalitatea (2) nu poate avea loc.

Fie $y = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$, ecuaţia se scrie $3^{2n+1} - 1 = 2^x \Leftrightarrow 3^{2n} + 3^{2n-1} + \ldots + 3 + 1 = 2^{x-1}$ cu membrul stîng impar rezultă că egalitatea este satisfăcută numai dacă $k = 1$ şi $n = 0 \Rightarrow x = 1$, $y = 1$.

Deci soluţiile sînt (1, 1) şi (3, 2).

196. $3^x = (y + 1)(y^2 - y + 1)$, deci $(\exists)$ $u, v \in \mathbf{N}$ a.î. $y + 1 = 3^u$ şi $y^2 - y + 1 = 3^v$. Din $y + 1 = 3^u \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 3^{2u} \Rightarrow y = 3^{2u-1} - 3^{v-1}$. Din ecuaţia dată rezultă $(3, y) = 1$ deci din $y = 3^{v-1}[3^{2u-v} - 1] \Rightarrow v = 1$ sau $2u - v = 0$. Dacă $v = 1 \Rightarrow y^2 - y + 1 = 3 \Rightarrow y = 2$ şi $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$. Dacă $2u - v = 0 \Rightarrow y = 0$ şi deci $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Soluţiile sînt (0, 0) şi (2,2).

197. $2^x \cdot 5^y = (3 - 1)\underbrace{(3^{z-1} + \ldots + 1)}$ ·

z numere impare, dacă z = impar, $z = 2q + 1$

rezultă $x = 1$ şi ecuaţia devine $2 \cdot 5^y + 1 = 3^{2y+1} \Leftrightarrow \mathcal{M}5 + 1 = 3 \cdot 9^q \Leftrightarrow \mathcal{M}5 + 1 = \mathcal{M}5 + 3(-1)^q$ imposibil. Deci z = par $z = 2 \cdot q$,

$2^x \cdot 5^y + 1 = 9^q$ şi q = par; $(3^q - 1)(3^q + 1) = 2^x \cdot 5^y$ de unde rezultă:

$$(1)\quad \begin{cases} 3^q - 1 = 2^u \cdot 5^y \\ 3^q + 1 = 2^v \end{cases} \quad u \leqslant v,\ u + v = x \text{ sau } \begin{cases} 3^q - 1 = 2^u \\ 3^q + 1 = 2^v \cdot 5^y. \end{cases} \quad (2)$$

Din (1) rezultă $2 = 2^u(2^{v-u} - 5^y) \Rightarrow u = 1$, $v = x - 1 \Rightarrow 1 = 2^{x-2} - 5^y \Rightarrow 5^y = 2^{x-2} - 1 \Rightarrow x - 2 = \text{par}$ (modulo 5).

$$5^y = 2^{2k} - 1 \Rightarrow 5^y = (2^k - 1)(2^k + 1) \Rightarrow \begin{cases} 2^k - 1 = 5^\alpha, \\ 2^k + 1 = 5^\beta, \end{cases} \quad \alpha \leqslant \beta,\ \alpha + \beta = y$$

$\Rightarrow 2 = 5^\alpha(5^{\beta-\alpha} - 1) \Rightarrow \alpha = 0$.

$\Rightarrow 2^k - 1 = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 3 = 5^\beta$ imposibil, Deci (1) nu are sol. naturale.

Din (2) $\Rightarrow 2 = 2^v \cdot 5^y - 2^u$ rezultă sau $u = 1$ sau $v = 1$.
Fie $u = 1 \Rightarrow 4 = 2^v \cdot 5^y \Rightarrow y = 0$, $v = 2$, $x = 3$, $z = 2$.
Pentru $v = 1 \Rightarrow 1 = 5^y - 2^{u-1}$ care se rezolvă asemănător cu cea de la sist. (1) cu soluția $y = 1$, $u = 3$, $x = y$, $z = 4$.

G.M. 12/1985

198. Pentru $y = 0$ $3^x + 1 = z^2 \Leftrightarrow (z-1)(z+1) = 3^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z - 1 = 3^x \\ z + 1 = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z + 1 = 3^x \\ z - 1 = 1 \end{cases}$$

primul sistem nu are soluții naturale, iar al doilea are soluția $z = 2$, $x = 1$.
Pentru $y \geqslant 1$ $(z-1)(z+1) = 2^y \cdot 3^x$, z impar și

$\begin{cases} z - 1 = 2^u \cdot 3^x, \\ z + 1 = 2^v, \end{cases}$ $u \leqslant v$ sau $\begin{cases} z - 1 = 2^u \\ z + 1 = 2^v \cdot 3^x \end{cases}$. Din primul sistem rezultă

$2 = 2^u (2^{v-u} - 3^x) \Rightarrow u = 1$, $v = y - 1$ și $1 = 2^{y-2} - 3^x$ $1 = 2^{y-2} - 3^x$

$3^x = 2^{y-2} - 1 \Rightarrow y > 3$ și $3^x = (3-1)^{y-2} - 1 \Rightarrow y - 2 = \text{par}$

$3^x = 2^{2k} - 1 \Rightarrow x - \text{impar}$, $x = 2x' + 1$ $3^{2x'+1} + 1 = 4^k \Leftrightarrow$

$\underbrace{3^{2x'} + 3^{2x'-1} + \ldots + 3 + 1}_{\text{impar}} = 4^{k-1} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y - 2 = 2$, $y = 4$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z = 7$.

Din sistemul al doilea $2 = 2^u(2^{v-u} \cdot 3^x - 1) \Rightarrow u = 1$ $v = y - 1$
$1 = 2^{y-2} \cdot 3^x - 1 \Rightarrow 2 = 2^{y-2} \cdot 3^x \Rightarrow y - 2 = 1$, $y = 3$, $x = 0$, $z = 3$.

199. Dacă $x = 1$ atunci $y = 1$ și reciproc.
Fie atunci $x > 1$ și $y > 1$. Să arătăm că în acest caz ecuația nu are nici o soluție. Dacă $a = \text{par}$ atunci $x = 1$ căci în caz contrar devine fals. Faptul că 2^{x-1} divide pe $(a+1)^x$ care este impar. Fie deci $a = \text{impar}$ $a = 2t - 1$, $t > 1$ și ecuația se scrie $2t^x = (2t-1)^y + 1$. Deci aici rezultă $y = \text{impar}$ căci în caz contrar am avea $2t/2$, $t = 1$. Dezvoltînd după binomul lui Newton, ecuația devine:

$$2t^x = (2t)^y - y(2t)^{y-1} + \ldots + y(y-1)2t^2 + 2ty.$$

Observăm că $t \mid y$ și cum y este impar, t impar:
$(2t-1)^t + 1 \mid (2t-1)^y + 1 = 2t^x$. Dar $(2t-1)^t + 1 = 2t^2(mt+1)$, unde m este un anume număr natural >1, pentru $t > 1$.
Din $2t^2(mt+1) \mid 2t^x$ rezultă $mt + 1 \mid t^{x-2}$, dar $(mt+1, t^{x-2}) = 1$ și $mt + 1 > 1$ contradicție ceea ce încheie demonstrația.

200. Pentru ca ecuația să aibă soluții trebuie ca x să fie par.
Deci membrul stîng al ecuației este $\mathcal{M}4 + 1$ și pentru ca membrul drept să aibă aceeași formă trebuie ca z să fie par.
Fie $z = 2u$ și ecuația se scrie $3^{2u} - x^2 = 5^y$ de unde $3^u - x = 5^\alpha$ și $3^u + x = 5^\beta$ cu $\alpha + \beta = y$, de unde $2 \cdot 3^u = 5^\alpha(5^{\beta-\alpha} + 1)$, din care deducem $\alpha = 0$, $\beta = y$ și ecuația precedentă devine $2 \cdot 3^u = 5^y + 1$. Pentru $u > 1$ această ecuație nu are soluție. Într-adevăr, observăm că y trebuie să fie impar și dezvoltînd după binomul Newton, avem $2 \cdot 3^u = (6-1)^y + 1 = 6^y - \ldots - \frac{y(y-1)}{2}6^2 + 6y$, de unde deducem $y = 3k$ cu k impar, deci $2 \cdot 3^u = 5^{3k} + 1$ și cum $5^3 + 1 \mid 5^{3k} + 1$ ar trebui ca $5^3 + 1$ să dividă

pe $2 \cdot 3^u$. Dar $5^3 + 1 = 2 \cdot 7 \cdot 9$ şi deci nu poate divide pe $2 \cdot 3^u$. Deci $u \leqslant 1$.
Pentru $u = 0$ găsim $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Pentru $u = 1$ găsim $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

201. La împărţirea prin 13, numărul întreg x^3 dă unul din resturile (minime în valoare absolută) $0, \pm 1, \pm 5$, deci $x^3 + 7$ dă unul din resturile $-6, -5, -1, 2, 6$. Dar y^4, la împărţirea prin 13, dă unul din resturile $-4, 0, 1, 3$. (variantă: ec. $x^4 + 6 = y^3$ nu are sol. în $\mathbf{Z}$).

202. Evident $y =$ par. Pentru $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$.
Fie $y \neq 0$. Din congruenţa modulo 4, rezultă x par, $x = 2n$ şi din congruenţa modulo 3 rezultă z par, $z = 2v$ şi rezultă $3^{2u} + y^2 = 5^{2v}$ iar de aici rezultă $3^u = a^2 - b^2$; $y = 2ab$; $5^v = a^2 + b^2$ cu a, b prim între ei, de paităţi diferite, de unde $(a - b, a + b) = 1$, şi deci $a - b = 1$, $a + b = 3^u$, iar ultima ecuaţie devine $2 \cdot 5^v = 9^u + 1$ cu soluţie unică $v = 1$, $u = 1$ (de unde $x = 2$, $z = 2$ şi $y = \pm 4$) rezultînd din congruenţa mod 5^α.

203. Fie, mai întîi, $x > 1$. Studiind ecuaţia mod. 9, rezultă $z = 3k$. şi ecuaţia se scrie $y^3 + 5^{3k} = 3^x$ sau $(y + 5^k)(y^2 - 5^k y + 5^{2k}) = 3^x$ de unde $y + 5^k = 3^\alpha$ şi $y^2 - 5^k y + 5^{2k} = 3^{x-\alpha}$, iar de aici $y + 5^k = 3^\alpha$ şi $5^k y = 3^{2\alpha - 1} - 1$ din care deducem $5^k(3^\alpha - 5^k) = 3^{2\alpha-1} - 1$. Dar 5 nu divide $3^{2\alpha-1} - 1$, şi deci $k = 0$, apoi $\alpha = 1$, $y = 2$, $z = 0$ şi $x = 2$.
Pentru $x = 1$, ecuaţia este $3 - y^3 = 5^z$ care nu are soluţie, deoarece y trebuind să fie par, membrul stîng este $\mathcal{M}8 + 3$, (deci şi $\mathcal{M}4 + 3$) în timp ce membrul drept este $\mathcal{M}4 + 1$.
Pentru $x = 0$, ecuaţia este $1 - y^3 = 5^z$ cu soluţia $y = 0$, $z = 0$.

204. Pentru $x = 0$ rezultă $y = 3$ şi $z = 3$. Pentru $x > 0$, din congruenţa mod. 3, rezultă y par, $y = 2v$. Pentru $y = 0$, $x = 1$, $z = 2$. Pentru $y = 2$, nu are soluţie. Pentru $y > 2$, din congruenţa modulo 8, (ţinînd seamă că $z^2 \equiv 1 \pmod 8$, z fiind impar) rezultă x par, $x = 2u$, astfel că ecuaţia devine:

$$3^{2u} + 2^{2v} = z^2 \text{ de unde rezultă}$$

$$(*)\quad 3^u = a^2 - b^2;\ 2^v = 2ab;\ z = a^2 + b^2,$$

cu a, b primi între ei, de paităţi diferite şi deci $(a - b, a + b) = 1$. Din aceste considerente şi din primele două ecuaţii din $(*)$ rezultă $u = 1$ şi $v = 2$ şi deci soluţia $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$.

205. Din congruenţa modulo 3, rezultă x impar. Deci $x \geqslant 1$.
Din congruenţa mod. 5 rezultă z par. Fie $z = 2k$ şi ecuaţia se scrie

$$(3^k + 2)(3^k - 2) = 5^x \cdot 7^y. \text{ De aici rezultă}$$

$$\begin{cases} 3^k + 2 = 5^\alpha \cdot 7^\beta \\ 3^k - 2 = 5^{x-\alpha} 7^{y-\beta} \end{cases} \text{ unde } \alpha \text{ sau } x - \alpha \text{ este 0 şi } \beta \text{ sau } y - \beta \text{ este 0.}$$

Nu putem avea $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ fiindcă ar însemna $3^k + 2 = 1$. Nici $\alpha = 0$ şi $y - \beta = 0$ fiindcă $3^k + 2 = 7^y$ nu poate avea loc modulo 3. Din $x - \alpha = 0$ şi $y - \beta = 0$ rezultă $3^k - 2 = 1$, deci $k = 1$, $z = 2$ şi apoi $x = 1$, $y = 0$.
În fine $x - \alpha = 0$ şi $\beta = 0$ şi sistemul devine $\begin{cases} 3^k + 2 = 5^x \\ 3^k - 2 = 7^y \end{cases}$
Din $3^k + 2 = 5^x$ modulo 5 rezultă k impar, iar dacă $y > 0$ din $3^k - 2 \equiv 0$ (mod. 7) rezultă k par, contradicţie deci $y = 0$ şi apoi $k = 1$, $x = 1$.

206. Distingem cazurile $y = 1$ și $y > 1$ și raționăm prin reducere la absurd.

a) Fie $y = 1$. Presupunem că există o soluție a ecuației $3^x + 2 = 5^z$ cu $x > 1$. Din congruența modulo 4 rezultă x impar. Din congruența modulo 9, cum $x > 1$, $3^x + 2 \equiv 2 \pmod 9$ și pentru a avea și $5^z \equiv 2 \pmod 9$ rezultă $z = 6m + 5$, m natural. Din congruența modulo 7, cum $5^z \equiv 5^5 \equiv 3 \pmod 7$ trebuie să avem și $3^x + 2 \equiv 3 \pmod 7$ sau $3^x \equiv 1 \pmod 7$ de unde rezultă $x = 6k$, deci x par contradicție.

b) Fie $y > 1$, deci $y \geqslant 3$. Din congruența mod 4, rezultă x par. Pentru $x = 0$ ecuația nu are soluție fiindcă $1 + 2^y \equiv 0 \pmod 3$, însă $5^z \not\equiv 0 \pmod 3$. Dar nici pentru $x > 0$ ecuația nu are soluție, fiindcă din congruența mod. 3 rezultă z impar, iar din congruența modulo 8 rezultă $3^x + 2^y \equiv 1 \pmod 8$ și $5^z \equiv 5 \pmod 8$, deci $3^x + 2^y \not\equiv 5^z \pmod 8$.

207. Scriind ecuația dată sub forma

$(4 - 1)^x + 4^y = (4 + 1)^z$ deducem că x trebuie să fie par. Fie $x = 2n$. Scriind-o sub forma:

$3^x + (3 + 1)^y = (2 \cdot 3 - 1)^z$ deducem că și z trebuie să fie par. Fie $z = 2w$ și ecuația devine

$4^y = 5^{2w} - 3^{2u} = (5^w - 3^u)(5^w + 3^u)$ iar de aici, ținînd seamă de unicitatea descompunerii în factori primi, avem

$$5^w + 3^u = 2^a,\ 5^w - 3^u = 2^b \quad a + b = 2y,\ a > b,$$

de unde prin scăderea acestora avem $2 \cdot 3^u = 2^b(2^{a-b} - 1)$, iar de aici deducem $b = 1$ deci $3^u = 2^{a-1} - 1$ din care, scrisă sub forma $3^u = (3 - 1)^{a-1} - 1$, rezultă $a - 1$ par. Fie $a - 1 = 2\alpha$ și deci $3^u = 2^{2\alpha} - 1 = (2^\alpha - 1)(2^\alpha + 1)$, de unde deducem $2^\alpha - 1 = 3^t$, $2^\alpha + 1 = 3^s$ cu $t + s = u$, $t < s$, iar de aici rezultă $2 = 3^t(3^{s-t} - 1)$, de unde $t = 0$, $s = 1$, $\alpha = 1$ $a = 3$ și din $5^w + 3^u = 8$ rezultă $w = 1$, $u = 1$ și prin urmare unica soluție $x = y = z = 2$.

208. Pentru $y \geqslant 2$, avem $y^{x+y} = y^x \cdot y^y > y^x + y^y$ și din ecuație rezultă $x^z > y^x$, deci $x > y$. Avem apoi, $x^x < x^x + y^y = y^{x+y} - 1 < y^{2x}$ și deci $x < y^2$, adică $x + 1 \leqslant y^2$ (1).

Ecuația se mai scrie $x^x + 1 = y^y(y^x - 1)$, sau

$$(x + 1)\frac{x^x + 1}{x + 1} = y^y(y^x - 1) \qquad (2).$$

Deoarece x este impar, $(x^x + 1)/(x + 1)$ este un întreg impar și deoarece $2/y$, $2^y/y^y$, din (2) rezultă $2^y/x + 1$, deci $x + 1 \geqslant 2^y$. De aici și din (1) rezultă $2^y \leqslant x + 1 \leqslant y^2$ (3).

Dar $2^y \leqslant y^2$ se verifică numai pentru $y = 2$ și $y = 4$, cărora le corespund din (3), respectiv $x = 3$ și $x = 15$. Verifică ecuația numai perechea $x = 3$, $y = 2$ (a doua nu o verifică mod. 3).

209. Cubul oricărui număr întreg dă prin împărțirea la 7 unul din resturile $-1, 0$ sau 1. Deci și expresiile $x^3 + 7y$, $y^3 + 7x$ vor da prin împărțirea la 7 unul din resturile $-1, 0, 1$.

Puterile lui 2, dau prin împărțirea la 7:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
restul lui 2^n	1	2	4	1	2	3	1	

resturile 1, 2 sau 4 după cum n este de forma $3m$, $3m + 1$ sau $3m + 2$. Rezultă că la împărțirea prin 7 expresia $x^3 + 7y$ și 2^n au comun doar restul 1 în care caz $u = 3m$. Analog, $v = 3k$.
Notînd $2^m = t$ și $2^k = z$ sistemul devine:

$$(*) \begin{cases} x^3 + 7)y = t^3 \\ y^3 + 7x = z^3. \end{cases}$$

Datorită simetriei expresiilor $x^3 + 7y$ și $y^3 + 7x$ putem presupune ordinea $x \leqslant y$. Din a doua ecuație a sistemului $(*)$ rezultă

$$y^3 < z^3 = y^3 + 7x \leqslant y^3 + 7y < (y + 2)^3$$

deci $y^3 < z^3 < (y + 2)^3$, de unde rezultă $z^3 = (y + 1)^3$,
adică $y^3 + 7x = (y + 1)^3$, și atunci $7x = 3y^2 + 3y + 1$.
De aici și din $x \leqslant y$, vom avea $3y^2 + 3y < 3y^2 + 3y + 1 \leqslant 7y$, de unde rezultă $y = 1$ și deci $x = 1$.

210. Pentru $y = 0$, ecuația nu are soluție, fiindcă $2^x = z^3 - 1$ dar $z^2 + z + 1$ este impar. Fie $y > 0$. Atunci din ecuație rezultă $7 \nmid z$. Cubul unui număr întreg dă prin împărțirea la 7 resturile 0, 1 sau 6 iar 2^x dă resturile 1, 2 sau 4 după cum $x = 3u$, $x = 3u + 1$ sau $x = 3u + 2$. Pentru ca ecuația să aibă soluție este necesar ca $x = 3u$ și ea devine $2^{3u} + 7^y = z^3$ sau $(*)$ $7^y = (z - 2^u)(z^2 + 2^u z + 4^u)$. Dacă $7 | z - 2^u$ rezultă că $7 \nmid z^2 + 2^u z + 4^u$ și deci contradicție cu $(*)$. Deci $7 \nmid z - 2^u$ și din $(*)$ rezultă $z - 2^u = 1$ și ecuația $(*)$ devine

$$(**)\ 7^y = 3 \cdot 2^{2u} + 3 \cdot 2^u + 1.$$

Pentru $u = 0$ avem $y = 1$. Pentru $u = 1$ nu avem y întreg. Fie $u > 1$. Din $(**)$ deducem $2^u | 7^y - 1$ deci y par, și din binom avem $2^u | (8 - 1)^y - 1 = \ldots + \frac{y(y-1)}{2} 8^2 - 8y$ și deci $2^u | 8y \Rightarrow 2^u \leqslant 8y$ iar de aici și din $(**)$ găsim

$$7^y < 3 \cdot 8y(8y + 1) + 1 < 3 \cdot 8y \cdot 9y < 7^3 y^2 \text{ sau } 7^{y-3} < y^2$$

de unde $y \leqslant 4$ și $u \leqslant 5$ iar de aici prin încercări în ecuația $(**)$ (observînd că și u trebuie să fie multiplu de 3) nu mai obținem alte soluții. Deci singura soluție $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ variantă: $2^x + 7^y = z^2$.

211. Fie $a = (x - 1)^2$, $b = (y - 1)^2 + 1$, $c = (z - 2)^2 + 1$, $a, b \in \mathbf{N}^+$. Deoarece 2^b și 2^c sînt numere pare, atunci 2^a este impar $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 1$. Ecuația devine $2^b + 2^c = 528$.
Presupunînd $b < c \Rightarrow 2^b(1 + 2^{c-b}) = 2^4 \cdot 33$ singura posibilitate este $2^b = 2^4$ și $1 + 2^{c-b} = 33 \Rightarrow b = 4$, $c = 9 \Rightarrow y \in \{-1, 3\}$. Dar $z \in \{-1, 5\}$. Dacă $b = c \Rightarrow b \notin \mathbf{N}$.
Pentru $b > c$ obținem $b = 9$, $c = 4 \Rightarrow y \in \{-2, 4\}$, $z \in \{0, 4\}$. Deci soluțiile ecuației sînt $(1, -1, -1)$, $(1, -1, 5)$, $(1, 3, -1)$, $(1, 3, -5)$, $(1, -2, 0)$, $(1, -2, 4)$, $(1, 4, 0)$, $(1, 4, 4)$.

212. Ecuația se mai scrie:

$$(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^x + \frac{1}{(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^x} = 2(2x^2 - 1)$$

unde $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$. Notînd cu $t = |x| + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow t^2 - 2t(2x^2 - 1) + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

213. Evident $x = 1$ este soluție. Arătăm că este unică.

Ecuația se mai scrie:

$$2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}+1} = 6 \Rightarrow 6 = 2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geqslant 3\sqrt[3]{2^x + \frac{2}{\sqrt{x}}} \geqslant 3\sqrt[3]{2^3},$$

egalitate doar pentru $x = 1$.

G.M. 1/1.988

214. Evident $x = 1$ este soluție unică.

Pentru $x < 0 \Rightarrow a^{x-1} + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}} < 2$, dar $a + 1 \geqslant 3$. Pentru $x > 0$, rezultă:

$$a^x + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}+1} = a^2 + a \Leftrightarrow a^2 + a = a^x + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}} + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}} + \ldots + a^{\frac{1}{a\sqrt{x}}} \geqslant$$

$$\geqslant (a+1)\sqrt[a+1]{a^{x+\frac{a}{a\sqrt{x}}}} \geqslant a^2 + a \text{ egalitate doar pentru } x = 1.$$

$$x + \frac{a}{a\sqrt{x}} \geqslant a + 1 \Leftrightarrow t^{a+1} - t(a+1) + a \geqslant 0 \text{ unde } t = \sqrt[a]{x} \text{ dar}$$

$$t^{a+1} = (1 + t - 1)^{a+1} \geqslant 1 + (a+1)(t-1) \text{ (Bernoulli).}$$

215. Utilizăm inegalitatea lui Bernoulli $(1+x)^\alpha > 1 + x\alpha$, $(\alpha > 1)$, $x > 0$ și $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, $\alpha \in (0, 1)$. Evident $x = 0$ și $x = 1$ sînt sol.

Ecuația se mai scrie: $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x = 1 + \frac{x}{a^x}$.

Dacă $x > 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1 + \frac{x}{a} > 1 + \frac{x}{a^x}$ iar dacă $0 < x < 1 \Rightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x < 1 + \frac{x}{a} < 1 + \frac{x}{a^x}$. Dacă $x < 0$ $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1 + \frac{x}{a} > 1 + \frac{x}{a^x}$

deci egalitate doar pentru $x \in \{0, 1\}$.

216. Dacă x_0 este soluție atunci și $\frac{1}{x_0}$ este soluție; 2 și $\frac{1}{2}$ sînt sol. ale ec. $210 = 48 + 162$

Ecuația se mai scrie $48\left[\left(\frac{4}{3^{1/x}}\right)^{x-2} - 1\right] = 162\left[1 - \left(\frac{9}{2^{1/x}}\right)^{x-2}\right]$ (1);

$48A(x) = 162\,B(x)$

α) Dacă $x > 2$ $4^x > 3 \Leftrightarrow 4 > 3^{1/x} \Rightarrow \frac{4}{3^{1/x}} > 1 \Rightarrow A(x) > 0$

iar $9^x > 2 \Rightarrow 9 > 2^{1/x} \Rightarrow \frac{9}{2^{1/x}} > 1 \Rightarrow B(x) < 0$ deci egalitatea (1) nu poate avea loc.

β) Dacă $x \in (1, 2) \Rightarrow 4^x > 3 \Rightarrow 4 > 3^{1/x} \Rightarrow \frac{4}{3^{1/x}} > 1 \Rightarrow A(x) < 0$ și

$9^x > 2 \Rightarrow 9 > 2^{1/x} \Rightarrow \frac{9}{2^{1/x}} > 1 \Rightarrow B(x) > 0$, deoarece $x - 2 < 0$. Evident $x = 1$ nu verifică ecuația.

γ) Fie $x_0 \in (0, 1) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ soluție a ecuației, atunci $\frac{1}{x_0}$ este soluție, dar $\frac{1}{x_0} \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ care în baza lui α) și β) nu poate verifica ec.

δ) Dacă $x < 0$, atunci $0 < 4^x a^{1/x} < 1$ și $0 < 9^x \cdot 4^{1/x} < 10 < 4^x \ 9^{1/x} + 9^x \ 4^{1/x} < 2$, deci egalitatea nu poate avea loc.

217. Ecuația se mai scrie $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \ln(x + \sqrt{1 \quad x^2})$. Dacă notăm $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, se arată că f este bijectivă și $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ Evident $x = 0$ este soluție a ecuației și $f(x)$ este impară. Vom arăta că ecuația nu are soluții pe $(0, \infty)$, de unde rezultă că nici pe intervalul $(-\infty, 0)$ nu are soluții.

Fie $h(x) = f(x) - x \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 > 0 \ (\forall) \ x > 0 \Rightarrow h$ strict crescătoare, deci pentru $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow f(x) > x$.

Fie $g(x) = f^{-1}(x) - x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} - 1 < 0 \Rightarrow g$ strict descrescătoare, deci pentru $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow f^{-1}(x) < x \Rightarrow f^{-1}(x) < x < f(x)$, $(\forall) \ x \in (0, \infty)$, rezultă că ecuația nu are soluții pe intervalul $(0, \infty)$.

218. a) $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

b) Evident $x! = 2k$, deci $3^{x!} = (4 - 1)^{x!} = 4a + 1$, $a \in \mathbf{Z}$ deci $2^{3^{x!}} = 2^{4a+1} = 16^a \ 2$, ultima cifră fiind 2, de unde rezultă că ultima cifră a numărului $2^{3^{x!}} + 1$ este 3, dar din $3^{2^{x!}} = 3^{4b} = 81^b$, rezultă că ultima cifră este 1.

219. Dacă $a = 1 \Rightarrow x^x = 1 \Rightarrow x = 1$.

Dacă $a > 1$, atunci logaritmînd avem $x^a \log_a x = 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow x > 1$ și $\log_a x = \frac{1}{x^a}$, unde $\log_a x$ strict crescătoare și $\frac{1}{x^a}$ strict descrescătoare, deci $x = a^{1/a}$ soluție unică.

Dacă $0 < a < 1$, atunci din $x^a \log_a x = 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$, deci $x = a^{1/a}$ soluție unică.

Dacă $a = 1 \Rightarrow x = 1$. Dacă $a \in (0, 1)$ logaritmînd:

$$\underbrace{a^x \log_a x}_{\text{s.descr.}} = \underbrace{x^a}_{\text{s.cresc.}} \Rightarrow x \in (0, 1) \Big\} \ x = a \text{ sol. unică.}$$

220. Evident $x = a$ verifică.

Fie x_0 soluție, $x_0 \neq a$.

Dacă $x_0 < a \Rightarrow x_0 \in (0, 1)$ și $a^{x_0} > a^a > x_0^a \Rightarrow a^{x_0} > x_0^a$.

Prin urmare avem $a^{a^{x_0}} > a^{a^a} > a^{x_0^a} \Rightarrow a < x_0$, contradicție

$$a^{a^{x_0}} < a^{x_0^a} = x_0^{a^{x_0}} \Rightarrow$$

Dacă $x_0 > a \Rightarrow a^{x_0} < a^a < x_0^a \Rightarrow a^{a^{x_0}} > a^{a^a} > a^{x_0^a} \Rightarrow a^{a^{x_0}} > a^{x_0^a} = x_0^{a^{x_0}} \Rightarrow$

$a > x_0$, contradicție.

221. a) $2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3$ notînd $2^{\sin^2 x} = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$
$\Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 2 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ sau $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1$
$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \{k\pi\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}.$$
b) $4 = 2^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \geqslant 2\sqrt{2^{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}} = 2\sqrt{2^{\operatorname{tg}^2 x + 1/\operatorname{tg}^2 x}} \geqslant 2\sqrt{4} = 4$,
egalitate doar dacă $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$.

222. $(\operatorname{tg} x)^x + (\operatorname{ctg} x)^x \geqslant 2\sqrt{(\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)^x} = 2$, dar $2 \sin 2x \leqslant 2$, deci egalitate pentru $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ și $\sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

223. Evident
$$x^{\lg y} = y^{\lg x},\ \text{deci ecuația se scrie.}$$
$$y^{2\lg x} - 2y^{\lg x} + 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \Leftrightarrow$$
$(y^{\lg x} - 1)^2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$, dar $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \geqslant 2$, egalitate doar pentru $\operatorname{tg} x = \pm 1$ și $y^{\lg x} = 1 \Rightarrow y = 1$ $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{N}^*$.

224. Evident funcțiile $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{ctg}^2 x$ au perioada principală $T = \pi$. Pe intervalul $(0, \pi/2)$ funcțiile $\sin^2 x$ și $\operatorname{tg}^2 x$ sînt strict crescătoare deci și funcția $f(x) = 4^{\sin^2 x} + 3^{\operatorname{tg}^2 x}$ este strict crescătoare, iar funcțiile $\cos^2 x$ și $\operatorname{ctg}^2 x$ sînt strict descr. $\Rightarrow g(x) = 4^{\cos^2 x} + 3^{\operatorname{ctg}^2 x}$ s. descr. egalitatea $f(x) = g(x)$ are loc numai pentru $x = \frac{\pi}{4}$. Pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ funcțiile f și g își schimbă monotoniile și deci ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția unică $x = 3\pi/4$. Prin urmare soluțiile ecuației sînt $\pm\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

225. Evident $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ și
$$\sqrt{2^{(x-\pi/4)} + 2^{-(x-\pi/4)}} \geqslant \sqrt{2} \left(\text{deoarece } 2^a + \frac{1}{2^a} \geqslant 2\right).$$
Prin urmare trebuie ca $2^{x-\pi/4} = 2^{-(x-\pi/4)}$ și $\sin x = \cos x$, de unde rezultă $x = \pi/4$.

226. Ecuația se mai scrie:
$(2^{\lg x} - 1)^2 = -(\sin y - 1)^2 \Rightarrow 2^{\lg x} - 1 = 0$ și $\sin y = 1 \Rightarrow x = 1$,
$$y = 2\pi k + \pi/2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

227. Evident, rezultă $\cos [\pi \log_2(x-4)] = 1$ și $\cos [\pi \log_2(x-1)] = 1 \Rightarrow \log_2(x-4) = 2k$, și $\log_2(x-1) = 2k_2 \Rightarrow$ unde $k_1, k_2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow 4^{k_1} = x - 4$ și $4^{k_2} = x - 1 \Rightarrow 4^{k_2} = x - 4 + 3 = 4^{k_1} + 3 \Rightarrow 4^{k_2} - 4^{k_1} = 3$ de unde rezultă $k_2 = 1$ și $k_1 = 0 \Rightarrow x = 5$
$\cos [\pi \log_2(x-4)] = 4$ și $\cos [\pi \log_2(x-1)] = -1 \Rightarrow x - 4 = 2^{2k_1+1}$ și $x - 1 = 2^{2k_2+1} \Rightarrow 2^{2k_2+1} = 2^{2k_1+1} + 3$ ecuație care nu are soluție. deoarece $2^{2k_2+1} - 2^{2k_1+1}$ este par.

228. 1) $4 \cdot \underset{(\sin x \cos x)^{-1}}{\log \sin x} \cdot \underset{(\sin x \cos x)^{-1}}{\log \cos x} = 1 \Leftrightarrow 4 \underset{\sin x \cos x}{\log \sin x} \underset{\sin x \cos x}{\log \cos x} = 1$
$\Leftrightarrow 4 \lg \sin x \lg \cos x = \lg^2 \sin x \cos x = (\lg \sin x + \lg \cos x)^2 \Rightarrow \Leftrightarrow (\lg \sin x - \lg \cos x)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4$. 2) în mod analog.

229. a) $\lg(1+\operatorname{tg}^2 x)+\lg(1+\operatorname{ctg}^2 x)=\lg(2+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)\geqslant \lg 4$. egalitate pentru $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\Rightarrow \operatorname{tg} x=\pm 1\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$.

b) $\lg(1+\sin^2 x)\lg(1+\cos^2 x)\leqslant\left(\frac{\lg(1+\sin^2 x)+\lg(1+\cos^2 x)}{2}\right)=$

$=\frac{1}{4}\lg^2(2+\sin^2 x\cos^2 x)\leqslant\lg^2\frac{3}{2}$ egalitate doar pentru $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$,

c) $\lg\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)+\lg\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}=\lg\frac{2+\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\lg\left(1+\frac{8}{\sin^2 2x}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 2x=1,\ \cos 4x=-1\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}$.

230. $\log_{\sec x}13{,}25=y\Rightarrow(\sec x)^y=13{,}25=1+12{,}25$

$\log_{\operatorname{tg} x}12{,}25=y\Rightarrow(\operatorname{tg} x)^y=12{,}25$, deci $(\sec x)^y=1+(\operatorname{tg} x)^y\Leftrightarrow$

$(\sin x)^y+(\cos x)^y=1\Rightarrow y=2$. (Dacă $y>2$, atunci

$(\sin x)^y<\sin^2 x$ și $(\cos x)^y<\cos^2 x\Rightarrow \sin^y x+\cos^y x<1$, în mod analog dacă $y<2\Rightarrow \sin^y x+\cos^y x>1$).

Prin urmare, din $\operatorname{tg}^2 x=12{,}25\Rightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{12{,}25}\Rightarrow x=\operatorname{arctg}\sqrt{12{,}25}=$

$=\operatorname{arctg} 3{,}5$.

231. Notăm $2\log_3(\operatorname{ctg} x)=\log_2(\cos x)=y\Rightarrow 2^y=\cos x$ și $3^y=\operatorname{ctg}^2 x$

$\Rightarrow 4^y=\cos^2 x,\ 3^y=\operatorname{ctg}^2 x=\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{4^y}{1-4^y}\Leftrightarrow 3^y-12^y=4^y\Leftrightarrow$

$12^y+4^y=3^y$, care evident are soluție unică $y=-1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$ și

$\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{3}$ de unde rezultă $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

232. Vom arăta că pe intervalul $[0,2\pi]$ soluțiile ecuației sînt $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=2\pi$, dar deoarece funcția $2^{\sin x}+2^{\cos x}$ este periodică cu perioada principală $T=2\pi$, rezultă că soluțiile ecuației sînt $\{2k\pi\}\cup$ $\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$. Notăm $\sin x=u$ și $\cos x=v$, deci $u^2+v^2=1$ și $2^u+2^v=3$ (1). Vom arăta că singurele valori posibile pentru u și v sînt $u=0$, $v=1$ și $u=1$, $v=0$. Din relația (1) rezultă că $(u,v)\in[0,1]$. Fie $u\in(0,1)$ atunci din

$2^u+2^{\sqrt{1-u^2}}=2^{u-1}+2^{u-1}+2^{\sqrt{1-u^2}}>3\sqrt[3]{2^{2u-2+\sqrt{1-u^2}}}\geqslant 3$, $(\forall)\ u\in\left[\frac{3}{5},1\right.$

deoarece $2u-2+\sqrt{1-u^2}\geqslant 0$, $(\forall)\ u\in[3/5,1)$ (prima inegalitate este strictă). În mod analog

$2^u+2^{\sqrt{1-u^2}-1}+2^{\sqrt{1-u^2}-1}>3\sqrt[3]{2^{u-2+2\sqrt{1-u^2}}}\geqslant 3$, $(\forall)\ u\in\left[0,\frac{4}{5}\right)\supset\left(0,\frac{3}{5}\right)$,

deoarece $u-2+2\sqrt{1-u^2}\geqslant 0$ $(\forall)\ u\in(0,415)$, deci singurele valori sînt $(u,v)=(1,0)$; $(u,v)=(0,1)$.

Altfel: se poate utiliza inegalitatea $2^x\geqslant x^2+1$, $(\forall)\ x\in[0,1]$ egalitate numai pentru $x=0$ și $x=1$, deci pentru orice $x\in[0,2\pi]-\left\{0,\frac{\pi}{2},2\pi\right\}$

$2^{\sin x}>\sin^2 x+1,\ 2^{\cos x}>\cos^2 x+1\Rightarrow 2^{\sin x}+2^{\cos x}>3$.

G.M. 1/1981

233. Dacă a este par, atunci $x = 1$, căci în caz contrar devine fals faptul că 2^{x-1} divide pe $(a-1)^x$ care este impar. Deci $x = 1$ şi corespunzător $y = 1$. Fie atunci a impar. Dacă $a = 3$, atunci din ecuaţie rezultă x arbitrar şi $y = 1$. Fie atunci $a > 3$. Punînd $(a-1)/2 = t \Rightarrow a = 2t+1$, cu $t > 1$, ecuaţia se scrie $2t^x = (2t+1)^y - 1$. Dacă $x = 1$, atunci $y = 1$ şi reciproc. Fie atunci $x > 1$ şi $y > 1$. Să arătăm că în acest caz ecuaţia nu are soluţii. În adevăr, dezvoltînd după binomul lui Newton ecuaţia devine:

$$2t^x = (2t)^y + y(2t)^{y-1} + \ldots + y(y-1)2t^2 + 2ty$$

Observăm mai întîi că t/y şi apoi că ultimul termen din membrul drept adică $2ty$ se divide cu o putere a lui t mai mică decît toţi ceilalţi termeni din ecuaţie, ceea ce conduce la imposibilitatea ei.

G.M. 3/1988; C. 771

234. Evident y impar. Dacă $x = 1 \Rightarrow y = 1$; Fie x impar, $x = 2k+1$, $k \geqslant 1$, $5^{2k+1} - 4^{2k+1} = y^2$. Membrul stîng este de forma $8k+5$, iar cel drept este diferit de $8k+5$.

Dacă $x = 2 \Rightarrow y = 3$. Dacă $x =$ par, $x = 2k$, $k \geqslant 2 \Rightarrow 5^{2k} - 4^{2k} = y^2$
$5^{2k} - y^2 = 4^{2k}$; $(5^k - y)(5^k + y) = 4^{2k}$;

$\begin{cases} 5^k - y = 16^m; \\ 5^k + y = 16^{k-m} \end{cases}$ sistem care nu are soluţii în $\mathbf{N}^2$. Deci soluţiile sînt $x = 1$, $y = 1$ şi $x = 2$, $y = 3$.

235. a) $\log_3(3^x - 1)[1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$. Se notează $\log_3(3^x - 1) = y$
$x_1 = \log_3 10$, $x_2 = \log_3 \frac{28}{27}$.

b) Ecuaţia este echivalentă cu $a^{2\log_b x} - 5a^{\log_b x} + 6 = 0$.

c) $x = 3$, d) $x = 4$, e) $x = \sqrt{5}$ f) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

g) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7+\sqrt{41}}{4}$, $h)$ $x = 16$.

i) $x^2\log_3 x^2 - (2x^2+3)\log_3(2x+3) = 3\log_3 \frac{x}{2x+3}$, $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

j) Ecuaţia se mai scrie

$$\log_2|x+1| + \log_2|x-2| - \log_2 \frac{|x-2|}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

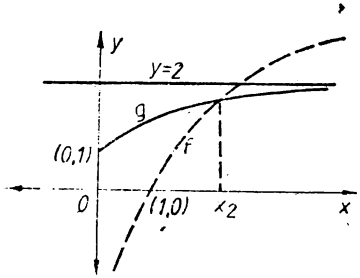


Fig. 17

k) $(\log_x 6 + \log_6 x + 1)^2 - \frac{9}{4} = 0$.

l) $(10^x \lg x - 1)(10^x \lg x - 2 \cdot 10^x + 1) = 0$
deci $\lg x = \left(\frac{1}{10}\right)^x \Rightarrow$ soluţie unică $x_1 \in (1, 10)$ (unicitatea rezultă din reprezentarea grafică a funcţiilor din cei doi membri).

Din ecuația $10^x \lg x = 2 \cdot 10^x - 1 \Leftrightarrow \lg x = 2 - \left(\frac{1}{10}\right)^x$ și din reprezentarea grafică a funcțiilor $f(x) = \lg x$ și $g(x) = 2 - \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

$f(x) = \lg x$ și $g(x) = 2 - \left(\frac{1}{10}\right)^x$ rezultă că ecuația are o singură soluție

$$x_2 \in (10, 100).$$

m) Ecuația este echivalentă cu

$$[\log_6(5x^2 - 2x - 3) - 2](x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$$

$x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{13}{5}$, unde domeniul de definiție $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup (1, \infty)$.

236. a) Domeniul de definiție $x \in (0, \sqrt{2})$ și deoarece $2x - x^2 \leqslant 1$ și $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant 1 \Rightarrow \log_3(2x - x^2) \leqslant 0$ și $\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leqslant 0$.

Dacă $a \neq -2$ și $a \neq 1$ atunci

$$[1 + (a + 2)^2] \log_3(2x - x^2) \leqslant \log_3(2x - x^2) \text{ și}$$

$[1 + (3a - 1)^2] \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, egalitatea doar dacă $\log_3(2x - x^2) = 0$, $\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$, care nu are soluție. Pentru $a = -2$ ecuația nu are soluție, iar pentru $a = \frac{1}{3}$ ecuația are soluția $x = 1$.

b) Dacă $a = 2 \Rightarrow x = -1$, dacă $a \neq 2$ ecuația nu are soluție.

237. a) $x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x} \Rightarrow 2^{\log_5 x} = 4 \Rightarrow \log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25$.

b) logaritmînd în baza 3 obținem $\log_3^2 x + \log_x 3 = 2 \Rightarrow$

$$\log_3^3 x - 2\log_3 x + 1 = 0$$

$\log_3 x = 1 \Rightarrow x_1 = 3$, $\log_3 x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = 3^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

c) $5^{\log_5^2 x} = (5^{\log_5 x})^{\log_5 x} = x^{\log_5 x} \Rightarrow x^{\log_5 x} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

d) $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{1}{6}$.

e) Ecuația este echivalentă cu $x^{\log_5 x} = x \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

f) Ecuația este echivalentă cu $x^{4\log_3 x} + x^{2\log_3 x} - 90 = 0$, notînd $x^{2\log_3 x} = y \Rightarrow y_1 = 9$, $y_2 = -10$, $2\log_3^2 x = 2 \Rightarrow \log_3 x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

238. $x = a^2$ este unica soluție a ecuației, care se mai scrie

$$b^{\log_a x} + c^{\log_a x} = a^{\log_a x} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} = 1.$$

Dacă $a > 1$ funcția este strict descrescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, este strict crescătoare deci soluția este unică.

Generalizare: $a_1^{\log_{a^k} x} + a_2^{\log_{a^k} x} + \ldots + a_n^{\log_{a^k} x} = x$ (1) unde $a_k \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ $k = \overline{1, \ldots n}$ şi $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = a^k$, ecuaţia (1) are soluţia $x = a^k$.

239. Notăm $\lg x = y$ şi ecuaţia devine:
$\sqrt{2y - y^2} + \sqrt{2y - y^2 + 3} + \sqrt{2y - y^2 + 8} = 6$, cu soluţia unică $y = 1$ şi cu condiţia $2y - y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in [0, 2] \Leftrightarrow 0 \leqslant \lg x \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 100$. Într-adevăr dacă $y \in [0, 1]$ funcţia din membrul stîng $f(y)$ este strict crescătoare deci $f(y) < f(1) \Rightarrow f(y) < 6$, iar dacă $y \in (1, 2)$, atunci funcţia este strict descrescătoare şi deci pentru $y > 1 \Rightarrow f(y) < f(1) \Rightarrow f(y) < 6$, deci soluţia ecuaţiei este $x = 10$. Altfel, ecuaţia se mai scrie $\sqrt{2y - y^2} - 1 + \sqrt{2y - y^2 + 3} - 2 + \sqrt{2y - y^2 + 8} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2\left[\frac{1}{\sqrt{2y - y^2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2y - y^2 + 3} + 2} + \frac{1}{\sqrt{2y - y^2 + 8} + 3}\right] = 0,$$

de unde rezultă $y = 1$, deoarece a doua paranteză este strict pozitivă.

240. Notînd $2^{x^2} = y$, obţinem $\log_2(y^2 + 4) = \log_2 \frac{y}{4} \pm \log_2(y + 14) \Rightarrow$ $3y^2 - 14y + 16 = 0$ pentu semnul „+" deci $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3 - \log_2 3}$ şi $4y^3 + 56y^2 + 15y + 224 = 0$ care nu are soluţii pozitive.

241. Ecuaţia este echivalentă cu $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{x}} = 4$ care are soluţia $x = 1$ deoarece pentru $x \neq 1$, $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 2$ şi deci $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{x}} > 4$.

242. $x > 0$ şi $x^2 + a \geqslant x^2 + \frac{1}{4} \geqslant x$; $\log_2(x^2 + a) \geqslant \log_2 x$

$$0 = \log_2^2 x + \log_2 x + \log_2(x^2 + a) + a + \frac{3}{4} \geqslant \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 + a - \frac{1}{4} = (\log_2 x + 1)^2 + \left(a - \frac{1}{4}\right) \geqslant 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

şi $\log_2 x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Pentru $a > \frac{1}{4}$ nu are soluţie.

243. Se trece în baza „a" şi ecuaţia este echivalentă cu:

a) $(\sqrt{\log_a |x + a|} - \sqrt{\log_a |x - a|})^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) Ecuaţia se mai scrie:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{\log_a x}} = a^2$$

rezultă $\log_a x > 0$, dar cum $a^2 \in \mathbf{N}^*$, $a^2 \geqslant 2$, rezultă $x > 1$

$$\log_a x + 1 + |\log_a x - 1| = a^2\sqrt{\log_a x}.$$

Dacă $x \geqslant a$, ecuaţia devine $2\log_a x = a^2\sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{a^4}{4} \Rightarrow x = a^{\frac{a^4}{4}} > a$ unde $a^4 \geqslant 4$ adică $a \geqslant \sqrt{2}$. Dacă $x \leqslant a$, ecuaţia devine $2 = a^2\sqrt{\log_a x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_a x = \frac{4}{a^4} \Rightarrow x = a^{\frac{4}{a^4}} < a \text{ unde } 4 \leqslant a^4 \text{ adică } a \geqslant \sqrt{2}.$$

244. a) Utilizînd formula $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ rezultă:

$x^2(1 - 3^{\log_2 x}) - (1 - 3^{2\log_2 x}) = 0 \Leftrightarrow (1 - 3^{\log_2 x})[x^2 - 1 - 3^{\log_2 x}] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{\log_2 x} = 1 \Rightarrow x = 1$ și $2^{\log_2 x^3} = 1 + 3^{\log_2 x} \Leftrightarrow 2^{2\log_2 x} = 1 + 3^{\log_2 x}$, notînd $\log_2 x = y$ obținem $4^y = 1 + 3^y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$.

b) $x^{\log_3(x-1)} + 2x^{\log_3(x-1)} = 3x^2 \Leftrightarrow x^{\log_3(x-1)} = x^2 \Rightarrow \log_3(x - 1) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 10$.

c) $(x + 1)^{\log_3|x-2|} + 2(x + 1)^{\log_3|x-2|} = 3(x + 1)^2 \Rightarrow \log_3|x - 2| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 2| = 9 \Rightarrow x_1 = 11$, $x_2 = -7 \notin (-1, \infty) - \{2\}$ și $x + 1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_2 = 0$.

d) Notînd $\log_2 x = y \Rightarrow y^2 + (x - 1)y + 2x - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = -2$, $y_2 =$
$= 3 - x$ deci $\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ și $\log_2 x = 3 - x$ cu soluția $x = 2$
(funcțiile $f(x) = \log_2 x$ și $g(x) = 3 - x$ sînt de monotonii diferite unicitatea soluției rezultă și din graficul funcțiilor f și g).
deoarece funcția din stînga este strict descrescătoare.

b) Ecuația are soluția unică $x = 0$

c) Se împarte cu $\log_7^x 6$ și se obține soluția unică $x = 1$.

d) Se împarte cu $\log_5^x 6$ obținîndu-se ecuația echivalentă:

$\left(\frac{\log_5 4}{\log_5 6}\right)^x + \left(\frac{\log_5 9}{\log_5 6}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \log_6^x 4 + \log_6^x 9 = 2$ cu soluția $x = 2$.

245. Evident $x = 1$ este soluție a ecuației. Fie $x \neq 1$, atunci ecuația devine

$4a^2 = (a^2 + 1)^2 x^2[\log_x 2a - \log_x(2a^2 + 1)] \Leftrightarrow \log_{\frac{2a}{a^2+1}} x = \frac{x^2}{\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2} \Leftrightarrow$

$$\log_b x = \frac{x^2}{b^2} \text{ unde } b = \frac{2a}{a^2 + 1} < 1.$$

Evident $x = b$ este soluția unică deoarece pe intervalul $(0, \infty)$. $\log_b x$ este strict descrescătoare iar $\frac{x^2}{b^2}$ este strict crescătoare.

G.M. 8/1985

246. Ecuația se mai scrie $\frac{x - 1}{a - 1} = \log_a x$ care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 0$. Considerăm cazul $a > 1$ și reprezentînd grafic funcțiile apărute în cei doi membri ai ecuației obținem unicitatea celor două soluții.
În cazul $0 < a < 1$, obținem următoarea reprezentare grafică.

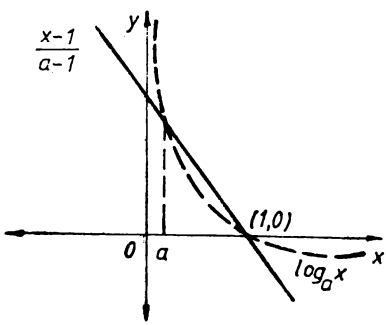


Fig. 18

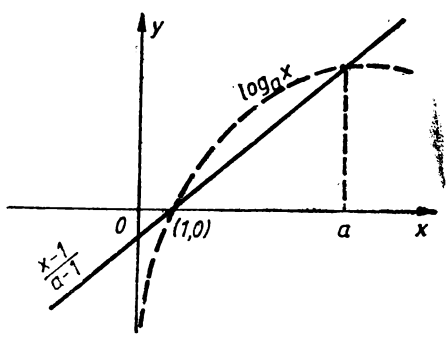


Fig. 19

247. Funcția din stînga este strict crescătoare iar cea din dreapta este strict descrescătoare deci $x = 1$ este unica soluție a ecuației date.

248. Notăm $x \ln x = y \geqslant 0 \Rightarrow y^3 e^x + e^{2x} - 3ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $e^x(y-1)^2(y+2) + (e^x - 1)^2 = 0$, care este strict pozitivă $(\forall)\ x \in [1, \infty)$.

249. a) Din $0 < \log_{11}7 < 1$, $0 < \log_{15}5 < 1$ și $\log_{15}17 > 1$ rezultă că ecuația $\left(\frac{\log_{11}7}{\log_{15}17}\right)^x + \left(\frac{\log_{13}5}{\log_{15}17}\right)^x = 2$ are soluție unică $x = 0$.

250. Logaritmăm în baza 2. $\log_2 \frac{x}{18} = \log_x 12 \log \frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 x - 1 -$ $- 2\log_2 3 = \frac{2 + \log_2 3}{\log_2 x}(1 - \log_2 3) \Rightarrow$ notăm $a = \log_2 3$ și $\log_2 x = y$, atunci ecuația devine $y^2 - y(2a+1) + a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = a + 2 = \log_2 12$ și $y_2 = a - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 12$ și $x_2 = \frac{3}{2}$.

251. Ecuația se mai scrie $\log_{z^3}(x^2 - 2ab) + \log_{z^3}(x^2 - 2ab)^2 = \log_{z^3} z^6 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x^2 - 2ab)^3 = z^6 \Rightarrow x^2 - 2ab = z^2 \Rightarrow x = \pm(a+b)$.

252. Ecuația se scrie $\log_n x(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n+1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[n]{n}$.

253. Cele două funcții din cei doi membri sînt de monotonii diferite, deci $x = 0$ soluție unică pentru a) iar $x = 0$ sol. unică pentru b).

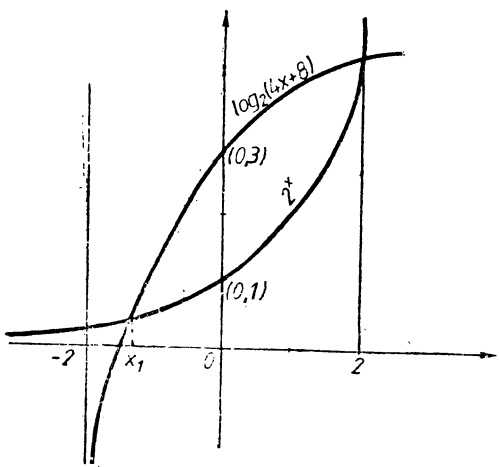


Fig. 20

254. $\log_2(x+2) = \frac{2^x - 1}{2 - 1} -$ $- 1 = 2^x - 2$.

Arătăm că $x = 2$ este soluție unică. Ecuația se mai scrie

$$\log_2(4x + 8) = 2^x$$

și din reprezentarea grafică a celor doi membri rezultă că ecuația mai are o soluție $x_1 \in \left(-\frac{7}{4}, 0\right) \notin \mathbf{N}^*$.

255. Fie $x^2 = y > \frac{2}{3}$. ecuația devine $\log_{\frac{2}{3}}\left(2y - \frac{y}{3}\right) =$ $= \left(\frac{3}{2}\right)^{(y-1)^2}$.

Fie $y - 1 = t > -\frac{1}{3}$ ecuația devine:

$\log_{\frac{2}{3}}\left(2t + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{t^2}$. Pentru $t > 0$ $\log_{\frac{2}{3}}\left(2t + \frac{2}{3}\right) < 1$, iar $\left(\frac{3}{2}\right)^{t^2} > 1$. Pentru $\in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ avem:

$\left(\frac{3}{2}\right)^t = \left(1+\frac{1}{2}\right)^t < 1+\frac{t^2}{2} < 1-\frac{t}{2}$ (1) și $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\frac{t}{2}} = \left(1-\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{t}{2}} > 1 -$

$$- \frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{t}{6} > \frac{2}{3}+2t \quad (2). \quad \textit{(Bernoulli)}$$

Din (2) rezultă $1-\frac{t}{2} > \log_{\frac{2}{3}}\left(2t+\frac{2}{3}\right)$ (3)

Din (1) și (3) avem $\left(\frac{3}{2}\right)^t < \log_{\frac{2}{3}}\left(2t+\frac{2}{3}\right)$ pentru $t \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Deci ecuația nu are nici o soluție în afară de $t=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2=1$, $x=\pm 1$.

256. a) $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2x - x^2$, $x=1$ este soluție unică deoarece $x+\frac{1}{x} \geqslant 2 \Rightarrow \log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant 1$ și $2x - x^2 \leqslant 1$ egalitate doar pentru $x=1$.

b) În mod analog, $x=1$.

257. Ecuația se mai scrie $\log_{xy}z^2 + \log_{xz}y^2 + \log_{yz}x^2 = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\log z}{\log x + \log y} + \frac{2\log y}{\log x + \log z} + \frac{2\log x}{\log z + \log y} = 3,$$

unde baza logaritmului este mai mare sau mai mică decît 1 în funcție de poziția numerelor x, y, z față de 1, deci $\log x, \log y, \log z$ sînt pozitive. Aplicînd inegalitatea mediilor avem:

$$3 = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}},$$

unde $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, unde $a, b, c > 0$, egalitate numai dacă $a=b=c$, deci $x=y=z \in (0, 1)$ sau $x=y=z \in (1, \infty)$.

258. Se impun condițiile de existență de unde $x \geqslant 1$, $y \geqslant 2$, $z \geqslant 4$, $t \geqslant 2$; logaritmînd în baza 2 obținem:

$2\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 y - 1} + \sqrt{\log_2 z - 2} + \sqrt{\log_2 t - 1} = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z + \log_2 t$ putem face substituțiile: $\log_2 x = a^2$; $\log_2 y - 1 = b^2$; $\log_2 z - 2 = c^2$; $\log_2 t - 1 = d^2$.

Înlocuind obținem: $2(a+b+c+d) = a^2+b^2+c^2+d^2+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-2a-2b-2c-2d+1+1+1+1=0 \Leftrightarrow$

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2=0 \Rightarrow a=b=c=d=1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x=2$; $\log_2 y = 2 \Rightarrow y=4$; $\log_2 z = 3 \Rightarrow z=8$; $\log_2 t = 2 \Rightarrow t=4$.

259. Fie $x+y=a$, atunci inecuația se mai scrie:

$$(x^2 - (\log_4|a| + \log_{|a|}4)\,x + 1)(x^2 - 10\cdot 2^a\,x + a^2 - 3) \geqslant 0$$

pentru $|a| \neq 4$ primul trinom are rădăcini reale și distincte, deci între rădăcini trinomul este negativ, de unde rezultă că și al doilea trinom trebuie să fie negativ în același interval, prin urmare trinoamele trebuie să aibă aceleași rădăcini, adică

$$10\cdot 2^a = \log_4|a| + \log_{|a|}4 \text{ și } a^2-3=1 \Rightarrow a=\pm 2,$$

dar numai $a=-2$; convine.

Dacă $|a| = 4$, primul trinom este pozitiv, iar al doilea pentru $a = -4$ $x^2 - \frac{5}{8}x + 13 > 0$. Prin urmare ecuațiile dreptei sînt $x + y = -2$ sau $x + y = -4$.

260. Domeniul de definiție $x \in \left(-\frac{1}{6}, \infty\right)$. Ecuația are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ecuația se mai scrie:

$$f(x) = \log_3 \frac{2x+1}{3^x} + \log_5 \frac{4x+1}{5^x} + \log_7 \frac{6x+1}{7^x} = 0.$$

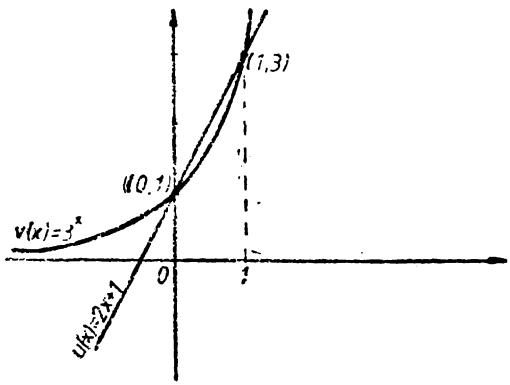


Fig. 21

Evident din graficul funcțiilor rezultă:

$u(x) = 2x + 1$ și $v(x) = 3^x$

dacă $x \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup (1, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x > 2x + 1$, iar dacă

$x \in (0,1) \Rightarrow 3^x < 2x + 1$

egalitate doar pentru $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

Din graficele asemănătoare funcțiilor $u(x) = 4x + 1$ sau $6x + 1$ și $v(x) = 5^x$ sau 7^x rezultă că pentru $x \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup (1, \infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < 0$ și pentru $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) > 0$, $f(x) = 0$ doar pentru $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

261. 1) Evident pentru $x < 0 \Rightarrow [x] < 0 \Rightarrow a^{[x]} < 1$ și $[a^x] = 0$ deoarece $a^x \in (0,1)$, deci $[a^x] \neq a^{[x]}$.

Numerele $x \in \mathbf{N}$ verifică ecuația.

Fie $x \in (k, k+1) \Rightarrow [x] = k \Rightarrow a^{[x]} = a^k$ și $a^k < a^x < a^{k+1} \Rightarrow 1)$ $a^k < a^x < a^k + 1 \Rightarrow [a^x] = a^k$

sau

$$2)\ a^k + 1 < a^x < a^{k+1} \Rightarrow [a^x] \geqslant a^k + 1 > a^k,$$

deci pentru $x \in (k, \log_a(a^k + 1))$, $k \in \mathbf{N}$ are loc egalitatea

$$a^{[x]} = [a^x] = a^k, \text{ deci } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k, \log_a(a^k + 1)].$$

2) Evident $x \in [1, \infty)$.

Observăm că $x = a^k$, $k \in \mathbf{N}$ sînt soluții și $x = a^k$, $k \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$ nu verifică ecuația. Vom arăta că toate valorile lui $x \in [a^k, a^k + 1]$ sînt soluții pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

Fie $a^k < x < a^{k+1}$. Considerăm situațiile $x \in [a^k, a^k + 1)$

$$x \in [a^k + 1, a^{k+1}) \text{ (evident } a^{k+1} > 1 + a^k).$$

Cazul I

$$a^k < x < a^k + 1 \Rightarrow [x] = a^k \Rightarrow \log_a [x] = k$$

$$\text{și } k < \log_a x < \log_a(a^k + 1) < \log_a a^{k+1} = k + 1 \Rightarrow$$

$[\log_a x] = k$, deci toate valorile $x \in [a^k, a^k + 1)$ verifică ecuația.

Cazul II

$$x \in [a^k + 1,\ a^{k+1}) \Rightarrow a^k + 1 \leqslant [x] < a^{k+1} \Rightarrow$$
$$k < \log_a(a^k + 1) \leqslant \log_a[x] < k + 1, \text{ deci } k < \log_a[x] < k + 1,$$

iar din $a^k + 1 \leqslant x < a^{k+1} \Rightarrow k < \log_a(a^k + 1) \leqslant \log_a x < k + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\log_a x] = k$, deci $[\log_a x] \neq \log_a[x]$, prin urmare soluțiile ecuației sînt

$$x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [a^k, a^k + 1).$$

262. Fie $\log_a x = t$. Se știe că $(\forall)t \in \mathbf{R} > [t] + \left[t + \frac{1}{2}\right] = [2t]$ *(Hermite)*

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3} + t\right] = \left[\frac{1}{2} + t\right].$$ Fie $t = m + \varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\varepsilon + \frac{1}{3}\right] = \left[\varepsilon + \frac{1}{2}\right]$ pentru $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ egalitatea este adevărată $\Rightarrow$

$\Rightarrow t = m + \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \log_a x = m + \varepsilon \Rightarrow x = a^{m+\varepsilon}$ $(\forall)m \in \mathbf{Z}$ și

$$\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right);$$

pentru $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ egalitatea este falsă;

pentru $\varepsilon \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ egalitatea este din nou adevărată.

b) Fie $\log_3 x = t \Rightarrow [t] + \left[t + \frac{1}{3}\right] = 3.$

Dacă $t = m + \varepsilon$, $m \in \mathbf{Z}$, $\varepsilon \in [0, 1) \Rightarrow 2m + \left[\varepsilon + \frac{1}{3}\right] = 3$;

pentru $\varepsilon \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow 2m = 3$ fals;

pentru $\varepsilon \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow 2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1$

$$\Rightarrow t = 1 + \varepsilon \Rightarrow \log_3 x = 1 + \varepsilon \Rightarrow x = 3^{1+\varepsilon}\ (\forall)\ \varepsilon \in \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

263. a) Ecuația se mai scrie $\sum_{k=2}^{n} \log_k(1 + x) + n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^x$

unde membrul din stînga reprezintă o funcție strict crescătoare, iar cel din dreapta o funcție strict descrescătoare, deci $x = 0$ este soluția unică a ecuației.

b) Funcția din stînga este strict crescătoare, iar cea din dreapta strict descrescătoare, rezultă $x = 0$ soluție unică.

264. Soluția I. Evident $x = 1$ este soluție. Din ipoteză rezultă că mai există o soluție $x_0 \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, adică $\log_a x_0 + \log_b x_0 + \log_c x_0 = 9 \log_{abc} x_0$. Din ultima egalitate rezultă că și x_0^k este soluție.

Soluția II. Ecuația se mai scrie $\frac{\lg x}{\lg a} + \frac{\lg x}{\lg b} + \frac{\lg x}{\lg c} = 9\,\frac{\lg 1}{\lg abc} \Leftrightarrow$

$$\lg x \left(\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b} + \frac{1}{\lg c} - \frac{9}{\lg abc}\right) = A \lg x$$

care dacă are două soluții avem $A = 0$ și deci în acest caz are o infinitate de soluții (evident $A = 0 \Leftrightarrow a = b = c$).

265. Evident $x \in (-1, \infty)$; $\lg 4^{x(x+1)} = \lg (2^{x+1} + x)^x \Leftrightarrow$
$4^{x(x+1)} = (2^{x+1} + x)^x \Rightarrow x_1 = 0$ şi din $4^{x+1} = 2^{x+1} + x$.

Notînd $x + 1 = t > 0 \Rightarrow 4^t - 2^t - t + 1 = 0$.
Arătăm că ultima ecuaţie nu are soluţii pozitive.
Dacă $t \in (0,1) \Rightarrow 4^t - 2^t > 0$ şi $1 - t > 0 \Rightarrow 4^t - 2^t - t + 1 > 0$.
Dacă $t \in (1, \infty)$ atunci $4^t - 2^t - t > 0 \Leftrightarrow 2^t(2^t - 1) \geqslant t$, deoarece

$$2^t - 1 > t \ (\forall) \ t \geqslant 1.$$

G.M. 11–12/1989

266. Ecuaţia are soluţia $x = -\frac{1}{4}$.

Domeniul de definiţie $x \in \left(-\frac{5}{2}, 2\right) - \{1\}$ şi pentru care $\frac{4x + 1 + 8\pi}{24} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi deci cele două funcţii din dreapta sînt strict descrescătoare şi pozitive pe domeniul de definiţie. Dacă $x \in \left(-\frac{5}{2}, 1\right) \Rightarrow 2 - x > 1$. Distingem situaţiile: dacă $x \in \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right] \cup (1, 2)$ membrul din stînga este negativ, iar cel din dreapta este pozitiv.

Dacă $x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ funcţia din stînga este strict crescătoare ca produs de funcţii pozitive şi crescătoare.

$$\log_{2-x}\left(x + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{\ln (2 - x)},$$

iar funcţia din dreapta este strict descrescătoare.
Se verifică $x = -\frac{1}{4}$ — soluţie, care este şi unică.

267. Răspuns: $x = \pm 1$, $x = 2$, $x = 4$.

268. Se face substituţia $x + 1 = z \Rightarrow e^{z-1} = 1 + \ln z \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$. Soluţie unică.
Graficele celor două funcţii e^{z-1} şi $\ln z + 1$ sînt tangente în punctul A(1,1).
Dreapta $y = x$ este tangentă comună, $e^{z-1} \geqslant z \geqslant 1 + \ln z$.

269. a) Inecuaţia se mai scrie $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \geqslant 1 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 1$.

Rezolvăm mai întîi ecuaţia $f(x) = 1$ cu soluţia unică $x = 3$, deci $f(3) \equiv 1$.
Inecuaţia se mai scrie $f(x) \geqslant f(3)$ şi deoarece f este strict descrescătoare rezultă $x \leqslant 3$.

b) $(\sqrt{2} - 1)^{2x} - 6(\sqrt{2} - 1)^x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leqslant (\sqrt{2} - 1)^x \leqslant$
$\leqslant 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)^2 \leqslant (\sqrt{2} - 1)^x \leqslant (\sqrt{2} - 1)^{-2} \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$. La fel pentru h).

c) Notînd cu $y = 5^{x-2}$ inecuaţia devine: $y^2 - 26y + 25 \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant 25 \Rightarrow 1 \leqslant 5^{x-2} \leqslant 5^2 \Rightarrow x \in [2, 4]$.

d) Inecuaţia se mai scrie $(7^x - 5^x)(4^x + 3^x - 5^x) \geqslant 0$; se poate utiliza un tabel de semne:

x^x	$-\infty$				0		2		$+\infty$
$7^x - 5^x$	$-$	$-$	$-$	$-$	-0	$+$	$+$	$+$	$+$
$3^x + 4^x - 5^x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(7^x - 5^x)(3^x + 4^x - 5^x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	-0	$+$	$+$	0	$-$

deci $x \in [0, 2]$.

e) Inecuația se scrie $\left(\frac{8}{11}\right)^x + \left(\frac{9}{11}\right)^x \geqslant 2 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 2$, dar ecuația $f(x)=2$ are soluție $x = 0$, deci $f(0) = 2$ și inecuația devine

$$f(x) \geqslant f(0) \Rightarrow x \leqslant 0.$$

f) Notînd $2^x = a$, $3^x = b$, $5^x = c$ inecuația se scrie

$a^2 + a(1 - c) + bc - b^2 + b \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - b + 1)(a + b - c) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$(2^x - 3^x + 1)(2^x + 3^x - 5^x) \geqslant 0$ și se procedează la fel ca la d) rezultă $x \in \mathbf{R}$.

R.M.T. 2/1985

g) $2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x + \operatorname{tg} x}} \geqslant 2\sqrt{2^{2x}} = 2^{x+1}$, deoarece

$$\sin x + \operatorname{tg} x \geqslant 2x, \text{ deci } x \in \mathbf{R}.$$

g') Dacă $2^x = a$, $3^x = b$, $4^x = c$, $5^x = d$, observăm că $a^2 = c$, deci $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 \leqslant 0 \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow x = 0$.

270. a) Dacă $|x| \leqslant 1$, atunci $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-1,1]$ și

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty) \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}.$$

Dacă $|x| > 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ și

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Prin urmare $x \in [-1, 1]$.

b) Evident $x > 0$. Dacă $x \in (0,1)$, atunci trebuie ca $\log_2 \sqrt{\frac{x+2}{x}} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (0, 1)$.

Dacă $x > 1$, atunci trebuie ca $\log_2 \sqrt{\frac{x+2}{x}} < 0 \Rightarrow x \in (2, \infty)$.

Prin urmare $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$.

c) Evdient $x \in (3, \infty)$. Se impune ca $\log_{x-2} x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 1 \Rightarrow x \ (2 + \sqrt{2}, \infty)$.

d) $x \in (1, \infty)$.

271. a) Se trece în baza „a" și se notează cu $y = \log_a x \Rightarrow$

$\frac{y(y^2 + 4y + 5)}{(y+1)(y+2)(y+3)} \geqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup [0, \infty)$;

$\log_a x < \log_a a^{-3}$ sau $\log_a a^{-2} < \log_a x < \log_a a^{-1}$ sau $\log_a x \geqslant \log_a 1$;

deci pentru $a > 1 \Rightarrow x \in (0, a^{-3}) \cup (a^{-2}, a^{-1}) \cup [1, \infty)$;

iar pentru $0 < a < 1 \Rightarrow x \Rightarrow (a^{-3}, \infty) \cup (a^{-1}, a^{-2}) \cup (0, 1)$.

b) și c). În mod analog.

d) Inecuația se scrie $\frac{(\log_a x - 1)(2\log_a x - 1)}{x^2 - 1} > 0$, pentru $a > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (1, \sqrt{a}] \cup (a, \infty)$ iar pentru $0 < a < 1 \Rightarrow x \in (a, \sqrt{a}) \cup (1, \infty)$.

e) $\sqrt{\frac{(2\log_a x - 1)^2}{(2\log_a x + 1)^2}} < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2\log_a x - 1}{2\log_a x + 1}\right| < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$. Dacă $a > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > 1$, iar dacă $0 < a < 1 \Rightarrow x \in (0, 1)$.

272. a) Se consideră cazurile $a > 1$, $0 < a < 1$.
Dacă $a > 1$, atunci prin logaritmare în baza „a" obținem

$$\log_a x\,[1 + \log_a x] > 2 + \log_a x \Leftrightarrow \log_a^2 x - 2 > 0 \Rightarrow$$
$$\log_a x < -\sqrt{2} \text{ sau } \log_a x > \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0, a^{-\sqrt{2}}) \cup (a^{\sqrt{2}}, \infty).$$

Dacă $0 < a < 1 \Rightarrow -\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2} \Rightarrow x \in (a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}})$.

b) În mod analog. Dacă $a > 1 \Rightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$, iar dacă

$$0 < a < 1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

c) Dacă $a > 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{\sqrt{a}}, a\right]$, iar dacă $0 < a < 1 \Rightarrow x \in (0, a] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{a}}, \infty\right)$.

d) Dacă $a > 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{a} - 1, a\sqrt[3]{a} - 1\right]$, iar dacă $0 < a < 1 \Rightarrow$

$$x \in \left(-1, a\sqrt[3]{a} - 1\right] \cup \left[\frac{1}{a} - 1, \infty\right).$$

e) Dacă $a > 1 \Rightarrow x \in [a^{-6} - 1, \sqrt{a} - 1]$, iar dacă $0 < a < 1$
$\Rightarrow x \in (-1, \sqrt{a} - 1] \cup (a^{-6} - 1, \infty)$.

273. Inecuația este echivalentă cu
$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b+c}\right) + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^x \leqslant 3$ unde funcția din stînga $f(x)$ este strict descrescătoare și ecuația $f(x) = 3$ are soluția unică $x = 0$, adică $f(0) = 3$. Inecuația se mai scrie $f(x) \leqslant f(0) \Rightarrow x \geqslant 0$. Generalizare:

$$\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n} \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^x \Rightarrow x \in [0, \infty).$$

274. Evident, dacă $x > 1 \Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geqslant 2$ iar $2\sin y \leqslant 2$, egalitate doar dacă $x = 2$ și $\sin y = 1 \Rightarrow y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Dacă $x \in (0,1)$, atunci $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leqslant -2$, dar $2\sin y \geqslant -2$, egalitate doar pentru $x = \frac{1}{2}$ și $\sin y = -1$; $y = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

275. a) Ecuația se mai scrie $\frac{x-1}{a-1} = \log_a x$ și din reprezentarea grafică a funcțiilor din cei doi membri rezultă $x_1 = 1$, $x_2 = a$.

b) Pentru $a > 1 \Rightarrow x \in (0, 1] \cup [a, \infty)$, iar pentru
$0 < a < 1$ rezultă $x \in (0, a] \cup [1, \infty)$.

c) Punînd $a = n + 1$ inecuația devine $x - 1 \geqslant n \log_{n+1} x$ și scriind că numerele $x_i \geqslant n + 1$ verifică, inecuația, după însumare obținem

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) \geqslant n \log_{n+1} \prod_{i=1}^{n} x_i \text{ și în urma renotării}$$

$$a_i = x_i - 1 \Rightarrow \frac{\sum a_i}{n} \geqslant \log_{n+1} \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i).$$

276. Evident $x \in (-2, \infty) - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Dacă $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ inecuația este echivalentă cu

$$\log_2(x + 2) > \frac{4x - 1}{2x + 1} \text{ care nu are soluții deoarece}$$

$$\log_2(2 + x) < \log_2 \frac{3}{2} < 1 \text{ și } \frac{4x - 1}{2x + 1} > 2.$$

Dacă $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ atunci $\frac{6}{2x + 1} > 0$ și $\frac{1 + \log_2(x + 2)}{x^2} < 0$

deci $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ sînt soluții.

Dacă $x \in (0, \infty)$, atunci $\frac{4x - 1}{2x + 1} < 2$ și $1 < \log_2 (2 + x)$.

Pe intervalul $[2, \infty)$ $\log_2(x + 2) \geqslant 2$ și deci inecuația nu are soluții pe acest interval.

Pe intervalul $[0, 1]$, $\frac{4x - 1}{2x + 1} \leqslant 1$ și deci inecuația nu are soluții, iar dacă $x \in (1, 2)$, avem

$\log_2(2 + x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x - 1}{2x + 1}$, deci nici pe acest interval nu sînt soluții, așadar $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, c) $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

277. Inecuația se mai scrie: $(5^x - 4^x - 3^x)(\log_2 x - x) \geqslant 0$ și deoarece $2^x > x \quad (\forall)\ x \in (0, \infty) \Leftrightarrow \log_2 x - x < 0$; deci trebuie ca

$$5^x - 4^x - 3^x \leqslant 0 \Rightarrow x \in (0, 2].$$

278. a) Evident $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

numerele întregi $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ verifică inecuația, iar pentru $x \geqslant 2$, $x \in \mathbf{N}$, $3x + 1 > 2 \log_2 (x + 4)$.

Se demonstrează prin inducție inegalitatea: $3n + 1 > 2 \log_2 (n + 4)$

$(\forall)\ n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$.

b) În mod analog $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

279. Fie $f(x) = 2^x + a^x - 3^x - 4^x$, $f(0) = 0$. Inecuația se mai scrie: $f(x) \geqslant f(0)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, deci $x = 0$ este punct de minim și conform teoremei lui Fermat $f'(0) = 0$, unde $f'(x) = 2^x \ln 2 + a^x \ln a - 3^x \ln 3 - 4^x \ln 4$.
Prin urmare din $f'(0) = 0 \Rightarrow a = b$.

280. Fie $f(x) = a_1^x + \ldots + a_n^x - n \geqslant 0$ $((\forall)x \in \mathbf{R})$ şi $f(0) = 0$. Aplicînd teorema lui Fermat, rezultă $f'(0) = 0$, unde

$$f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n, \text{ deci}$$
$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a_1 a_2 \ldots a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 \ldots a_n = 1.$$

Reciproc, dacă $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, atunci

$$a_1^x + \ldots + a_n^x \geqslant n\sqrt[n]{(a_1 \ldots a_n)^x} = n \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

281. a) $\ln x \ln y < \left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right)^2 = \ln^2 \sqrt{xy} \leqslant \ln^2 \frac{x+y}{2} < \ln^2 (x+y)$.

b) Funcţia $f(x) = x \ln x$ este convexă deci

$$\frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x}{2} \ln \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \ln \frac{y}{2}.$$

Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ şi astfel încît $\frac{b+c}{2} \leqslant a$ atunci $\ln^2(1+a) \geqslant$ $\geqslant \ln(1+b) \ln(1+c)$.

Gh. Andrei

Arătaţi că dacă $a, b \in (0, 1)$ atunci

1) $a^{\sqrt{\log_c b}} \cdot b^{\sqrt{\log_b a}} \geqslant a \cdot b$; 2) $a^{\sqrt[n]{\log_b a}} \cdot b^{\sqrt[n]{\log_a b}} \leqslant a \cdot b$, $n \in \mathbf{N}$.

C. Caragea

282. a) $(2, 3)$; b) $(4, 3)$; c) $\left(\frac{\lg 3}{\lg 3 - \lg 2}, \frac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2}\right)$; d) $(4, 0)$;

e) $(\sqrt{2}, 2)$; f) $(1, 3)$; g) $(3, 4)$; h) $\left(y_1 = \frac{2\lg 3}{\lg 9/4}, \ x_1 = 2y + 1\right)$;

i) $\left(\frac{1}{6}, 1\right)$; j) $(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; k) $(7, 5)$; l) $(6, 10)$; m) $(8, 20)$; $(\log_3^3 4, \log_2^4 9 + 4)$; n) nu are soluţii; o) notăm $2^x = a$, $2^y = b \Rightarrow$ $\Rightarrow x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (1, -1)$. p) $(1, 1), \left(\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}, \left(\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}\right)^2\right)$;

r) $(1, 1), \left(\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$, $\alpha = \frac{n}{m}$. s) Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 18 \\ xy = 4 \end{cases},$$

$18 = 3^x + 3^y \geqslant 2\sqrt{3^{x+y}} \geqslant 2\sqrt[3]{3^{2\sqrt{x \cdot y}}} \geqslant 18$, egalitatea, dacă $x = y = 2$.

ş) $x = y = 2$; t) Din prima ecuaţie $\Rightarrow x \in [-1, 1]$, iar din ecuaţia a doua rezultă că soluţia $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Ecuaţia a doua $2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} = 3$ are soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Fie $x \in (0, 1)$, atunci $2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} = 2^{x-1} + 2^{x-1} + 2^{\sqrt{1-x^2}} > 3\sqrt[3]{2^{2x-2+\sqrt{1-x^2}}} \geqslant 3$, $(\forall)\ x \in \left[\frac{3}{5}, 1\right)$, deoarece $2x - 2 + \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \left[\frac{3}{5}, 1\right)$ şi prima inegalitate e strictă. În mod analog $2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} = 2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}-1} + 2^{\sqrt{1-x^2}-1} > 3\sqrt[3]{2^{x-2+2\sqrt{1-x^2}}} \geqslant 3$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{4}{5}\right] \supset \left[0, \frac{3}{5}\right]$, deoarece $x - 2 + 2\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{4}{5}\right]$.

Prin urmare $(\forall)\ x \in (0,1)\ 2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} > 3$ și deci soluțiile sistemului sînt (0, 1) și (1, 0) (se poate utiliza și inegalitatea $2^x \geqslant x^2 + 1$, $(\forall)x \in [0, 1]$).

ț) Din ecuația a doua rezultă că y nu poate fi negativ, deci $y \geqslant 1$, iar din ecuația întîi $2^y - 1 = 3^x$ rezultă că nici x nu poate fi negativ. Din ecuația a doua rezultă $3y - 2 = 2^{y/x} \Rightarrow y$ par și x/y. Fie $y = 2k$. Deci $2^y - 1 = 3^x \Rightarrow 4^k - 1 = 3^x \Rightarrow (2^k - 1)(2^k + 1) = 3^x \Rightarrow \begin{cases} 2^k - 1 = 3^\alpha \\ 2^k + 1 = 3^\beta \end{cases}$ unde $\alpha + \beta = x$, $\alpha < \beta \Rightarrow 2^{k+1} = 3^\alpha + 3^\beta = 3^\alpha(1 + 3^{\beta-\alpha}) \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$. u) În mod analog $x = 0$, $y = 1$.

283. a) (0, 1, 2); (0, 2, 1); (1, 0, 2); (1, 2, 0); (2, 1, 0); (2, 0, 1)
b) (2, 2, 1); c) se notează $2^x = u$, $2^y = v$, $2^z = t \Rightarrow \{u, v, t\} = \{1, 2, 3\}$;
d) analog; e) $(\pm 3, \pm 2, \pm 1)$. f); 2, 3, 4).

284. a) (2, 2); b) (4, 2); c) $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$; d) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; e) $(\sqrt[3]{2}, 2)$.

f) Înmulțim prima ecuație cu 6^{2y}, sistemul devine

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 3^{2y} - 2 \cdot 6^{x+y} - 1 = 0 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{2x+1} - 2 \cdot 6^{x+y} + 1 = 0, \end{cases}$$, scăzînd cele două ecuații

membru cu membru obținem $2^{x+y}(3^{2y} - 3^{2x+1}) = 2$ care se împarte la prima ecuație scrisă sub forma:

$$2^{x+y}(3^{2y} - 2 \cdot 3^{x+y}) = 1 \Rightarrow \frac{3^{2y} - 3^{2x+1}}{3^{2y} - 2 \cdot 3^{x+y}} = 2 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}.$$

285. a) $\left(\frac{1}{10}, 2\right)$, (100, −1); b) (3, 3); c) (3, 27), (27, 3).

d) (125, 4), (625, 3); e) (2, 8); f) (a^3, a^{-1}), (a^{-1}, a^3). g) (1, 64), $\left(\frac{16}{9}, 36\right)$;

h) (4, 2); i) (2, 6); j) (e, e); k) (1, 1); l) $(\sqrt[3]{9}, 9)$, $(9, \sqrt[3]{9})$; m) (2, 3);

n) (1, 1), $(\log_a b, \log_b a)$; o) (125, 4); (625,3); p) $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$;

s) $(a^3\sqrt[3]{a^2}, a)$, $(a^2, \sqrt[3]{a}, a^2)$; ș) (100, 10); t) $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right)$ ț) (512, 1);

u) $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$; v) (−2, 1); w) (4, 16); x) (6,2), (2,6); y) (4,1), (16,2);

z) (a, y), (x, a), $x, y \in (0, \infty)$ arbitrare.

286. a) $(\sqrt{10}, 10\sqrt{10})$; b) Se notează $\log_x y = t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow (x, y) = (3,9)$;
c) Din ecuația întîi $y\left[\log_2(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right] = 0 \Rightarrow y = 0$ și din a doua ecuație $\Rightarrow 2x \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$. La fel din ecuația a doua $\Rightarrow x = 0$ și din prima $\Rightarrow y = 1$; deci (0, 1) și (1, 0). Dacă $xy \neq 0$ atunci:

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 + y^2) &= -\frac{2x^2}{x^2 + y^2} \\ \log_2(x^2 + y^2) &= -\frac{2y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \log_2(2x^2) = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

d) Înlocuind $ax + b$ din prima ecuație în a doua $\Rightarrow$
$\log_y \frac{4y^2}{abx} = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{abx} \Rightarrow ax = \frac{4}{by^2}$ și înlocuind în prima ecuație $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$$

e) Notînd $\log_3 x = a$ și $\log_3 y = b$ sistemul devine

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a + ib)^3 = a^3 + ib^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 3ab^2 + i(2b^3 - 3a^2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = 3, \quad y = 1 \text{ și } x = \frac{1}{3}, \ y = 1.$$

f) Arătăm că $x = \frac{1}{2}$ și $y = \frac{1}{3}$ este unica soluție a sistemului.

Cazul I: $x > \frac{1}{2}$ și $y > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^y < \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y < \frac{5}{6}.$$

Cazul II: $x > \frac{1}{2}$ și $y < \frac{1}{3}$ rezultă la fel că $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y > \frac{5}{6}$.

Cazul III: $x > \frac{1}{2}$ și $y < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ și $\log_{\frac{1}{27}} y > \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3} =$

$$= \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Cazul IV: $x < \frac{1}{2}$ și $y > \frac{1}{3}$ rezultă la fel ca $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y > \frac{1}{6}$ sau altfel: din prima ecuație $\Rightarrow y = \log_{\frac{1}{27}}\left[\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4}\right)^x\right] = g(x)$ unde g este o funcție descrescătoare și înlocuind în a doua avem:

$\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}}\left\{\log_{\frac{1}{27}}\left[5/6 - \left(\frac{1}{4}\right)^x\right]\right\} = \frac{1}{6}$, dar funcția din stînga este strict descrescătoare, deci $x = \frac{1}{2}$ este soluție unică a ecuației date.

g) Din prima ecuație $\Rightarrow x = \log_3(2^y + 23)$ și din ecuația a doua rezultă $x = 3^{2-\log_2 y}$ și egalînd obținem ecuația:

$\log_3(2^y + 23) = 3^{2-\log_2 y}$ unde cele două funcții din cei doi membri sînt de monotonii diferite și evident $f(2) = g(2)$ de unde rezultă soluția unică $y = 2 \Rightarrow x = 3$ sau din ecuația: $\log_2 y + \log_3[\log_2(2^y + 23)] = 2$ și cum funcția din membrul stîng este strict monotonă rezultă $y = 2$ sol. unică.

G.M. 11–12/1986

h) Rezultă ușor că $x, y \in (1, \infty)$. Notînd $\log_3 x = u$ și $\log_3 y = v$ sistemul devine $\begin{cases} uv = 9 \\ 3^u + 3^v = 54 \end{cases}$, dar $3^u + 3^v \geq 2\sqrt{3^{u+v}} \geq 2\sqrt{3^{2\sqrt{uv}}} = 54$ egalitate numai dacă $u = v \Rightarrow u = v = 3 \Rightarrow x = y = 27$.

i) Evident $(x, y) \in (1, \infty)$ și ținînd seama de cele două ecuații $\Rightarrow (x, y) \in (1, 29)$. Notînd $u = \log_5 x$ și $v = \log_5 y$, sistemul devine

$$\begin{cases} uv = 2 \\ 5^u + 5^v = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{2}{u} \\ 5^u + 5^{\frac{2}{u}} = 30. \end{cases}$$

Ecuația $5^u + 5^{\frac{2}{u}} = 30$ are soluțiile $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, deci $v_1 = 2$ și $v_2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x, y) = (5, 25)$ și $(x, y) = (25, 5)$.

j) Evident $(x, y) \in (1, \infty)$. Sistemul devine $\begin{cases} y = x + 4 \\ \log_2 x \log_2 (x + 4) = 6. \end{cases}$

Funcția $f(x) = \log_2 x \log_2 (x + 4)$ este strict crescătoare, deci $x = 4$ este soluție unică. $\Rightarrow y = 8$, așadar soluția sistemului este $(x, y) = (4, 8)$.

k) Evident $x, y \in (0, \infty)$ și aplicînd inegalitatea de medii $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2^x + 2^y \geqslant 2\sqrt{2^{x+y}} \geqslant 2\sqrt{2^{2\sqrt{xy}}} = 8$, egalitate numai dacă $x = y = 2$.

e) Notînd $\log_2 x = u$ și $\log_2 y = v \Rightarrow x = 2^u$ și $y = 2^v$ sistemul devine $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ 2^u + 2^v = 3 \end{cases}$ și rezolvarea se reduce la sistemul de la punctul 270 exercițiul t).

soluțiile sistemului sînt (2, 1), (1, 2).

m) Notînd $x^{\log_4 x} = u$ și $y^{\log_4 y} = v \Rightarrow \log_2^2 x = \log_2 u$ și

$$\log_4^2 y = \log_4 v \Rightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ \log_2 u + \log_4 v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^2 v = 16 \end{cases},$$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \pm 1 \\ \log_4 y = \pm 1 \end{cases}$, de unde rezultă soluțiile (2, 4), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

n) $x^{\log_3^2 x} = u$, $y^{\log_3^2 y} = v \Rightarrow \begin{cases} \log_3 u + \log_9 v = 2 \\ u + v = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 v = 81 \\ u + v = 12 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow u = 3$, $v = 9$ $x = 3$, $y = 9$.

o) $\begin{cases} \log_3 x = a \Rightarrow x = 3^a \\ \log_3 y = b \Rightarrow y = 3^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3^{ab} = 18 \\ 3^{a^2} + 3^{b^2} = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ 3^{a^2} + 3^{b^2} = 84 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \pm 1$, $b = \pm 2$ de unde rezultă pentru (x, y) soluțiile

$$(3, 9), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right).$$

p) Transformînd în baza x, sistemul devine pentru $x, y \in (0, \infty) - \{1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_x (ax + by) \dfrac{\log_x (bx + ay)}{\log_x y} = 4 \\ \log_x (bx + ay) + \dfrac{\log_x (ax + by)}{\log_x y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x (bx + ay) \log_y (ax + by) = 4 \\ \log_x (bx + ay) + \log_y (ax + by) = 4 \end{cases}$$

Notînd $\begin{cases} \log_x (bx + ay) = v \\ \log_y (ax + by) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ u \cdot v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = y^2 \\ bx + ay = x^2 \end{cases}$

prespunînd $x \neq y$, scăzînd și adunînd cele două ecuații membru cu membru $\Rightarrow \begin{cases} x + y = b - a \\ x^2 + y^2 = b^2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b - a \\ xy = a(a - b) \end{cases}$ din care rezultă $x, y \in \mathbf{R}$;
prin urmare $x = y \Rightarrow x = y = a + b$.

r) $x = y = 5$.

s) $4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y \leqslant 4\log_2 x \Rightarrow (2\log_2 x - 1)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$, $y = 2$.

287. a) $\left(\frac{2}{3}, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \frac{2^4}{3}\right)$

$(9, 3, \sqrt{3}), \left(9, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{1}{9}, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) Notînd $\lg x = u$, $\lg y = v$, $\lg z = t$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} uv = u + v + \lg 2 \\ vt = v + t + 1 \\ ut = u + t + 1 + 2\lg 2 \end{cases}$$ se elimină $\lg 2$ şi obţinem

$\begin{cases} (u-1)(t-2v+1) = 0 \\ vt = 1 + v + t \end{cases}$ evident $u \neq 1 \Rightarrow (u, v, t) = \left(\lg \frac{1}{2}, 0, -1\right)$,

$(u, v, t) = (\lg 200, 2, 3) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{10}\right)$ $(x, y, z) = (200, 100, 1000)$.

d) $\left(a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-1}\right), \left(1, a^2, a^{-\frac{4}{3}}\right)$.

e) Notăm $C = (xy)^{\lg z}$, $(yz)^{\lg x} = A$, $(zx)^{\lg y} = B$. Se determină A, B, C în funcţie de a, b, c şi se obţine:

$$\begin{cases} \lg z\,(\lg x + \lg y) = \lg C \\ \lg x\,(\lg z + \lg y) = \lg A \\ \lg y(\lg x + \lg z) = \lg B \end{cases} \Rightarrow \lg x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lg\frac{AC}{2}\lg\frac{AB}{2}}{2\lg\frac{BC}{2}}}$$ şi analog $\lg y$, $\lg z$.

f) $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$, k) $(2, 4, 8)$, h) notînd cu k valoarea comună a rapoartelor rezultă $k = \frac{\lg d}{s}$ unde $s = \alpha a + \beta b + \gamma c$ cu $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$.

i) Se logaritmează şi după substituţiile $\lg x = u$, $\lg y = v$, $\lg z = t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v + t = 2 \\ uv + vt + ut = -1 \\ uvt = -2 \end{cases} \Rightarrow (u, v, t) = (1, -1, 2) \text{ şi toate permutările}$$
$$(x, y, z) = (10, 10^{-1}, 100) \text{ şi permutările;}$$

j) notînd $2^{\lg x} = u$, $3^{\lg y} = v$, $4^{\lg z} = t$ sistemul devine

$$\begin{cases} u + v + t = 21, \\ u^2 + v^2 + t^2 = 269, \\ u^3 + v^3 + t^3 = 4131 \end{cases} \Rightarrow \{u, v, t\} = \{2, 3, 16\},$$

de unde rezultă $(u, v, t) = (2, 3, 16)$ şi toate permutările;

k) $(2, 4, 8)$; l) Notînd $\log_a x = u$, $\log_a y = v$, $\log_a z = t$

sistemul capătă forma: $\begin{cases} u + \frac{a}{u} = 2v, \\ v + \frac{a}{v} = 2t, \\ t + \frac{a}{t} = 2u \end{cases}$

Se observă că dacă tripletul (u_0, v_0, t_0) este soluție, atunci toate componentele sînt strict pozitive sau strict negative. Dacă (u_0, v_0, t_0) este o soluție atunci și $(-u_0, -v_0, -t_0)$ este tot o soluție. Vom căuta deci soluțiile pozitive $2v = u + \frac{a}{u} \geqslant 2\sqrt{a} \Rightarrow v \geqslant \sqrt{a}$ și la fel $u \geqslant \sqrt{a}$, $t \geqslant \sqrt{a}$. Dacă $u > \sqrt{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow v > \sqrt{a}$ și $t > \sqrt{a}$, adunînd cele trei inegalități $u+v+t = a\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}\right)$, unde $u + v + t > 3\sqrt{a}$ și $a\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}\right) < 3\sqrt{a}$, deci $u = v = t = \sqrt{a}$ și $u = v = t = -\sqrt{a} \Rightarrow x = y = z = a^{\sqrt{a}}$ și $x = y = z = a^{-\sqrt{a}}$.

m) Notînd $\log_3 x = u$, $\log_3 y = v$, $\log_3 z = t$, sistemul devine:

$$\alpha)\ \begin{cases} u^3 - (u-3)^3 = v^3 \\ v^3 - (v-3)^3 = t^3 \\ t^3 - (t-3)^3 = u^3 \end{cases} \Leftrightarrow \beta)\ \begin{cases} 9u^2 - 27u + 27 = v^3, \\ 9v^2 - 27v + 27 = t^3, \\ 9t^2 - 27t + 27 = u^3. \end{cases}$$

Din sistemul β rezultă $9u^2 - 27u + 27 > 0 \Rightarrow v > 0$, deci $u > 0$, $t > 0$. Observăm că soluția sistemului este $(3, 3, 3)$.
Dacă $u > 3$ atunci din $v^3 = 9u(u - 3 + 27) > 27 \Rightarrow v > 3$ și la fel $t > 3$. Dar din sistemul α) rezultă $(u-3)^3 + (v-3)^3 + (t-3)^3 = 0$, contradicție. La fel dacă $u \in (0, 3) \Rightarrow v, t \in (0, 3)$ contradicție cu relația precedentă, deci $(x, y, z) = (27, 27, 27)$.

n) Dacă $f(x) = 2x + 1$, atunci sistemul devine:

$\begin{cases} 3^{f(x)} + 3^{f(y)} + 3^{f(z)} = 81 \\ f(x) f(y) f(z) = 27 \end{cases}$ aplicînd inegalitatea mediilor obținem

$$81 \geqslant 3\sqrt[3]{3^{f(x)+f(y)+f(z)}} \quad (1), \text{ dar}$$

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqslant 3\sqrt[3]{f(x) f(y) f(z)} = 9 \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că sistemul are soluție dacă

$$f(x) = f(y) = f(z) = 3 \Rightarrow x = y = z = 1.$$

o) Notăm $2^x = a$, $2^y = b$, $2^z = c$. Sistemul devine:

$$(1)\ \begin{cases} b^2 + 1 = 2ab, \\ c^2 + 1 = 2bc, \\ a^2 + 1 = 2ac \end{cases} \text{ și scăzînd ecuațiile două cîte două rezultă}$$

$$(2)\ \begin{cases} b^2 - c^2 = 2b(a - c), \\ c^2 - a^2 = 2c(b - a), \\ b^2 - a^2 = 2a(b - c). \end{cases} \text{ evident } a \geqslant 1,\ b \geqslant 1,\ c \geqslant 1.$$

Dacă $b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c \Rightarrow b \leqslant a \Rightarrow b \leqslant c$, deci $a = b = c = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y = z = 0$.

G.M. 10/1988

ANALIZĂ COMBINATORIE

4. După simplificare rămîne:

$m(m+1)(m+2)(m+3)+1=(m^2+3m+1)^2$, unde $m=n-k-2$.

5. a) A_{n-1}^{k-1}. d) $A_k^2 A_{n-2}^{k-2}$,
b) $k \cdot A_{n-1}^{k-1}$. e) $A_{n-p}^{k-p} \cdot p!$.
c) $2 \cdot A_{n-2}^{k-2}$. f) $A_k^p A_{n-p}^{k-p}$.

6. a) Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca $p \leqslant k \leqslant n$. Fie $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ip}$ obiectele date. Pînă la k mai rămîn $k-p$ obiecte care trebuie luate din mulțimea dată, din care am scos p obiecte, deci din $n-p$ și aceasta se poate face în C_{n-p}^{k-p} moduri.

b) Scoatem din mulțime cele q obiecte și formăm combinări din cele rămase în număr de C_{n-q}^{k}.

c) Punem în submulțime unul din cele p obiecte date în restul de $k-1$, le luăm din mulțime cu $n-p$ obiecte (din care am scos cele p obiecte date de pC_{n-p}^{k-1}.

d) Scoatem din mulțime cele două obiecte. Unul îl așezăm în submulțimea cerută (în continuare) și completăm cu alte $k-1$ obiecte din cele $n-2$ rămase, deci C_{n-2}^{k-2}.

e) Vom judeca în două moduri, determinînd mai întîi submulțimile care conțin un obiect din cele p (C_{n-p}^{k-1}) apoi submulțimile care conțin două obiecte din cele p (C_{n-p}^{k-2}) ș.a.m.d. pînă la submulțimile care conțin toate cele p obiecte date (C_{n-p}^{k-p}). Deci numărul de submulțimi care conțin cel puțin un obiect din cele p este $N=C_{n-p}^{k-1}+C_{n-p}^{k-2}+\ldots+C_{n-p}^{k-p}$. Putem judeca și astfel: scoatem de la început cele p obiecte din submulțime și formăm submulțimile care nu conțin nici unul din cele p obiecte în număr de C_{n-p}^{k}. Deci numărul celor care conțin cel puțin unul din cele p obiecte date va fi:

$C_n^k - C_{n-p}^k = N$ de unde rezultă egalitatea:

$C_n^k - C_{n-p}^k = C_{n-p}^{k-1} + C_{n-p}^{k-2} + \ldots + C_{n-p}^{k-p}$.

7. Se poate da o soluție prin calcul folosind oricare formulă C_n^k. Dar să determinăm în două moduri numărul de submulțimi cu k elemente, ale unei mulțimi cu n elemente care conțin un element dat ($n \geqslant k$). Fixînd în submulțime un element a, de exemplu ne rămîn $k-1$ ocuri care trebuie ocupate cu $k-1$ elemente din $n-1$ elemente a e mulțimii. Aceasta se poate face în C_{n-1}^{k-1} moduri. Dar numărul de mulțimi care conțin un element dat îl putem determina și scăzînd din număru tota de submulțimi cu k elemente (C_n^k) numărul de submulțimi cu k elemente care nu conțin pe a_1 (C_{n-1}^k). Deci $C_n^k - C_{n-s}^k = C_{n-1}^{k-1}$ ambii membri reprezentînd numărul de submulțimi cu k elemente care conțin pe a_1.

8. Dacă n-ar fi drepte paralele şi nici trei cîte trei concurente numărul punctelor de intersecţie ar fi fost C_n^2. Dar din acesta nu există C_q^2 (pentru drepte paralele) şi C_p^2 se confundă. Deci rămîn

$$C_n^2 - C_q^2 + 1.$$

9. a) $C_n^2 - n$.

b) Este suficient să observăm că din patru vîrfuri ale poligonului numai o pereche de diagonale se intersectează în interior. Deci numărul de puncte de intersecţie situate în interiorul poligonului este C_n^4.

10. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$.

Fixînd pe prima poziţie a unei permutări un element din A, iar pe ultima un element din B, pe cele $m + n - 2$ poziţii rămase putem dispune în mod arbitrar cele $m + n - 2$ elemente rămase din $A \cup B$ în $(m + n - 2)!$ moduri. Cum două elemente din $A \cup B$, primul din A, iar al doilea din B, pot fi alese în $m \cdot n$ moduri rezultă deci un număr total de $(m + n - 2)! \, m \cdot n$ permutări de tipul cerut.

11. $$\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k (1-a)^{n-k} a^k = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} (1-a)^{n-k} a^k =$$

$$= na\,(1 - a + a)^{n-1} = na.$$

12. a) $$\sqrt{C^{k-1}C_n} + \sqrt{C_n^k C^{k+1}} \leqslant \frac{C_n^{k-1} + C_n^k}{2} + \frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{2} =$$

$$= \frac{C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k+1}}{2} < C_{n+1}^{k+1}.$$

b) Se aplică inegalitatea mediilor pentru $(C_n^0)^2, (C_n^1)^2, \ldots, (C_n^n)^2$.

13. $S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2} = \frac{(2a_1 + nr)(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{2S_{n+1}}{n+1} = 2a_1 + nr,$

dar $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (a_1 + kr) = a_1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k + r \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = a_1 2^n + rn2^{n-1} =$$

$$= 2^{n-1}[2a_i + nr] = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}.$$

14. Presupunem prin absurd că $(\exists)k$ şi $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care:

$$\begin{cases} 2C_n^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+2} \\ 2C_n^{k+2} = C_n^{k+1} + C_n^{k+3} \end{cases}$$ şi

prima relaţie devine

$$n^2 - 5n + 2 = 4nk - 4k^2 - 8k.$$

Înlocuind k cu $k + 1$, obţinem pe a doua, deci obţinem sistemul:

$$\begin{cases} n^2 - 5n + 2 = 4nk - 4k^2 - 8k, \\ n^2 - 5n + 2 = 4n(k+1) - 4(k+1)^2 - 8(k+1) \end{cases}$$ care nu are soluţii naturale.

15. Din calculul combinărilor rezultă că $x \geqslant 5$, $x \in \mathbf{N}$.

Simplificînd sistemul obţinem: $\begin{cases} 8 - x(x-3) < 0, \\ x(x-4) - 10 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{5\},$

care verifică şi prima inecuaţie.

16. Scriind $C_{3x-1}^{3x-3} = C_{3x-1}^{2}$ ecuația devine $\left[\frac{(3x-1)(3x-2)}{14}\right] = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqslant \frac{(3x-1)(3x-2)}{14} < 1$. Se pune apoi condiția ca $3x - 1 = k \in \mathbf{N}$.

17. Se impun condițiile: $7x \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x = \frac{k}{7}$, $k \in \mathbf{N}^*$ (1)

$x^2 + 10 \in \mathbf{N}$; $5x + 4 \in \mathbf{N}^* \overset{(1)}{\Rightarrow} 5\frac{k}{7} + 4 \in \mathbf{N}^* \Rightarrow k = 7n$ (2)

$\Rightarrow x \in \mathbf{N}^*$ $x^2 + 3x - 4 \in \mathbf{N}$; $x^2 + 10 \leqslant 7x \Rightarrow x \in (2, 5]$

$x^2 + 3x - 4 \leqslant 5x + 4 \Rightarrow x \in [-2,4] \searrow\swarrow$

$x \in [2, 4]$. (3)

Din (2) și (3) $\Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$. Nu verifică decît $x = 4$.

18. a) Se impune condiția $y \leqslant x$ și din $x[(x-1)(x-2) \ldots$ $\ldots (x - y + 1) - 1] = y \Rightarrow y \geqslant x$, deci $x = y$ și ecuația devine $A_x^x = 2x \Leftrightarrow x! = 2x \Rightarrow x[(x-1)! - 2] = 0 \Rightarrow (x-1)! = 2 \Rightarrow x = 3$, deci $x = y = 3$ și evident soluția $x = 1$, $y = 0$.

b) Împărțind relația dată cu $x! \cdot y!$, obținem

$$\frac{x! + y!}{x!y!} = \frac{(x+y)!}{x!y!} \Rightarrow \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = C_{x+y}^{x} \in \mathbf{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$ Se arată că pentru $x \geqslant 2$ și $y \geqslant 2$.

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} \leqslant 1.$$

19. a) Ecuația se mai scrie $C_x^1 + C_x^2 + \ldots + C_x^{10} = 1023 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_x^0 + C_x + \ldots C_x^{10} = 1024$. Se arată că $x = 10$ este unica soluție.

b) Ecuația se mai scrie $C_{x-11}^{x-11} + C_{x-10}^{x-11} + \ldots + C_{x-1}^{x-11} = 66$

$C_x^{x-10} = 66 \Rightarrow C_x^{10} = 66 \Rightarrow x = 12$.

c) La fel ca la b).

20. a) Evident $x = 0, 1, 2$ nu verifică $x! = x(x+2) \Rightarrow (x-1)! =$ $= x + 2 \Rightarrow (x-1)[(x-2)! - 1] = 3 \Rightarrow x = 4$.

b) Observăm că $x = 1, 2, 3$ nu verifică și ecuația se mai scrie

$$(x-3)[(x-4)! - x^2 - 3x - 8] = 24 \Rightarrow x = 9.$$

c) Se procedează la fel ca la b) și rezultă $x = 2$.

d) $x = 3$.

e) $x = 5$, $x = 7$.

f) Ecuația nu are soluție.

21. Notăm $x! = y$, ecuația devine $y! \, 20y^2 \Rightarrow (y-1)! = 20(y-1) +$ $+ 20 \Rightarrow (y-1)[(y-2)! - 20] = 20 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x! = 6 \Rightarrow x = 3$.

22. Din ecuația dată rezultă $(x+1)! \, y! = 720$.

Dînd lui y succesiv valorile $1, 2, 3, \ldots$ rezultă pentru $y = 0 \Rightarrow x = 5$ pentru $y = 1 \Rightarrow x = 5$; pentru $y = 3 \Rightarrow x = 4$; pentru $y = 5 \Rightarrow x = 2$ pentru $y = 6 \in x = 0$, pentru $y \in \{2, 4\} \Rightarrow x \in \mathbf{N}$, iar dacă $y > 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin \mathbf{N}$.

23. Evident $x = 2$ și $x = 3$ verifică ecuația dată.

Pentru $x > \pi \Rightarrow \frac{\pi}{x} < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{x!} < \frac{1}{(x-1)!} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{x!} \leqslant \frac{\pi}{x!} < \frac{1}{(x-1)!}$

24. Se știe că $\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1 \operatorname{tg}\alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3\alpha + \ldots}{C_n^0 - C_n^2 \operatorname{tg}^2\alpha + \ldots}$ pentru $x = 5$ și $\alpha = \frac{\pi}{5}$,

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \notin \mathbf{Q}$$

deci rezultă că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5m} \notin \mathbf{Q}$, $(\forall)\, m \in \mathbf{N}^*$

Dar $(x+1)!$ este multiplu de 5 pentru $x \geqslant 4$. Rezultă că $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{(x+1)!} =$ $= \operatorname{tg}\frac{\pi}{5m} \notin \mathbf{Q}$, deci ecuația nu are soluții dacă $x \in \mathbf{N}$, $x \geqslant 4$. Se caută soluții printre numerele 0, 1, 2, 3 și rezultă $x = 3$.

G.M. 1/1988

25. Se impune $x \leqslant m - 2$. Rezolvînd ecuația $\Rightarrow x = \frac{m-6}{4} \in \mathbf{N}$, deci $m = 4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$, $x = k - 1$.

26. Soluția $n = 2$ pentru $n \geqslant 3$, $C_{3n+1}^{n-2} > C_{2n}^{n-2}$.

G.M. 3/1984

27. Folosind formula de descompunere obținem

$$C_{n+k}^x = C_{n+k-1}^x + C_{n+k-1}^{x-1} = C_{n+k-2}^x + C_{n+k-2}^{x-1} + C_{n+k-1}^{x-1} =$$

$= C_n^x + C_n^{x-1} + C_{n+1}^{x-1} + \ldots + C_{n+k-1}^{x-1} = C_n^x + k \Rightarrow C_n^{x-1} + C_{n+1}^{x-1} + \ldots +$ $+ C_{n+k-1}^{x-1} = k$. Suma a k numere întregi pozitive să fie egală cu k, deci fiecare trebuie să fie egală cu $1 \Rightarrow x = 1$.

28. $x^{2n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = x^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^n = x(1+x^2)^n = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$

$$x_{2,3} = \pm i.$$

29. Membrul din stînga este o funcție strict crescătoare de x, iar cel din dreapta $(n + 2 - x)!$ este o funcție strict descrescătoare pe mulțimea $\mathbf{N}$ și se arată ușor că $x = 1$ este soluția unică.

30. a) Observăm că $x \geqslant n$, $x \in \mathbf{N}$, iar $x = n$ verifică ecuația; și cum membrul stîng este o funcție crescătoare de x, rezultă că $x = n$ este soluție unică.

b) La fel avem $x \geqslant n$, $x \in \mathbf{N}^*$ și $x = n$ verifică ecuația.
Dacă $x \geqslant n + 1$ membrul stîng devine diferit de zero (vezi ex. 67).

c) Se arată prin inducție după n că:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} =$$

$= \frac{(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$ de unde rezultă soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ...

$$\ldots x_n = n.$$

d) Se arată prin inducție după n că membrul din stînga este egal cu $\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!}$, de unde rezultă soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = -2, \ldots$ $\ldots x_n = -n$.

31. Dacă x_0 ar fi rădăcină multiplă, atunci $x_0 \neq 0$ și $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{x_0^n}{n!} = 0$ absurd.

32. a) Termenul este $35 \cdot 2^5$.

b) $T^{k+1} = C_{100}^k 2^{150-\frac{11k}{6}}$, pentru ca $T_{k+1} \in \mathbf{Q}$, trebuie ca $\frac{11k}{6} \in \mathbf{Z}$ adică $k = 6p$, de unde rezultă că sînt 17 termeni raționali.

33. Răspuns $n = 38$, $n = 39$.

34. $\left.\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{50}^k(\sqrt{2})^k \\ T_{k+2} &= C_{50}^{k+1}(\sqrt{2})^{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} = \frac{C_{50}^k \cdot 2^{\frac{k}{2}}}{C_{50}^{k+1} \cdot 2^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{k+1}{\sqrt{2}(50-k)}$.

$\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} < 1$; $k + 1 < \sqrt{2}(50 - k)$; $k < \frac{50\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

$K_{\max} = 26$, $T_{\max} = T_{29} = C_{50}^{28}(\sqrt{2})^{28} = C_{50}^{28} 2^{14}$.

35. Se deduce ușor că $(a+b)^m = \mathcal{M}a^2 + nab^{n-1} + b^n$.

Deci $x_2 = (10-1)^{x_1} = \mathcal{M}100 + 9 \cdot 10 - 1$ (x_1 = impar).

Deci $x_2 = \mathcal{M}100 + 89$. Să presupunem că x_n se termină cu 89 și $x_{n+1} = 9^{x_n} = (10-1)^{x_n} = \mathcal{M}100 + 10(\mathcal{M}100 + 89) - 1 = \mathcal{M}100 + 89$. Deci x_n se termină cu 89 oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

36. $11^{100} = (14-3)^{100} = \mathcal{M}7 + 3^{100} = \mathcal{M}7 + 4$.

$13^{200} = (14-1)^{200} = \mathcal{M}7 + 1$.

$17^{300} = (14+3)^{300} = \mathcal{M}7 + 3^{300} = \mathcal{M}7 + 1$.

$3^{100} = 9^{50} = (7+2)^{50} = \mathcal{M}7 + 2^{50} = \mathcal{M}7 + 8^{16} \cdot 4 = \mathcal{M}7 + 4$.

$(7+1)^{16} = \mathcal{M}7 + 4$.

$3^{100} = 9^{150} = (7+2)^{150} = \mathcal{M}7 + 2^{150} = \mathcal{M}7 + 8^{50} = \mathcal{M}7 + (7+1)^{50} = \mathcal{M}7 + 1$. Restul este 6.

37. a) $(3^5)^{16} = (243)^{16} = (\mathcal{M}11 + 1)^{16} = \mathcal{M}11 + 1$.

$7^{80} = (7^3)^{26} - 7^2 = 49\,(343)^{26} = (\mathcal{M}11 + 5)(\mathcal{M}11 + 2)^{26} = \mathcal{M}11 + 5 \cdot 2^{26} = \mathcal{M}11 + 10(2^5)^5 = \mathcal{M}11 + 10(2^5)^5 = (\mathcal{M}11 + 10 \cdot 32^5 = M11 + 10(M11 - 1)^5 = \mathcal{M}11 + \mathcal{M}11 - 10 = \mathcal{M}11 + 1$.

$3^{80} + 7^{80} = M11 + 2$.

38. $E = 64^n + 12^n 16 + 36 \cdot 27^n + 21 \cdot 49^n = (37+27)^n + 27^n \cdot 36 + (37+12)^n + 12^n \cdot 16 = \mathcal{M}37 + 27^n + 27^n \cdot 36 + \mathcal{M}37 + 12^n \cdot 21 + 12^n \cdot 16 = \mathcal{M}37$.

39. Oricare 10 numere consecutive se pot scrie sub forma:

$$10k,\ 10k+1,\ 10k+2,\ \ldots\ 10k+9.$$

Deci ultima cifră nenulă a lui 1000! este ultima cifră nenulă a lui $[10k\,(10k+1)(10k+2)\ldots(10k+9)]^{100}$ care este ultima cifră nenulă a lui $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)^{100} = 9!^{100}$.

Ultima cifră nenulă a lui 9! este 8.; $8^{100} = (8^4)^{25} = (4096)^{25} = (10k+6)^{25} = 10k_2 + 6$. Ultima cifră nenulă este 6.

40. $18^{70} = (20-2)^{70} = \sum_{k=0}^{70} C_{70}^k (20)^{70-k} 2^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{67} C_{70}^k 20^{70-k} 2^k (-1)^k +$

$$+ C_{70}^{68} 20^2 2^{68} - C_{70}^{69}\cdot 20\cdot 2^{69} + 2^{70} =$$

$$= \mathcal{M}\,1000 + 36\cdot 69\cdot 400\cdot 2^{68} - 70\cdot 20\cdot 2^{69} + 2^{70} = \mathcal{M}100 + 624.$$

Analog $19^{70} = (20-1)^{70} = \mathcal{M}100 + 601.$

$19^{70} - 18^{70} = \mathcal{M}1000 + 977.$

41. Folosind identitatea $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ unde

$n = 101$

$a = x+1$ $\quad b = x$ obţinem $(1+x)^{100} + (1+x)^{99}x + \ldots + x^{100} =$

$= \frac{(1+x)^{101} - x^{101}}{1} = (1+x)^{101} - x^{101} \Rightarrow T_{51} = C_{101}^{50} x^{50}$, sau se scoate factor comun x^{100}, obţinîndu-se o progresie geometrică cu raţia $\frac{1+x}{x}$ ş.a.m.d.

42. După descompunere obţinem $[(1+x)^2(x-2)]^4[(1+x)(x-2)^2]^5 =$

$= (1+x)^{13}(2-x)^{14} \Rightarrow T_{k+1} = C_{13}^{k'} x^{k'}$, $T_{k+1} = (-1)^k C_{14}^k 2^{14-k} x^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k+k'=5} (-1)^k C_{14}^k C_{13}^{k'} 2^{14-k} x^{k+k'} = x^5 [C_{14}^0 C_{13}^5 2^{14} - C_{14}^1 C_{13}^4 2^{13} + C_{14}^2 C_{13}^3 2^{12} -$$

$$- C_{14}^3 C_{13}^3 2^{11} + C_{14}^4 C_{13}^1 2^{10} - C_{14}^5 C_{13}^0 2^9]$$

43. Suma este o progresie geometrică cu raţia $1+x$ deci ea este egală cu $(1+x)^k \frac{(1+x)^{n-k+1} - 1}{x} = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^k}{x}$ şi termenul care conţine pe x^m este $\begin{cases} C_{n+1}^{m+1}, \text{ dacă } m+1 > k. \\ C_{n+1}^{m+1} - C_k^{m+1}, \text{ dacă } m+1 \leqslant k. \end{cases}$

44. a) Termenul care conţine pe x^p va fi $(n-p+1)\,C_n^{p-1} - pC_n^p$ care este nul.

b) Termenul care conţine pe x^p va fi

$(p-2)\,C_n^{p-2} + nC_n^{p-1} - pC_n^p$ care după calcule este egal cu nC_n^{p-2}.

45. a) Termenul care conţine pe x^5 se obţine (dacă notăm cu $T(x^k)$ termenul care conţine pe x^k)

$1T(x^5) + xT(x^4) + x^2T(x^3) - x^3T(x^2)$, dar $T_{k+1} = (-1)^k C_9^k x^k$.

Luînd $k = 5, 4, 3, 2$ rezultă $x^5[-C_9^5 + C_9^4 - C_9^3 - C_9^2] = -120x^5$.

b) Din dezvoltarea $(1+x^{-3})^7 \Rightarrow T_{k+1} = C_7^k x^{-3k}$, deci termenul care conţine pe x^5 va fi $-x''T(x^{-6}) + x'T(x^{-12})$, luînd $k = 2, 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^5[-C_7^2 + C_7^4] = 14x^5$.

46. $(x^4 - 3x + 1)^8 = [x^4 + (1 - 3x)]^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{4(8-k)}(1 - 3x)^k =$

$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{4(8-k)} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i (3x)^i\right] = \sum_{k=0}^{8} \left[\sum_{i=0}^{8} ((-1)^i C_k^i C_8^k 3^i x^{32-4k+i})\right].$

Pentru a obține x^{14} trebuie ca $32 - 4k + i = 14 \Rightarrow 4k - i = 18$ și $0 \leqslant i \leqslant k$ se obțin pentru i valorile 2 și 6, iar $k = 5$ și 6, deci coeficientul lui x^{14} este $C_8^5 C_5^2 3^2 + C_8^6 C_6^6 3^6$.

Observație: există și o formulă mai generală.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=m}' \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

47. Se știe că $(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) =$

$= x^n + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) x^{n-1} + \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j\right) x^{n-2} + \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j a_k\right) x^{n-3} + \ldots +$

$+ \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n.$

Coeficientul lui x^{n-1} este $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = C_1.$

Coeficientul lui x^{n-2} $C_2 = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} kl$, dar $C_1^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 2C_2$, de unde rezultă C_2. Coeficientul lui x^{n-3} va fi $C_3 = \sum_{1 \leqslant k < h < l \leqslant n} khl$, dar (vezi C.d.p. C. Năstăsescu; C. Niță) din identitatea

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - 3 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} a_i a_j a_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j\right).$$

Făcînd $a_i = i$ obținem

$$\sum_{i=}^{n} i^3 - 3C_3 = \left(\sum_{=1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - C_2\right) \text{ de unde rezultă } C_3.$$

48. a) $5! = 120$ numere.

b) Se observă că $4! = 24$ numere încep cu 3, tot atîtea cu 4, 9, 6, 5. Folosind scrierea zecimală $34965 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 +$
$+ 6 \cdot 10^1 + 5.$

Suma cerută va fi $24 \cdot 3 \cdot 10^4 + 24 \cdot 3 \cdot 10^3 + 24 \cdot 3 \cdot 10^2 +$
$+ 24 \cdot 10 \cdot 3 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 4 \cdot 10^4 + 24 \cdot 4 \cdot 10^3 + 24 \cdot 4 \cdot 10^2 +$
$+ 24 \cdot 4 \cdot 10 + 24 \cdot 4 +$
$+ 24 \cdot 9 \cdot 10^4 + \ldots$
$+ 24 \cdot 6 \cdot 10^4 + \ldots$
$+ 24 \cdot 5 \cdot 10^4 + \ldots = 24(3 + 4 + 9 + 6 + 5)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1).$

c) Cel mai mic număr din șir va fi 34569 și se numără ușor numerele mai mici decît numărul dat. Numărul dat va fi al șaselea.

49. a) $\frac{(a+b)!}{a!b!} = C_{a+b}^{a}.$

b) $\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} = \frac{(a+b+c)!}{(a+b)!c!} \cdot \frac{(a+b)!}{a!b!} = C_{a+b+c}^{a+b} \cdot C_{a+b}^{a}.$

50. Pentru S_1 şi S_2 se calculează $\mathrm{Re}(1+i)^n$ şi $Im\ (1+i)^n$ în două moduri, cu binomul lui Newton şi cu formula lui Moivre. Celelalte sume se obţin din primele două.

51. Fie $S_m = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m$. Observăm că

$$S_0 + S_{n-1} = S_1 + S_{n-2} = S_2 + S_{n-3} = \ldots = 2^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = \frac{n}{2}(S_0 + S_{n-1}) = n \cdot 2^{n-1}.$$

52. $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$.

$$(C_n^m)^2 = (C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2 + 2C_{m-1}^n C_{m-1}^{n-1} = (C_{m-1}^n)^2 \cdot \frac{m+n}{m-n} + (C_{m-1}^{n-1})^2. \quad (1)$$

În (1) $m \to (m-1), (m-2), \ldots, (n-1), n$ şi se înmulţesc relaţiile obţinute cu coeficienţii lui C_{m-k}^{n-1}.
Prin adunarea celor $(m-n)$ relaţii se obţine identitatea din enunţ.

53. $S_1 + iS_2 = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + \ldots +$
$+ \ldots + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \frac{1 - \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha} =$

$$= \frac{2\sin^2\frac{n+1}{2}\alpha - 2i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{i\left(\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{i\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{n}{2}\alpha + i\sin\frac{n}{2}\alpha\right].$$

Rezultă $S_1 = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\frac{n\alpha}{2}$; $S_2 = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{n\alpha}{2}$.

Analog pentru S_3, S_4 adică $S_3 + iS_4 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) \Rightarrow S_3 = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2} \text{ şi}$$
$$S_4 = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

54. Fie ε una din rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ rezultă că:

$(1+\varepsilon)^n = a_n + \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n$
$(1+\varepsilon^2)^n = a_n + \varepsilon^2 b_n + \varepsilon c_n$ şi prin înmulţire rezultă:

$1 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - a_n c_n - b_n c_n$. Dar $a_n + b_n + c_n = 2^n$ şi se ştie că $x^3 + y^3 + z^2 - 3xyz = (x+y+z)(x^3 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

55. Avem de calculat sumele:

$S_1 = 1 + C_m^p + C_m^{2p} + \ldots$

$S_2 = C_m^1 + C_m^{p+1} + C_m^{2p+1} + \ldots$

— — — — — — — — — — — — — —

$S_{k+1} = C_m^k + C_m^{p+k} + C_m^{k+2p} + \ldots$

— — — — — — — — — — — — — —

$S_p = C_m^{p-1} + C_m^{2p-1} + \ldots$

Dacă notăm cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ rădăcinile ecuației $x^p - 1 = 0$, atunci se știe că $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i^n = \begin{cases} 0 \text{ dacă } p \nmid n \\ p \text{ dacă } p \mid n \end{cases}$ Din cele de mai sus rezultă

$$S_1 = \operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} (1 + \varepsilon_q)^m.$$

$$S_2 = \operatorname{Re} A_2 = \operatorname{Re} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} \varepsilon_q^{p-1} (1 + \varepsilon_q)^m.$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$S_{k+1} = \operatorname{Re} A_{k+1} = \operatorname{Re} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} \varepsilon_q^{p-k} (1 + \varepsilon_q)^m$$ și înlocuind

$$\varepsilon_q = \cos \frac{2q\pi}{p} + i \sin \frac{2q\pi}{p} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{2^m}{p} \sum_{q=1}^{p} \cos^m \frac{q\pi}{p} \left[\cos \frac{q\pi}{p} (m + 2p - 2k)\right].$$

56. $\sum_{k=1}^{n} k(n-1)^{k-1} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k(n-1)^{k-1} \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} (n-1)^{k-1} =$
$= n[1 + (n-1)]^{n-1} = n^n.$

57. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}$, unde $C_{n+1}^{k+1} =$
$= \frac{n+1}{k+1} C_n^k.$

58. În mod analog, se folosește relația $C_{n+1}^{2k+1} = \frac{n}{2k+1} C_n^{2k}.$

59. Se aplică în mod repetat formula $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$, adică
$C_p^1 + C_p^2 = C_{p+1}^2$, $C_{p+1}^2 + C_{p+1}^3 = C_{p+2}^3$, $\ldots$ $C_{p+n}^{n+1} + C_{p+n}^{n+2} = C_{p+n+1}^{n+2}$.

60. Calculăm coeficientul lui x^{2k} din dezvoltarea $(1+x)^n(1-x)^n =$
$= (1-x^2)^n$. În membrul drept $(-1)^k C_n^k x^{2k}$. În membrul stîng avem:

$$\sum_{p+q=2k} C_n^q x^q (-1)^p C_n^p x^p = \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p C_n^p C_n^{2k-p} x^{2k} =$$
$$= x^{2k}[C_n^0 C_n^{2k} - C_n^1 C_n^{2k-1} + \ldots (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_n^{k+1} + (-1)^k (C_n^k)^2 +$$
$$+ (-1)^{k+1} C_n^{k+1} C_n^{k-1} + (-1)^{k+2} C_n^{k+2} C_n^{k-2} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2k-1} C_n^{2k-1} C_n^1 + (-1)^{2k} C_n^{2k} C_n^0].$$

Ţinînd seama că există termeni egali, coeficientul lui x^{2k} se poate scrie $2[C_n^0C_n^{2k} - C_n^1C_n^{2k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}C_n^{k-1}C_n^{k+1} + \frac{1}{2}(-1)^k(C_n^k)^2] = (-1)^nC_n^k$, de unde rezultă egalitatea din enunţ.

61. $\frac{C_n^k}{C_2^k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}C_{2n-k}^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{C_{2n}^k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}C_{2n-k}^n = \frac{(n!)^2}{(2n!)}C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$

62. Coeficientul lui x^k din polinomul $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+m}$ este pe de o parte $C_n^k + C_{n+1}^k + \ldots C_{n+m}^k$, iar dacă calculăm suma (progresie geometrică) obţinem $\frac{(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n}{x}$ şi deci coeficientul lui x^k va fi $\begin{cases} C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}, & k \leqslant n-1, \\ C_{n+m+1}^{n+1}, & k = n. \end{cases}$

63. În exerciţiul 65 se consideră $n = p$ şi $q = p$ sau plecînd de la $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + \ldots + C_{2n}^{n+p}x^{n+p} + \ldots + C_{2n}^{2n}x^{2n} = (C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^px^p + C_n^{p+1}x^{p+1} + \ldots + C_n^nx^n) \cdot (C_n^0 + C_n^1x \ldots + C_n^px^p + C_n^{p+1}x^{p+1} + \ldots + C_n^nx^n)$. Egalînd coeficienţii lui x^{n+p} obţinem $C_{2n}^{n+p} = C_n^nC_n^p + C_n^{n-1}C_n^{p+1} + \ldots + C_n^pC_n^n = C_n^0C_n^p + C_n^1C_n^{p+1} + \ldots + C_n^{n-p}C_n^n$.

64. a) Se calculează coeficientul lui x^n din dezvoltările

$$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n.$$

$\sum_{k+k'=n}(-1)^kC_n^kC_n^{k'}x^{k+k'} = x^n[C_n^0C_n^n - C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \ldots (-1)^nC_n^nC_n^0] = x^n[(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (-1)^n(C_n^n)^2]$, iar în dreapta coeficientul lui x^n este egal cu $\begin{cases} 0 \text{ dacă } n \text{ impar}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}C_2^{\frac{n}{2}} \text{ dacă } n \text{ par}. \end{cases}$

b) Caz particular pentru exerciţiul 65, $n = p = q$.

65. Se calculează coeficientul lui x^q în ambii membri ai dezvoltării

$$(1+x)^{n+p} = (1+x)^p(1+x)^n; \quad C_{n+p}^qx^q \text{ şi}$$

$$\sum_{k+k'=q}C_p^kC_n^{k'}x^{k+k'} = x^q(C_p^0C_n^q + C_p^1C_n^{q-1} + \ldots + C_p^qC_n^0).$$

66. Fie $S = \sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}C_n^k = n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k = n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^{n-k} = nC_{2n-1}^{n-1} = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$.

67. $E(x) = x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \ldots x^{n-m}(1-x)^n$.

Coeficientul lui x^n este s. Dar $E(x) = x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^n$

$$S = \begin{cases} 0, & m = n, \\ (-1)^mC_{n-1}^m, & m \leqslant n-1. \end{cases}$$

68. Se calculează coeficientul lui x^{m+k-1} în dezvoltarea $(1+x)^n(1+x)^k = (1+x)^{n+k}$ care în membrul stîng este:

$$C_k^kC_n^{m-1} + C_k^{k-1}C_n^m + \cdots + C_k^1C_n^{m+k-2} + C_k^0C_n^{m+k-1}$$

iar în membrul drept este C_{n+k}^{m+k-1}, de unde rezultă $a_1 = C_k^{k-1} = C_k^1$

$a_2 = C_k^{k-2} = C_k^2 \ldots, a_{k-1} = C_k^1 = C_k^{k-1}$. Pentru $k = 7$ avem

$$a_1 = 7,\ a_2 = a_5 = 21,\ a_3 = a_4 = 35,\ a_6 = 7.$$

69. Fie $|a_i| = \rho_i$. Vom demonstra că toți ρ_i sînt egali. Presupunem că nu toți sînt egali, fie ρ_k, ρ_j cel mai mare și respectiv cel mai mic dintre ei. Din formulele lui Viète avem:

$$a_k^k = \frac{\Sigma\, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a}{C_n^k} \text{ și trecînd la module, obținem}$$

$$\rho_k^k \leqslant \frac{\Sigma\, \rho_{i1} \rho_{i2} \ldots \rho_k}{C_n^k} < \rho_k^k, \text{ contradicție.}$$

Prin urmare toți ρ_i sînt egali, fie $\rho_i = \rho$, $i = 1, 2, \ldots n$. Dacă $\rho = 0$ problema este rezolvată. Presupunem $\rho \neq 0$. Din formulele lui Viète avem $na_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dacă cel puțin două numere a_i sînt diferite obținem:

$$n\rho = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \sum_{k=1}^{n} |a_k| = n\rho, \text{ contradicție,}$$

deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

70. Se știe că $C_p^k \vdots p$ dacă p este prim și că

$$C_{p+q}^k = C_p^0 C_q^k + C_p^1 C_q^{k-1} + \ldots + C_p^{k-1} C_q^1 + C_p^k C_q^0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{p+q}^k - C_p^k - C_q^k \vdots pq.$$

71. a) Se utilizează formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (vezi ex. 62)

b) Membrul stîng se mai scrie $\sum_{p=k-2}^{n-2} (n - p - 1) C_p^{k-2} =$

$$= n \sum_{p=k-2}^{n-2} C_p^{k-2} - \sum_{p=k-2}^{n-2} (p + 1) C_p^{k-2} = n\, C_{n-1}^{k-1} - (k - 1) \sum_{p=k-2}^{n-2} C_{p+1}^{k-1} =$$
$$= nC_{n-1}^{k-1} - (k - 1)\, C_n^k = C_n^k.$$

c) $\sum_{p=k-3}^{n-3} C_p^{k-3} C_{n-p-1}^2 = \sum_{p=k-3}^{n-3} C_p^{k-3} \frac{(n - p - 1)(n - p - 2)}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 \sum C_p^{k-3} - n \sum (2p + 3)\, C_p^{k-3} + \sum (p + 1)(p + 2)\, C_p^{k-3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 \sum C_p^{k-3} - n \sum (2p + 3)\, C_p^{k-3} - 2n \sum (p+1) C_p^{k-3} + (k-1)(k-2) \sum C_{p+2}^{k-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 C_{n-2}^{k-2} - nC_{n-2}^{k-2} - 2n\,(k - 2) \sum C_{p+1}^{k-2} + (k - 1)(k - 2) C_n^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[n(n - 1)\, C_{n-2}^{k-2} - 2k\,(k - 2)\, C_n^k + (k - 1)(k - 2) C_n^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[k(k - 1)\, C_n^k - 2k(k - 2)\, C_n^k + (k - 1)(k - 2)\, C_n^k\right] = C_n^k.$$

(S-a utilizat formula: $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+p}^k = C_{k+p+1}^{k+1}$.)

72. Se calculează coeficientul lui x^{2n+1} din ambii membri ai identității $(1+x)^{2n+1}(1-x)^{2n+1} = (1-x^2)^{2n+1}$, care este „0" în membrul drept și în membrul stîng $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k C_{2n+1}^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k (C_{2n+1}^k)^2$.

73. Înlocuim $C_1 = C_n^k$, $C_2 = C_n^{k+1}$, $C_3 = C_n^{k+2}$, $C_4 = C_n^{k+3}$ și se ține seama că $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

74. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n}[(1 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \ldots) -$

$- i\sqrt{3}(C_n - 3C_n^3 + 3^2C_n^5 \ldots)]$ dar $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$,

de unde rezultă:

$$S_n = (-1)^{n+1}\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n = 3k, \\ -2^{n-1}, \text{ dacă } n = 6k+4 \text{ sau } 6k+5. \\ 2^{n-1}, \text{ dacă } n = 6k+1 \text{ sau } 6k+2. \end{cases}$$

75. a) $0 = (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots)^2 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 +$

$+ 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}C_n^i C_n^j \Rightarrow \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j-1}C_n^i C_n^j = \frac{C_{2n}^n}{2} = C_{2n-1}^n$.

b) $2^{2n} = (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n)^2 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}C_n^i C_n^j$, dar

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \text{ și } \frac{1}{2}C_{2n}^n = C_{2n-1}^n.$$

76. Să descompunem în fracții simple, $x \in \mathbf{R} - \{0, 1, 2, \ldots n\}$,

$$\frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \ldots \frac{A_n}{x-n}.$$

Pentru a determina pe A_k se înmulțește egalitatea cu $x - k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-n)} = A_k + (x-k)\left[\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-k+1} + \frac{A_{k+1}}{x-k-1} + \ldots \frac{A_n}{x-n}\right]$$

și se face $x = k \Rightarrow A_k = (-1)^k C_n^k$.

77. Se procedează ca la 76.

78. $S = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!(k+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

și în general $a + \frac{a^2C_n^1}{2} + \ldots + \frac{a^{n+1}C_n^n}{n+1} = \frac{(1+a)^{n+1}-1}{a+1}$.

79. $S = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!(k+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_{n+2}^{k+2} =$

$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+2)C_{n+2}^{k+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}C_{n+2}^{k+2} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1} -$

$$- \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}C_{n+2}^{k+1} \text{ s.a.m.d.}$$

80. Fracția $\frac{n!h^n}{x(x+h)\dots(x+nh)}$ se descompune în fracții simple.

81. Se descompune în fracții simple fracția:

$$\frac{n!}{(x+2)(x+3)\dots(x+n+2)} = \frac{A_0}{x+2} + \frac{A_1}{x+3} + \dots + \frac{A_i}{x+i+2} + \dots +$$

$$+ \frac{A_n}{x+n+2} \Rightarrow A_i = \frac{n!}{(x+2)\dots(x+i+1)(x+i+3)\dots(x+n+2)} -$$

$- (x+i+2)\cdot E(x)$. Făcînd $x = -i-2$ se obține $A_i = (-i)^i C_n^i$. Deci suma obținută este egală cu $\frac{n!}{(k+2)(k+3)\dots(k+n+2)}$

G.M. 2/1987

82. a) Se verifică prin calcul.

b) Se poate utiliza relația $\frac{1}{C_{2n}^k} = \left(\frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)\frac{2n+1}{2n+2}$ și

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-1)^k}{C_{2n+1}^k} - \frac{(-1)^{k+1}}{C_{2n+1}^{k+1}}\right) = \frac{2n+1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^0} + \frac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}\right) = \frac{2n+1}{n+1} \text{ sau}$$

dînd valori lui k de la 0 la $2n$ în relația de la a) și adunînd obținem:

$S_1 = 2n+1-S$. Folosind formula combinărilor complementare

$$S_1 = \frac{2n}{C_{2n}^{2n}} - \frac{2n-1}{C_{2n}^{2n-1}} + \dots - \frac{1}{C_{2n}^1} + \frac{0}{C_{2n}^0} \Rightarrow 2S_1 = 2nS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2n+1}{n+1} \text{ și } S_1 = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

83. Soluția I. Fie $s_n = C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + \dots + 2^n C_n^n$ avem:

$S_n = C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-2}^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1} + 2(C_{2n-2}^{n-1} + \dots C_{n-1}^{n-1}) + \dots +$

$+ \dots + 2^n C_{n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^{n-1} + (2^2-1)C_{2n-2}^{n-1} + (2^3-1)C_{2n-3}^{n-1} + \dots = 4S_{n-1}$

Apoi putem proceda și prin inducție.

Soluția III. Suma este coeficientul lui x din polinomul:

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n =$$

$$= (1+x)^{2n}\frac{\left(\frac{2}{1+x}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{1+x}-1} = (1+x)^{2n}\frac{\frac{2^{n+1}-(1+x)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}}{\frac{1-x}{1+x}} =$$

$$= \frac{(1+x)^n[2^{n+1}-(1+x)^{n+1}]}{1-x} = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^4 + \dots$$

$$+ \dots (1+x)^n 2^{n+1} - (1+x)^{2n+1} = (1-x)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)$$

$$a_0 = C_n^0 2^{n+1} - C_{2n+1}^0$$

$$a_1 - a_0 = C_n^1 2^{n+1} - C_{2n+1}^1$$

$$- - - - - - - - -$$

$$a_n - a_{n-1} = C_n^n 2^{n+1} - C_{2n+1}^n$$

$$a_n = 2^{2n+1} - \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n} = 4^n.$$

84. Fie $s_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 -$ pentru $n \geqslant 3$, avem:

$$s_{n-1} - s_{n-2} = C_{n-1}^0 - (C_{n-1}^1 + C_{n-2}^0) + (C_{n-3}^2 + C_{n-3}^1) - =$$

$$= C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - = s_n.$$

Deci $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$ $\forall$ $n \geqslant 3$. Rezultă că $s_{n+1} = s_n - s_{n-1} =$

$= s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-1}$ sau $s_{n+1} = -s_{n-2} \Rightarrow s_{n+6} = -s_{n+3} = s_n$.

Deci şirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este periodic cu perioada $T = 6$.

Pentru determinarea şirului este suficient să calculăm primii şase termeni din şir. $s_1 = C_1^0 = 1$; $s_2 = C_2^0 - C_1^1 = 0$; $s_3 = C_3^0 - C_2^1 = -1$, $s_4 = -s_1$;

$$s_5 = -s_2;\ s_6 = s_3.$$

$$s_{2n} = \begin{cases} -1 & n = 3k, \\ 0 & n = 3k+1. \\ 1 & n = 3k+2. \end{cases}$$

85. Fie $s_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2q^2 + + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i +$ atunci $s_{n+1} - s_n = \sum (-1)^i (C_{n+1-i}^i - C_{n-i}^i) p^i q^i = \sum (-1)^i C_{n-i}^{i-1} p^i q^i =$ $= -pqs_{n-1}$.

Deci $s_{n+1} = s_n - pqs_{n-1}$. Folosind inducţia şi această relaţie se demonstrează uşor relaţia cerută.

86. Se folosesc egalităţile (de reţinut!):

$$k(k+1) \quad (k+p-1) = \frac{1}{p+1}[(k-1)k(k+1) \quad (k+p-1) -$$

$$- k(k+1)(k+2) \quad (k+p)]$$

şi $\frac{1}{k(k+1) \quad (k+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{k(k+1) \quad (k+p-2)} - \right.$

$$\left. - \frac{1}{(k+1)(k+2) \quad (k+p-1)}\right].$$

Se dau valori lui k şi se adună.

Observaţie: se poate calcula asemănător sumele:

$$s_p = a_1a_2 \quad a_p + a_2a_3 \quad a_{p+1} + + a_na_{n+1} \quad a_{n+p-1}$$

$$s_p' = \frac{1}{a_1a_2 \ldots a_p} + \frac{1}{a_2a_3 \quad a_{p+1}} + + \frac{1}{a_na_{n+1} \quad a_{n+p-1}}$$

unde $a_1, a_2, a_3,$ formează o progresie aritmetică.

87. $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{C_{k+m}^{k}} = k! \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)} =$

$$= \frac{k!}{k-1}\left[\frac{1}{(m+1)\ldots(m+k-1)} - \frac{1}{(m+2)\ldots(m+k)}\right] =$$

$$= \frac{k!}{k-1}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+2)\ldots(n+k)}\right].$$

88. $s_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{4m} C_{2m}^{m}$.

$$\frac{1}{4m} C_{2m}^{m} = \frac{(2m)!}{m!\,m!} \cdot \frac{1}{4m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2m}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m)^2 (2m)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2m}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)[(2m+1)-(2m)]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)(2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m-2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{4m} C_{2m}^{m} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} - \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2m-2)}.$$

Se dau valori lui m şi se adună membru cu membru.

89. Pornind de la dezvoltările

$$(1+\sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} + \sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1} \text{ şi } (1-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} -$$

$$- \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}$$ şi înmulţind membru cu membru obţinem egalitatea.

G.M. 10/1966

90. Pentru n par după ridicarea la putere cu binomul lui Newton obţinem

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = A + B\sqrt{m(m-1)} \text{ iar } (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n =$$

$$= A - B\sqrt{m(m-1)}$$

unde $A, B \in \mathbf{N}^*$. Înmulţind membru cu membru obţinem:

$$1 = A^2 - B^2 m(m-1) \Leftrightarrow A^2 = B^2 m(m-1) + 1.$$

Deci $(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{A^2} + \sqrt{B^2 m(m-1)} = \sqrt{B^2 m(m-1)+1} +$ $+ \sqrt{B^2 m(m-1)}$ deci $p = B^2 m(m-1) + 1$. Se procedează analog pentru n impar obţinînd $(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{2n+1} = A\sqrt{m} + B\sqrt{m-1}$, $A, B \in \mathbf{N}^*$.

91. Din ipoteză rezultă că $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2n} = 2A + 1 + 2\sqrt{A(A+1)}$. Dar din binomul lui Newton rezultă uşor că $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2n} = B + C\sqrt{ab}$; $B, C \in \mathbf{N}$ şi $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2n} = B - C\sqrt{ab}$ de unde rezultă că $B^2 - c^2 ab = (a-b)^{2n}$. Dar din $2A + 1 + 2\sqrt{A(A+1)} = B + C\sqrt{ab}$ rezultă că $B = 2A + 1$ şi $4A(A+1) = c^2 ab$ (se demonstrează prin red. la absurd). Deci $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2n} = 2A + 1 - 2\sqrt{A(A+1)} \Rightarrow (a-b)^{2n} = 1 \Rightarrow |a-b| = 1$.

G.M. 12/1985

92. Să arătăm că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, înscrierea ca număr zecimal a numărului $x_n = (\sqrt{2501} + 50)^{2n+1}$, primele $4n + 2$ cifre după virgulă sînt zerouri $x_n = (\sqrt{2501} + 50)^{2n+1} = \sqrt{2501} + 50)^{2n+1} - (\sqrt{2501} - 50)^{2n+1} + (\sqrt{2501} - 50)^{2n+1} = y_n + z_n$ unde $y_n = (\sqrt{2501} + 50)^{2n+1} - (\sqrt{2501} - 50)^{2n+1}$ şi $z_n = \sqrt{2501} - 50)^{2n+1}$. Se observă uşor că $y_n \in \mathbf{N}$ şi deoarece

$$0 < \sqrt{2501} - 50 < 1 \Rightarrow [x_n] = y_n,\ \{x_n\} = z_n$$

$$x_n = y_n + \frac{1}{(\sqrt{2501} + 50)^{2n+1}} < y_n + \frac{1}{100^{2n+1}}$$

Deci $z_n < \underbrace{0{,}0 \ldots 0,\ 1}_{4n+2} \Rightarrow z_n = \underbrace{0,\ 0 \ldots 0}_{4n+2}\ ab \ldots$

93. a) Împărţind ecuaţiile cu membrul drept obţinem în stînga o sumă de funcţii descrescătoare, care este tot o funcţie descrescătoare şi care ia valoarea 1 o singură dată pentru $x = 1$.

b) $x = 3$.

94. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n \in \mathbf{N}$

$$C_{2n}^n = \frac{n+1}{n} C_{2n}^{n+1} \Rightarrow nC_{2n}^n = (n+1)C_{2n}^{n+1},$$

dar $(n, n+1) = 1 \Rightarrow n+1$ divide C_{2n}^n.

95. Vom arăta că $(p+1)$ divide $C_{2p}^p\ (\forall)\ p \in \mathbf{N}^*$.

Avem $pC_{2p}^p = (p+1)C_{2p}^{p+1}$ şi cum $(p, p+1) = 1 \Rightarrow (p+1)/C_{2p}^p$ pentru $p = 2^{n-1}$ se obţine problema dată.

96. Se poate scrie:

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 2n}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \ldots (2n)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1).$$

Pentru **Q** (vezi 94)

$$C_{kn}^{(k-1)n} \cdot C_{(k-1)n}^{(k-2)n} \ldots C_{2n}^n = C_{kn}^n C_{(k-1)n}^n \ldots C_{3n}^n C_{2n}^n = \frac{(k \cdot n)!}{[(k-1)n]!\,n!} \cdot \frac{[(k-1)n]!}{[(k-2)n]!\,n!} \ldots$$

$$\ldots \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(kn)!}{(n!)^k},\ \text{dar}\ C_{pn}^n = pC_{pn-1}^{p-1} \Rightarrow \frac{(kn)!}{k!(n!)^k} = C_{kn-1}^{n-1} C_{(k-1)n-1}^{n-1} \ldots C_{2n-1}^{n-1} = \mathbf{M}.$$

97. $\dfrac{(m \cdot n)!}{(m!)^n} = \dfrac{(mn)!}{m!(mn-m)!} \cdot \dfrac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!} \ldots \dfrac{(2m)!}{m!m!} = C_{mn}^m \cdot C_{mn-m}^m \ldots$

$\ldots C_{2m}^m$ şi utilizînd formula $C_{mk}^m = kC_{mk-1}^{m-1}$ obţinem

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!} = C_{2m-1}^{m-1} \ldots C_{nm-1}^{m-1} \in \mathbf{N}.$$

Schimbînd rolurile lui m cu n şi înmulţind egalităţile găsite, obţinem că:

$$\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}} \in \mathbf{N}.$$

98. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1!a_2! \ldots a_n!} = \frac{s_n}{a_1!a_2! \ldots a_n!} = \frac{s_n}{s_{n-1}} \cdot \frac{s_{n-1}!}{s_{n-2}!} \cdot \ldots \cdot \frac{s_3!}{s_2!} s_2! \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{a_1!a_2! \ldots a_n!} = \frac{s_n}{s_{n-1}!a_n!} \cdot \frac{s_{n-1}!}{s_{n-2}!a_{n-1}!} \cdot \ldots \cdot \frac{s_3!}{s_2!a_3!} \cdot \frac{s_2!}{a_1!a_2!} =$$

$$= C_{s_n}^{s_{n-1}} \cdot C_{s_{n-1}}^{s_{n-2}} \ldots C_{s_3}^{s_2} \cdot C_{s_2}^{s_1} \in \mathbf{N}^*.$$

99. $\mathcal{C}_{np}^k - nC_p^k = \frac{np}{k!} [(np-1)(np-2) \ldots (np-k+1) -$

$$- (p-1)(p-2) \ldots (p-k+1)] = \frac{np}{k!} \cdot \mathcal{M}p.$$

După efectuarea înmulțirilor din paranteză termenul liber (în raport cu p) dispare.

G.M. 5/1987

100. Vom folosi observația că $(x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n) = \mathcal{M}x^2 +$
$+ (-1)^n a_1a_2 \ldots a_n + (-1)^{n-1}x(a_1a_2 \ldots a_{n-1} + \ldots + a_2a_3 \ldots a_n) =$

$$= C_{np}^p - n = \frac{np(np-1) \ldots (np-p+1)}{p!} - n =$$

$$= n\left[\frac{-(np-1)(np-2) \ldots (np-p+1) - (p-1)!}{(p-1)!}\right] =$$

$$= \frac{n}{(p-1)!} [\mathcal{M}p^2 - p(1 \cdot 2 \ldots (p-2) + \ldots + 2 \cdot 3 \cdot \ldots (p-1)].$$

Este suficient să arătăm că: $m = 1 \cdot 2 \ldots (p-1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 \ldots$
$\ldots (p-1) + (1 \cdot 2 \ldots (p-2)$ se divide cu p. Se demonstrează ușor că termenii din m dau resturi diferite la împărțirea cu p. Deci suma resturilor va fi: $1 + 2 + \ldots (p-1) = \frac{p(p-1)}{2} \in \mathbf{N}$ și se divide cu p (p = nr. prim).

Se cunoaște cazul mai general $C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right]$ se divide cu p^2.

Fie dezvoltarea $(1+x)_{np} = [(1+x)^p]^n$.

Coeficientul lui x^p în membrul stîng este C_{np}^p, iar în membrul drept $\sum_{k_1+k_2+\ldots+kn=p} C_p^{k_1}C_p^{k_2} \ldots C_p^{k_n}$, în care n termeni sînt egali cu 1, iar ceilalți termeni conțin cel puțin doi factori de forma $C_p^{k_i} \cdot 1 \leqslant k$, $i < p$ cu $C_p^{k_i} \vdots p$ Deci fiecare termen este divizibil cu p^2; așadar $C_{np}^p - n \vdots p^2$.

G.M. 5/1987

101. a) $x_n \in \mathbf{N}$ se demonstrează prin inducție matematică sau cu binomul lui Newton. Dacă notăm $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ și $\beta = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow \alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 4$. Deci α și β sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 6x + 4 = 0$ și $x_n = \alpha^n + \beta^n$. Scriind că α și β sînt rădăcini, obținem:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0 \\ \beta^2 - 6\beta + 4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot\, \alpha^{n-2} \\ \cdot\, \beta^{n-2} \end{matrix}$$ și adunînd obținem

$x_n = 6x_{n-1} - 4x_{n-2}$, care ne ajută să demonstrăm prin inducție atît punctul a) cît și b) c); $(\sqrt{3+\sqrt{5}})^n = x_n - (3-\sqrt{5})^n$. Dar $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$ și $x_n \in \mathbf{N}$, x_n = par $\Rightarrow (3+\sqrt{5})^n = (x_n - 1) + (1 - (3-\sqrt{5})^n)$ și deci $[(3+\sqrt{5})^n] = x_n - 1$ impar.

O.M. 1971

102. $(3+\sqrt{7})^n = 3^n + C_n^1 3^{n-1}\sqrt{7} + C_n^2 3^{n-2}7 \ldots$

$(3-\sqrt{7})^n = 3^n - C_n^1 3^{n-1}\sqrt{7} + C_n^2 3^{n-2}7$

$(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n = 2(3^n + C_n^2 3^{n-2}\cdot 7 + C_n^4 3^{n-4}7^2 +$

$(3+\sqrt{7})^n = A + B\sqrt{7}$; $(3-\sqrt{7})^n = A - B\sqrt{7}$, unde $A, B \in \mathbf{N}$.

$2A = (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$; $A = 3^n + C_n^2 3^{n-2}\cdot 7 + C_n^4 3^{n-4}7^2 + \ldots$

3^n = fără soț iar restul termenilor sînt cu soț, rezultă A fără soț.

103. $S_m^k = \sum_{p=1}^{m} p^k C_m^p = m\sum_{p=1}^{m} p^{k-1}C_{m-1}^{p-1}$, $p^k C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}p^k =$

$= m\cdot p^{k-1}C_{m-1}^{p-1}$

$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$ și $C_{m-1}^{p-1} = C_m^p - C_{m-1}^{p-1}$.

$$S_m^k = m\sum_{p=1}^{m} p^{k-1}(C_m^p - C_{m-1}^{p-1}).$$

Se calculează S_m^1 după care S_m^2 și S_m^3 se determină folosind relația de recurență.

104. Fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k}^n \sin(k+1)\frac{\pi}{3}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^n \cos(k+1)\frac{\pi}{3}$.

Rezultă că $c_n + is_n = \varepsilon a_n$, unde $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, iar $a_n = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k C_{2n-k}^n$.

Apoi vom arăta că $a_{n+1} - a_n = (1+\varepsilon)C_{2n+1}^n$ și din $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) +$ $+ (a_n - a_{n-1}) + \ldots + (a_1 - a_0) + a_0$ rezultă

$$a_n = (1+\varepsilon)b_n + 1 \text{ unde } b_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2k+1}^k. \text{ Deci}$$

$$C_n + iS_n = (\varepsilon+\varepsilon^2)b_n + \varepsilon \Rightarrow C_n = \operatorname{Re}[(\varepsilon+\varepsilon^2)b_n + \varepsilon] =$$

$$= b_n\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

G.M. 6/1987

105. Fie $z = \cos\theta + i\sin\theta$ și $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$, $2\cos\theta = z + \bar{z}$ $2i\sin\theta = z - \bar{z}$ și $z\cdot\bar{z} = 1$. Ridicînd la puterea $2p$, $2p+1$ aceste relații cu binomul Newton obținem:

$$z^n\cos^n\theta = C_n^0(z^n + \bar{z}^n) + C_n^1(z^{n-2} + \bar{z}^{n-2}) + \ldots = 2C_n^0\cos n\theta +$$
$$+ 2C_n^1\cos(n-2)\theta \ldots \text{ Facem } n = 2p,\ n = 2p+1 \text{ etc.}$$

106. Suma se mai scrie $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = (C_{2n}^n)^2$.

107. $(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots C_m^m x^m$. Se derivează de k ori $m(m-1)\ldots(m-k)(1+x)^{m-k} = C_m^k k! + C_m^{k+1}x(k+1)k\ldots 2 + \ldots$
$$+ C_m^m x^{m-k} m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Se împarte prin $k!$ și se obține identitatea din enunț.

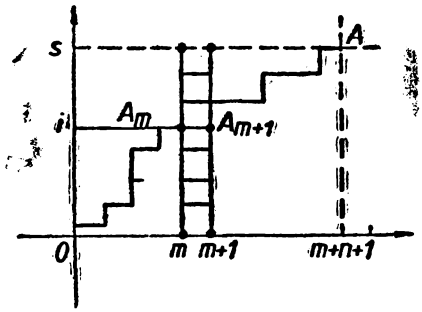


Fig. 22

108. Se numără drumurile de la punctul 0 (0, 0) şi $A(m + n + 1, s)$ (vezi figura) în două moduri.

109. Presupunînd că aducem la acelaşi numitor, în numitorul comun va exista factorul 2. Fie $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Deci în numitorul comun va intra 2^k şi un singur termen din suma dată are numitorul 2^k, şi nu există alt termen astfel încît $m = 2^k \cdot p$ cu $p \geqslant 2$ (din alegerea lui k).
Deci toţi termenii de la numărător cu excepţia celui cu numitorul 2^k, după aducerea la acelaşi numitor, vor fi pari, iar cel cu numitorul 2^k va fi impar. Deci numărătorul va fi impar şi numitorul par, deci $S \notin \mathbf{N}$.

110. a) Se procedează ca la exerciţiul precedent alegînd pe 3 în loc de 2 ($3^k \leqslant n < 3^{k+1}$).

b) Se demonstrează prin inducţie că $A_n - B_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Rezultă uşor că $0 < A_n - B_n < \frac{n}{n+1} < 1$ şi din aici rezultă că $\{A_n\} - \{B_n\} \neq 0$.

G.M. 6/1986

111. Dacă $pk \leqslant n$ atunci $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_{n-k}^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}$

$$C_{n-(p-1)k}^k = \frac{[n-(p-1)k]!}{k![(n-pk)!]} \text{ care prin înmulţire dau}$$

$\frac{n!}{(k!)^p(n-pk)!} \geqslant 1 \Rightarrow n! \geqslant (k!)^p$. Înlocuind n cu $n!$, k cu $n-1$ şi p cu r

rezultă $(n!)! \geqslant [(n-1)!]^n$. $\qquad (pk = n(n-1) < n!)$

112. a) $(k+1)(n-k) \geqslant n \ (\forall)\ k \in (0, 1, 2, \ldots n-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} (k+1)(n-k) > n^n \Leftrightarrow (n!)^2 > n^n.$$

b) Se procedează prin inducţie şi se foloseşte $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

113. Fie d = c.m.m.d.c. al numerelor, atunci d este divizor comun şi al numerelor $C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k$, $C_{n+1}^{k-1} = C_{n+2}^k - C_{n+1}^k$, $\ldots$ $C_{n+k-1}^{k-1} =$

$$= C_{n+k}^k - C_{n+k-1}^k.$$

Analog obţinem că d este divizor comun şi pentru numerele:
C_n^{k-2}, C_{n+1}^{k-2}, $\ldots$ C_{n+k-2}^{k-2} şi din aproape în aproape rezultă că $d/C_n^0 \Rightarrow d = 1$.

114. Vezi exerciţiul 100.

115. Punînd condiţia $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1} \Leftrightarrow 2 = \frac{k}{n-k+1} + \frac{n-k}{k+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n-2k)^2 = n+2$, deci n trebuie să fie de forma $n = m^2 - 2$,

$m = 2, 3, 4, \ldots$. Observăm că pentru $m = 2 \Rightarrow n = 2$ şi din egalitatea $(n - 2k)^2 = n + 2$, rezultă pentru k valori inacceptabile. Dacă $m \geqslant 3$, luînd $k = \frac{m(m-1)}{2} - 1$ care satisface condiţia $0 < \frac{m(m-1)}{2} - 1 < m^2 - 2$, obţinem soluţia problemei.

116. 1) $\frac{C_{2m}^n}{m+1} = \left(1 - \frac{m}{m+1}\right) C_{2m}^m = C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1} \in \mathbf{N}$.

2) Pentru $n = m$, $\frac{k}{n+m+1} C_{2n}^{n+m} = \frac{k}{2m+1} \Rightarrow k \geqslant 2m + 1$ şi $2m+1/k$ deci cea mai mică valoare este $k = 2m + 1$.

Pentru $n > m$, obţinem $\frac{2m+1}{n+m+1} C_{2n}^{n+m} = \left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right) C_{2n}^{n+m} =$

$= C_{2n}^{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!} = C_{2n}^{n+m} - C_{2n}^{n+m+1}$. Deci $k = \mathcal{M}(2m+1)$.

117. Vom demonstra prin inducţie identitatea după m

$S_{m,n} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!}$. Pentru $m = 1 \Rightarrow S_{1,n} = 1 - \frac{(n+2)!}{n!(n+1)} = -\frac{(n+1)!}{n!}$.

Presupunînd adevărată pentru m, rezultă

$$S_{m+1,n} = S_{m,n} + (-1)^{m+1} \frac{(n+m+2)!}{n!(n+m+1)} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!} +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!(n+m+2)}{n!} = (-1)^{m+1} \frac{(n+m+1)!}{n!}.$$

Aşadar $S_{m,n} = (-1)^m \frac{(m+n)!}{n!} = (-1)^m C_{m+n}^m \cdot m! \Rightarrow m!/S_{m,n}$.

(Pentru $n = 2$ şi $m = 3$, $S_{3,2} = -60$ şi 18×60).

118. Divizorii numărului P sînt evident numerele $p_1, p_2, \ldots p_n$ şi toate produsele de cîte două numere, de cîte trei, s.a.m.d.
Numărul acestor divizori este egal cu

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

119. Pentru $m = 1$ egalitatea este adevărată (evident). Presupunînd-o adevărată pentru orice $p \leqslant m$, vom demonstra pentru $m + 1 \leqslant n$.

Într-adevăr $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^{m+1} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m k \cdot \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} =$

$= n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k - 1 + 1)^m C_{n-1}^{k-1} = -n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} [(k-1)^m + a_1(k-1)^{m-1} +$

$+ \ldots + a_{m-1}(k-1) + 1] C_{n-1}^{k-1} = 0.$

120. Se calculează $\sum_{k=2}^{n} C_k^2$ şi $\sum_{k=3}^{n} C_k^3$.

121. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k+1} =$

$= \frac{2(2^{n+1} - 1)}{(n+1)(n+2)}.$

122. $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!\frac{n!}{(n-k)!k!}(C_n^k)^2 = n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = n!C_{2n}^n$.

123. Putem scrie $(k+1)^n - k^n = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i k^{n-i} + 1$ şi însumînd după k $\Rightarrow (n+1)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1} C_n^i k^{n-i}\right] + n$ de unde rezultă, schimbînd rolurile lui i cu k, $(n+1)^n - (n+1) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[C_n^k \sum_{i=1}^{n} i^{n-k}\right]$.

124. Am, $n = (a_m + b_m\sqrt{5})(\alpha_n + \beta_n\sqrt{5}) + (a_m - b_m\sqrt{5})(\alpha_n - \beta_n\sqrt{5}) = 2(a_m\alpha_n + 5b_m\beta_n) \in \mathbf{Q}$, deoarece $a_m, b_m, \alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}$.

125. $\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n-k-k}{n}\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}\right]^2 = 2 +$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} - \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)}\right]^2 = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1})^2 = 2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^{k-1})^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k C_{n-1}^{k-1} = 2 + C_{2n-2}^{n-1} - 1 + C_{2n-2}^{n-1} - 1 -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k C_{n-1}^{n-k} = 2C_{2n-2}^{n-1} - 2C_{2n-2}^n = \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

126. $(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 \ldots) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(1+i)^n| = \sqrt{(1 - C_n^2 + C_n^4 \ldots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 \ldots)^2}$, dar

$$|(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n.$$

127. Membrul din stînga se mai scrie:

$$\sum_{k=m}^{n}(n-k+1)C_k^m = \sum_{k=m}^{n}[(n+2) - (k+1)]\,C_k^m = (n+2)\sum_{k=m}^{n} C_k^m -$$

$$- \sum_{k=m}^{n}(k+1)C_k^m = (n+2)C_{n+1}^{m+1} - (m+1)\sum_{k=m}^{n} C_{k+m}^{m+1} =$$

$$= (n+2)C_{n+1}^{m+1} - (m+1)C_{n+2}^{m+2} = (m+2)C_{n+2}^{m+2} - (m+1)C_{n+2}^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}.$$

128. În dezvoltarea $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ înlocuind pe x cu ε (rădăcina cubică complexă a unităţii) rezultă

1) Dacă $n = 3p$ $(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots) + (C_n^1 + C_n^4 + \ldots)\varepsilon + (C_n^2 + C_n^5 + \ldots)\varepsilon^2 = (-1)^{3p}$, dar $A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C = 0$, $A, B, C \in \mathbf{R}$ implică $A = B = C$ deci $C_n^1 + C_n^4 + \ldots = C_n^2 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots - (-1)^{3p}$.

În mod analog pentru $n = 3p+1$ şi $n = 3p+2$.

129. 1) Fie $\omega \in \mathbf{C}^*$, $\omega^3 = -1$, evident $\omega\bar{\omega} = 1$ şi $\omega + \bar{\omega} = 1$, atunci $\left.\begin{matrix}(1+\omega)^n = a_n - \omega b_n + \omega^2 c_n \\ (1+\bar{\omega})^n = a_n - \bar{\omega} b_n + \bar{\omega}^2 c_n\end{matrix}\right\} \Rightarrow [(1+\omega)(1+\bar{\omega})]^n = (a_n - \omega b_n + \omega^2 c_n)(a_n -$

$$- \bar{\omega} b_n + \bar{\omega}^2 c_n) \Leftrightarrow 3^n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - a_n c_n.$$

2) Ţinînd seama de identitatea

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

şi de faptul că $a_n + b_n + c_n = 0$, rezultă punctul 2).

130. Pentru ca problema să aibă sens trebuie ca m să fie impar, fie deci $m = q^{2^q} - 1$, q impar. Grupăm numerele date în q grupe astfel

1) $C_m^0, C_m^1, \ldots, C_m^{2^p-1}$

2) $C_m^{2^p}, C_m^{2^p+1}, C_m^{2^p+2}, \ldots, C_m^{2^{p+1}-1}$

3) $C_m^{2^{p+1}}, C_m^{2^{p+1}}, \ldots, C_m^{2^{p+2}-1}$

4) $C_m^{(q-1)2^p}, C_m^{(q-1)2^p+1}, \ldots, C_m^{q2^p-1}$

Arătăm că numerele dintr-o grupă sînt de aceeaşi paritate, adică

$$C_m^{h2^p+k} - C_m^{h2^p} \vdots 2$$

$$\frac{C_m^{h2^p+k}}{C_m^{h2^p}} = \frac{[q2^p - (h2^p + 1)][q2^p - (h2^p + 2)] \ldots [q2^p - (h2^p + k)]}{(h2^p + 1)(h2^p + 2) \ldots (h2^p + k)}.$$

Observăm că numărătorul şi numitorul fracţiei conţin pe 2 la aceeaşi putere, deci după simplificare rezultă

$\frac{C_m^{h2^p+k}}{C_m^{h2^p}} = \frac{a}{b}$, unde a şi $b \in \mathbf{N}^*$, impare, deci numerele $C_m^{h2^p+k}$ şi $C_m^{h2^p}$ sînt de aceeaşi paritate.

Avînd un număr impar de grupe, rezultă că numerele nu pot fi împărţite jumătate pare, jumătate impare.

131. Evident $x^6 = y^6 = 2^6$. Deoarece $6n, 6n + 2, 6n + 4, 6n + 3$, nu pot fi prime rezultă că p trebuie să fie de forma $6n \pm 1$.

Dacă $p = 6n + 1$, atunci $x^p + y^p = x^{6n+1} + y^{6n+1} = (x^6)^n x + (y^6)^n y = 2^{6n}x + 2^{6n}y = 2^{6n}(x + y) = 2^{6n+1} = 2^p$.

Analog dacă $p = 6n - 1$.

132. Se foloseşte identitatea $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}) \Rightarrow S_n = 2pS_n - p(p + 1)S_{n-2}$, unde $S_0 = 2$, $S_1 = 2p$ şi prin inducţie rezultă 1) şi 2).

133. Se aplică inegalitatea lui Cauchy—Buniakovschi.

134. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\sqrt[n+1]{C_{2n+1}^1 C_{2n+1}^2 \ldots C_{2n+1}^n} < \frac{4^n}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[2n+2]{(C_{2n+1}^1)^2 (C_{2n+1}^2)^2 \ldots (C_{2n+1}^n)^2} < \frac{4^n}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[2n+2]{C_{2n+1}^0 C_{2n+1}^1 \ldots C_{2n+1}^n C_{2n+1}^{n+1} \ldots C_{2n+1}^{2n+1}} < \frac{4^n}{n+1}$$

ultima inegalitate fiind evidentă (inegalitatea de medii).

135. Notînd cu $U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$, vom arăta că $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n}$. (1)

Într-adevăr, $U_n - U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (C_n^k - C_{n-1}^k) + \frac{(-1)^{n-1} C_n^n}{n} =$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{n-1}^{k-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_n^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n} =$

$= -\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k C_n^k - \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{1}{n}$. Dînd în (1) valori lui n de la 1 la n și însumînd, obținem $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

136. Ridicînd la pătrat și însumînd, obținem

$$n^2x^2 \sum_{k=1}^{n} C_n^k (1-x)^{n-k} x^k - 2nx \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= n^2x^2 [1 - x + x]^n - 2n^2x^2 \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} (1-x)^{n-k} x^{k-1} + nx \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} \cdot$$

$$\cdot (1-x)^{n-k} \ldots + n(n-1) x^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} = n^2x^2 [1 - x + x]^n -$$

$$- 2n^2x^2 (1 - x + x)^{n-1} + nx (1 - x + x)^{n-1} + n(n-1) x^2 (1 - x + x)^{n-2} =$$

$$= nx (1 - x).$$

137. Vezi exercițiul 119.

G.M. 4/1985

138. Calculăm mai întîi $U_n = \frac{C_n^2}{1} - \frac{C_n^3}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{n-1}$, $U_2 = 1$,

$$U_3 = \frac{5}{2}.$$

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k C_{n+1}^k}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k-1} = \frac{(-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}}{n} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k-1} (C_{n+1}^k - C_n^k) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k-1} C_n^{k-1} =$$

$$= \frac{C_n^1}{1} - \frac{C_n^2}{2} + \frac{C_n^3}{3} + \ldots + \frac{(-1) C_n^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1} C_n^n}{n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ (vezi ex. 135), deci } U_{n+1} - U_n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (1)$$

de unde rezultă $U_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots +$

$$+ \ldots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \text{ și suma dată devine}$$

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n-1}\right) - U_n = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) -$$

$$-\left[1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n-1}\right)\right]=$$

$$=n-(n-1)+\left(\frac{n}{2}-\frac{n-2}{2}\right)+\left(\frac{n}{3}-\frac{n-3}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{k}-\frac{n-k}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n-1}=n-1.$$

139. a) Din $C_m^k=\frac{m}{k}C_{m-1}^{k-1}\Rightarrow C_{2n}^k=\frac{2n}{k}C_{2^n-1}^{k-1}$, dar $\frac{2n}{k}>1$ $(\forall)$ $k\in\{1,2,\ldots 2^n-1\}$, deci numerele sînt pare.

b) Observăm mai întîi situația nefavorabilă în care $k=2^{n-1}$. În acest caz $C_{2^n}^k=C_{2^n}^{2^{n-1}}=2C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$. Rămîne de arătat că $2\nmid C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$. Pentru aceasta considerăm $C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\cdot C_{2^n-2}^{2^{n-1}-2}=\ldots=\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\cdot\frac{2^n-2}{2^{n-1}-2}\ldots C_{2^n-2^{n-1}}^0$ și toate puterile lui 2, factorii comuni corespunzători numitorului și numărătorului se simplifică. Deci $C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ este impar.

140. 1) $C_p^k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$, p fiind prim și $k\leqslant p=1$, nici unul din factorii $2, 3, \ldots k$ nu sînt divizori ai lui p, deci

$$k!\mid(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)\Rightarrow p/C_p^k.$$

2) $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{C_{2n}^n}{n+1}$, dar $C_{2n}^{n+1}=C_{2n}^n-\frac{n}{n+1}$ și cum $(n, n+1)=1\Rightarrow$ $\Rightarrow n+1\mid C_{2n}^n$ sau $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=C_{2n}^n-C_{2n}^{n-1}$.

3) $\frac{(2n)!}{2^n n!}=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 4)$ $\frac{C_{nk}^n}{k}=\frac{nk(nk-1)!}{kn!(nk-n)!}=C_{nk-1}^{n-1}$.

5) Observăm că $\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=C_{m+n-1}^m\in\mathbf{N}\Rightarrow m!(n-1)!/(m+n-1)!$ $\Rightarrow m!n!\mid(m+n-1)!n$. Analog rezultă $m!n!\mid(m+n-1)!\,m$ (dacă $(m, n)=1$ și $a\mid bm$, $a\mid bn\Rightarrow a\mid b$) de unde deducem că $m!n!\mid(m+n-1)!$

6) vezi 2).

7) $(n!)!=(1\,2\,3\ldots n)[(n+1)(n+2)\ldots(2n)][(2n+1)\ldots(3n)]\ldots$
$\ldots\{[((n-1)!-1)n+1][((n-1)!-1)n+2]\ldots$
$\ldots[((n-1)!-1)n+n]$.

Ținînd seama că produsul a n numere consecutive se divide cu $n!$ și cum avem $(n-1)!$ asemenea produse, rezultă că $(n!)!$ se divide cu $(n!)^{(n-1)!}$.

8) $\frac{(3n)!}{3!(n!)^3}=C_{3n-1}^{n-1}\cdot C_{2n-1}^n$. 9) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}=C_{2m}^m\cdot C_{3m}^m\ldots C_{nm}^m$.

10) $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}=C_{n^2}^n\cdot C_{n^2-n}^n\ldots C_{n^2-(n-2)n}^n\cdot C_{n^2-(n-1)n}^n$.

11) $\frac{(pn+1)!}{(n!)^p}=\prod_{k=1}^{n}C_{[p-(k-1)]n+1}^n$.

141. Pentru fiecare egalitate prelucrăm membrul din dreapta.

a) $(C_{n-1}^{k-1})^p + (n^p - k^p)\left(\frac{C_{n-1}^k}{n-k}\right)^p = (C_{n-1}^{k-1})^p + (n^p - k^p) \cdot \frac{1}{n^p}(C_n^k)^p =$

$= (C_{n-1}^{k-1})^p + (C_n^k)^p - \left(\frac{k}{n} C_n^k\right)^p = (C_n^k)^p.$

b) $\frac{(nC_{n-1}^k)^p + (nC_{n-1}^{k-1})^p}{(n-k)^p + k^p} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-k-1)!k!}\right)^p + \left(\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\right)^p}{(n-k)^p + k^p} =$

$= \frac{(C_n^k)^p(n-k)^p + (C_n^k)^p k^p}{(n-k)^p + k^p} = (C_n^k)^p.$

Observație: pentru $p = 1$, din ambele egalități se obține formula de descompunere $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

R.M.T. 11/1987

142. Vom demonstra prin inducție după n că $\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r)^t = 0$ $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$, $(\forall)\, t \in \mathbf{N}$, $t \leqslant n$ și că:

$$\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r)^{n+1} \text{ nu depinde de } k.$$

Pentru $n = 1$ se observă că cele două proprietăți sînt evidente. Să presupunem că ele sînt adevărate pentru n arbitrar și să demonstrăm că sînt adevărate și pentru $n + 1$.

Avem $\sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r C_{n+2}^r (k+r)^{t+1} = \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r [C_{n+1}^r + C_{n+1}^{r-1}](k+r)^{t+1} +$

$+ C_{n+2}^0 k^{t+1} + C_{n+2}^{n+2}(-1)^{n+2}(k+n+2)^{t+1} = \sum_{n=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r)^{t+1} +$

$+ \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^{r+1} C_{n+1}^r (k+r+1)^{t+1} = \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r)^{t+1} -$

$- \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r C_{n+1}^r (k+r+1)^{t+1} = 0,\ (\forall)\, t \leqslant n \text{ și } k \in \mathbf{N},$

ultima egalitate avînd loc conform ipotezei de inducție, pentru $t < n$ din prima afirmație și pentru $t = n$ din cea de a doua.

De asemenea, $\sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r C_{n+2}^r (k+r)^{n+2} = \sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r C_{n+r}^r \left(\sum_{h=0}^{n+2} C_{n+2}^h\right.$

$\left. k^h \cdot r^{n+2-h}\right) = \sum_{h=0}^{n+2} C_{n+2}^h k^h \left(\sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r C_{n+2}^r r^{n+2-h}\right) = \sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r C_{n+2}^r r^{n+2}$ deci și partea a doua a afirmației este demonstrată. Pentru $t = n$ obținem relația din enunțul problemei.

R.M.T. 2/1987

143. Fie $A = C_{n+p}^n = \frac{(n+p)!}{p!n!} = \frac{(n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \Rightarrow$

$$p!\, A = (n+p)(n+p-1) \quad (n+1). \quad (1)$$

Fie $n = pq + r$, $0 \leqslant r \leqslant p - 1$, atunci egalitatea (1) devine

$$Ap! = (pq + r + 1)(pq + r + 2) \quad (pq + r + p - r)$$

$(pq + r + p - 1)(pq + r + p)$ și prin simplificare cu p rezultă

$A(p-1)! = (pq + r + 1)(pq + r + 2) \ldots (q + 1) \ldots (pq + r + p - 1) \cdot$
$\cdot (pq + r + p)$ (2)

În membrul al doilea al egalității (2) factorii diferiți de $q + 1$ dau prin împărțire la p resturile distincte $1, 2, \ldots r - 1, r, r + 1, \ldots, p - 1$ al căror produs este $(p - 1)!$, deci

$$A(p-1)! = \mathcal{M}p + (q+1)(p-1)! \text{ Fie acum } B = C_{n+p}^{n} +$$
$$+ (q+1)(p-1) = A + (q+1)(p-1) \Rightarrow B(p-1)! = A(p-1)! +$$
$$+ (q+1)(p-1)(p-1)! = \mathcal{M}p + (q+1)(p-1)! + (q+1)(p-1)(p-$$
$$- 1)! = \mathcal{M}p + (q+1)(p-1)!\, p = \mathcal{M}p \Rightarrow p \mid B(p-1!), \text{ dar } p \text{ fiind prim}$$
$$\Rightarrow (p, (p-1) = 1 \Rightarrow p \mid B.$$

144. Pentru $n = 1$ este adevărat.

Presupunînd că $n \geqslant 3$, fie $S_n = C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1}$.

$$2S_n = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n - 2 \Rightarrow S_n = 2^{n-1} - 1.$$

Prin urmare, numărul S_n este impar. Dacă mulțimea din enunț ar conține un număr par de numere impare, rezultă S_n — par, contradicție.

R.M.T. 1/1986

145. a) $C_{np}^{n} = p\,\frac{(np-1)\ldots(np-n+1)}{(n-1)!}$ dar $\frac{(np-1)\ldots(np-n+1)}{(n-1)!} \equiv$

$\equiv \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!} \pmod{p}$ și cum $((n-1)!, p) = 1$ rezultă că

$$\frac{p(np-1)\ldots(np-n+1)}{(n-1)!} \equiv (-1)^{n+1}p \pmod{p^2}.$$

b) Pentru demonstrarea congruenței va fi suficient să demonstrăm

$$C_{np+m}^{mp+n} \equiv (-1)^{n+1} C_{np+m-1}^{(m-1)p+n} \pmod{p^2},\ (\forall)\ 1 \leqslant m < n < p.$$

Avem $C_{np+m}^{mp+n} = \frac{(np+m)(np-mp+m-n+p-1)\ldots(np+m-mp-n+1)}{(mp+n)\ldots(mp+n-p+1)} \cdot$

$\cdot C_{np+m-1}^{(m-1)p+n}$. Dar $\frac{(np+m)(np-mp+m-n+p-1)\ldots(np+m-mp-n+1)}{(mp+n)\ldots(mp+n-p+1)} =$

$= \frac{(np+m)(np-mp+m-p+p-1)\ldots(n-m)p\ldots(np+m-mp-n+1)}{(mp+n)\ldots(mp)\ldots(mp+n-p+1)} \equiv$

$\equiv \frac{m(np-mp+m-n+p-1)\ldots(n-m)\ldots(np+m-mp-n+1)}{m(mp+n)\ldots(mp+n-p+1)} \equiv$

$\equiv -\frac{(m-n-1)(m-n)(m-n+1)\ldots(p+m-n-2)}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}$

Deoarece numitorul și numărătorul sînt congruenți cu $(p-1)! \pmod{p}$ Ținînd cont de acest fapt și raționînd prin inducție, obținem:

$$C_{np+m}^{mp+n} \equiv 0 \pmod{p} \text{ și că există „}a\text{'' întreg astfel încît}$$
$$C_{np+m}^{mp+n} \equiv (ap-1)\, C_{np+m-1}^{(m-1)p+n} \pmod{p^2}$$

Dar $(ap-1)\, C_{np+m-1}^{(m-1)p+n} \equiv ap\, C_{np+m-1}^{(m-1)p+n} + (-1)^{n+1} C_{np+m-1}^{(m-1)p+n} \equiv (-1)^{n+1} C_{np+m-1}^{(m-1)p+n}$ $\pmod{p^2}$ și problema este rezolvată.

R.M.T. 1 87

146. Din $721 = 7 \cdot 103$ şi 103 număr prim rezultă $n! + 1 \geqslant 103 \Rightarrow$ $\Rightarrow n \geqslant 5$. Avem apoi $n!\,(n! + 1) > 721$ şi cum

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n! - 1)\, n!\,(n! + 1) = 721\,(3n^3 + 2n^2)!$$

Rezultă $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n! - 1) < 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (3n^3 + 2n^2) \Rightarrow$ $n! - 1 < 3n^3 + 2n^2 \Rightarrow n! \Rightarrow 3n^3 + 2n^2 \Rightarrow (n-1)! \leqslant 3n^2 + 2n$ şi cum $n \geqslant 5$ avem

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-2)(n-1) \leqslant (n-1)! \leqslant 3n^2 + 2n \Rightarrow 3n^2 - 20n + 12 \leqslant 0 \Rightarrow n < 7 \Rightarrow n \leqslant 6.$$

Soluţie unică $n = 6$.

R.M.T. 1–2/1988

147. Se aplică inegalitatea mediilor pentru $a_i = \frac{1}{p}\sqrt[p]{A_p^n}$ $(i = \overline{1, p})$ şi $a_{p+1} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^p$, obţinem $\sqrt[p]{A_p^n} + \left(\frac{p}{p+1}\right)^p > (p+1)\sqrt[p+1]{\frac{1}{p^p} A_p^n \frac{p^p}{(p+1)^p}} =$ $= \sqrt[p+1]{(p+1)\,A_p^n} = \sqrt[p+1]{A_{p+1}^{n+1}}$, de unde rezultă inegalitatea propusă.

148. Notăm cu $v = \max(x, y, z)$, atunci $1 \leqslant v < u \Rightarrow uv! \leqslant$ $\leqslant u(u-1)! = u! = x! + y! + z! \leqslant 3v!$ (1) $\Rightarrow uv! \leqslant 3v! \Rightarrow u \leqslant 3$.
Dacă $u = 3$, atunci din (1) obţinem $3! = 3v! = x! + y! + z!$
Deci $v = 2 \Rightarrow x = y = z = 2$
Dacă $u = 2$, atunci $u! = 2 < 3 \leqslant x! + y! + z!$ şi ecuaţia nu are soluţie.
Dacă soluţia ecuaţiei este $x = y = z = 2$ şi $u = 3$.

149. a) Dacă perechea (x, y) satisface ecuaţia, atunci $p = y + 1$ este prim. Într-adevăr, fie $d < y + 1$ divizor, atunci $d \mid y! \Rightarrow$ $\Rightarrow d \mid (y+1)^x - y! \Rightarrow d = 1$. Ecuaţia se mai scrie $p^x - 1 = (p-1)!$ (1) Demonstrăm că $p < 7$. Dacă $p \geqslant 7$, atunci din (1) $\Rightarrow p^{x-1} + p^{x-2} + \ldots$ $\ldots p + 1 = (p-2)!$, dar membrul drept se divide cu $p - 1$ (deoarece pentru $p \geqslant 7$, $2 < \frac{p-1}{2} \leqslant p - 2$ şi $\frac{p-1}{2} \in \mathbf{N}^*$. Membrul din stînga se scrie $p^{x-1} - 1 + p^{x-2} - 1 + \cdots + p - 1 + x \vdots p - 1 \Rightarrow p - 1 \mid x \Rightarrow$ $\Rightarrow x \geqslant p - 1$ ceea ce este imposibil, deoarece
$p^{x-1} < p^{x-1} + p^{x-2} + \ldots + p + 1 = (p-2)! < (p-2)^{p-2} < p^{p-2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x < p - 1$ contradicţie. Deci $p \in \{2, 3, 5\}$.
Dacă $p = 2 \Rightarrow x = y = 1$,
$p = 3 \Rightarrow x = 1$, $y = 2$,
$p = 5 \Rightarrow x = 2$, $y = 4$.

150. Se procedează ca la ex. 151 şi se obţine

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 1 \quad (x, y, z \in \mathbf{N}^*).$$

151. a) Dacă $x \geqslant 5$ ultima cifră a numărului din membrul stîng este 3, cifră în care nu se poate termina un pătrat perfect. Deci $x < 5$, dînd lui x valorile 1, 2, 3, 4 găsim soluţiile $x = 1$, $y = \pm 1$ şi $x = 3$, $y = \pm 3$.

b) Considerăm cazurile z par şi $z =$ impar.

1) Dacă $z = 2n$, atunci ecuaţia se scrie $1! + 2! + \ldots + x! = y^{2n} =$ $= (y^n)^2 = y'^2$ şi ca mai sus găsim soluţiile

$$x = 1, \quad y = \pm 1, \quad z = 2 \quad \text{şi} \quad x = 3, \quad y = \pm 3, \quad z = 2$$

(deoarece dacă $x \geqslant 5$ membrul stîng este un număr care se termină cu cifra 3).

Pentru z par, arbitrar obținem doar soluția $x = 1$, $y = \pm 1$, $z = 2n$.

2) Dacă $z = 2n + 1$. Pentru $z = 1$ este acceptată orice valoare a lui x și $y = 1! + 2! + \ldots x!$. Fie $z \geqslant 3$. Observăm că $1! + 2! + \ldots 8! = 46\,233$ număr care se divide cu 9, dar nu cu 27, iar pentru $n \geqslant 9$, $n! \vdots 27$, deci suma $9! + 10! + \ldots + x! \vdots 27$. Așadar sumele $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ pentru $x \geqslant 8$ se divid cu 9, dar nu se divid cu 27. Pentru ca y^z să se dividă cu 9 este necesar ca $y = 3k$, dar atunci $y^z \vdots 27$ $(z \geqslant 3)$. Deci pentru $x \geqslant 8$, $z \geqslant 3$ nu avem soluții întregi. Rămîne de examinat cazul $x \leqslant 7$.

Obținem soluțiile $x = 1$, $y = 1$, $z \in \mathbf{N}$
$x = 3$, $y = 3$, $z = 2$
$x \in \mathbf{N}$, $z = 1$ și $y = 1! + 2! \ldots x!$.

152. Ecuația se scrie $100x + 10y + z = x! + y! + z!$

Deoarece $7! > 1000 \Rightarrow x, y, z \leqslant 6$; nici una din cifre nu poate fi 6 pentru că am obține $x! + y! + z! > 700$, iar $100x + 10y + z < 700$. Una din cifre trebuie să fie 5, pentru că altfel avem $x! + y! + z! < 100$.

Deoarece $x! + y! + z! < 5! + 5! + 5! = 360$, cifra sutelor $x \in \{1,2,3\}$.

Dacă $x = 3 \Rightarrow 3! + 5! + 5! < 300$, deci $x \neq 3$.

Dacă $x = 2 \Rightarrow$ numărul de trei cifre > 200 și pentru ca $x! + y! + z! > 200$ trebuie ca $y = z = 5$, dar 255 nu verifică, deci $x \neq 2$.

Fie $x = 1$, ecuația devine $100 + 30 + z = 121 + z!$ dacă $y = 5$ și

$$100 + 10y + 5 = 121 + y! \text{ dacă } z = 5.$$

Prima ecuație nu are soluție $z \leqslant 5$. În al doilea caz obținem $y = 4$ și $y = 2$, verifică $y = 4$, deci numărul căutat este 145.

153. Evident $x \geqslant y$. Vom arăta că $x \geqslant y + 2$. Într-adevăr situațiile $x = y$ și $x = y + 1$ nu sînt acceptabile.

Distingem cazurile

I $y = 1$, ecuația devine $x = x + 1$ — imposibilă

II $y = 2$, ecuația devine $C_x^2 = x + 2 \Rightarrow x = 4$

III $y = 3$, dar conform condiției $x \geqslant y + 2$ și se poate arăta prin inducție după x că $C_x^y > x + y$, $(\forall)\ x \geqslant y + 2$.

Deci singura soluție este $x = 4$, $y = 2$.

154. Ecuația se mai scrie $\dfrac{(x+y+1)!}{\dfrac{A_x^x}{x!} + \dfrac{A_{x+1}^x}{x!} + \ldots + \dfrac{A_{x+y}^x}{x!}} = 720 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x+y+1)!}{C_x^x + C_{x+1}^x + \ldots + C_{x+y}^x} = 720 \Rightarrow \frac{(x+y+1)!}{C_{x+y+1}^{x+1}} = 720 \Rightarrow (x+1)!\,y! = 720,$$

de unde rezultă soluțiile (5,1), (0,6), (2,5), (4,3), (6,0).

155. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k \frac{k!}{(k-m)!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \sum_{k=m}^{n} x^m x^{k-m} \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} =$

$$= A_n^m x^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} x^{k-m} = A_n^m x^m (1+x)^{n-m}.$$

G.M. 10/1988

156. Utilizăm identitatea $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ și dăm lui k valori de la 1 la $n-1$ și însumăm, membru cu membru.

157. Se însumează ținînd seama de relația $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

G.M. 7/1961

158. Observăm că $\sqrt{29} - \sqrt{21} < 1$ și $a = (\sqrt{29} + \sqrt{21})^{1986} + (\sqrt{29} - \sqrt{21})^{1986} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow [(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{1986}] = a - 1$. Dar $a = (50 + 2\sqrt{29 \cdot 21})^{993} + (50 - 2\sqrt{29 \cdot 21})^{993} = 2\sum_{k=0}^{496} C_{993}^{2k} 50^{993-2k} \cdot 2^{2k} \cdot 29^k \cdot 21^k$ este divizibil cu 100, de unde rezultă că ultimele două cifre sînt 9 și 9.

159. Fie $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, deci

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right] = x_{2n}.$$

G.M. 7/1983

160. a) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (a_1 + kr) = a_1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k + r\sum_{k=1}^{n} (-1)^n k C_n^k = 0$ (ambele sume sînt nule).

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (a_1 + kr)^2 = a_1^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k + 2a_1 r \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k C_n^k + r^2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 C_n^k$ (se verifică ușor că cele trei sume sînt nule).

161. Se demonstrează prin inducție după n. Pentru $n = 1 \Rightarrow (p-1)! - 1 = \mathcal{M}p$.

(T. lui Wilson)

Să presupunem adevărată pentru n și să arătăm că este adevărată pentru $n+1$. Avem $(n-1)!(p-n)! = \mathcal{M}p + (-1)^n$ (1) și $(n-1)!(p-n-1)!p = \mathcal{M}p$ (2). Scăzînd (1) din (2) avem

$$n!(p-n-1)! = \mathcal{M}p + (-1)^{n+1}.$$

162. Conform problemei precedente avem

$0!(p-1)! = \mathcal{M}p + (-1)^1$
$1!(p-2)! = \mathcal{M}p + (-1)^2$
— — — — — — — (*)
$(p-2)!1! = \mathcal{M}p + (-1)^{p-1}$
$(p-1)!0! = \mathcal{M}p + (-1)^p$. Înmulțind membru cu membru avem

$[1!2!\ldots(p-1)!]^2 = \mathcal{M}p + (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} = \mathcal{M}p + (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

Pentru 2) se adună membru cu membru egalitățile (*).

163. a) Evident $p + m \equiv m \pmod p$. Dînd lui m valorile $1, 2, \ldots k$ şi înmulţind congruenţele membru cu membru obţinem

$(p+1)(p+2) \ldots (p+k) \equiv k! \pmod p$, cum $(k!, p) = 1$, p prim, dar produsul a k numere se divide cu $k!$, ultima congruenţă se poate împărţi cu $k! \Rightarrow C_{p+k}^k \equiv 1 \pmod p$

b) Se procedează analog, sau $C_{p-1}^k \pm 1 = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k)}{k!} \pm 1 =$

$= \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k) \pm k!}{k!} = \mathcal{M}p \mp k! \pm k! = \mathcal{M}p$; $(k!, p) = 1$

(la fel se poate rezolva şi a)

164. Se arată că $A_{m+k}^m \cdot C_n^{m+k} = A_n^m C_{n-m}^k$ deci $\sum_{k=0}^{n-m} A_{m+k}^m C_n^{m+k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} A_n^m C_{n-m}^k = A_n^m 2^{n-m}$$

165. Considerăm $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$ şi $(1-\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n$, unde $a_n, b_n \in \mathbf{N}^*$. Înmulţind cele două egalităţi membru cu membru obţinem $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.

166. Vezi 101, 102 sau dacă notăm cu $x_n = (x+\sqrt{y})^n + (x-\sqrt{y})^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n$ par şi $(x+\sqrt{y})^n = x_n - 1 + 1 - (\sqrt{y+1} - \sqrt{y})^n$, unde $(\sqrt{y+1} - \sqrt{y})^n \in (0,1) \Rightarrow 1 - (\sqrt{y+1} - \sqrt{y})^n \in (0,1) \Rightarrow [(x+\sqrt{y})^n] =$

$= x_n - 1$ impar.

167. $\sum_{k=0}^{m-1} (n-2k)^2 A_n^{2k} = \sum_{k=0}^{m-1} (n-2k) \frac{n!}{(n-2k-1)!} =$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (n-2k-1) \frac{n!}{(n-2k-1)!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n!}{(n-2k-1)!} = \sum_{k=0}^{m-1} A_n^{2k+2} + \sum_{k=0}^{m-1} A_n^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(A_n^{2k+1} + A_n^{2k+2} \right) = \sum_{k=1}^{2m} A_n^k.$$

168. Se calculează fiecare membru folosind identităţile:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}, \quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Deci $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_m^{2k+1}}{C_{m+1}^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_m^{2k+1}}{\frac{m+1}{2k+2} C_m^{2k+1}} = \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{m+1}$.

La fel se calculează şi membrul doi, de unde rezultă egalitatea.

G.M. 2/1980

169. Se calculează coeficientul lui x^l din dezvoltarea:

$(1+x)^n(1+x)^m(1+x)^p = (1+x)^{n+m+p}$. În membrul drept coeficientul lui x^l este C_{n+m+p}^l, iar în membrul stîng

$$\sum_{i+j+k=l}^{n} C_n^i C_m^j C_p^k x^{i+j+k} = [C_n^l + C_m^l + C_p^l + \sum_{\substack{i+j=l \\ 0<i,j\leq l-1}} C_n^i C_m^j + C_m^i C_p^j + C_n^i C_p^j +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j+k=l \\ 0<i,j,k\leq l-2}} C_n^i C_m^j C_p^k] x^l.$$

170. $\sum_{kp=0}^{n}\sum_{kp-1=0}^{kp}\dots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k=0}^{k_2} C_{k+s}^{k} = \sum_{kp=0}^{n}\sum_{kp-1=0}^{kp}\dots\sum_{k_2=0}^{k_3}(C_p^0 + C_{p+1}^1 + \dots$

$\dots + C_{s+k_2}^{k_2}) = \sum_{kp=0}^{n}\dots\sum_{k_2=0}^{k_3}(C_s^s + C_{s+1}^s + \dots C_{s+k_2}^s) = \sum_{kp=0}^{n}\dots\sum_{k_2=0}^{k_3} C_{s+k_2+1}^{s+1} =$

$= \sum_{kp=0}^{n}\sum_{kp-1=0}^{kp} C_{s+kp-1+p-2}^{s+p-2} = \sum_{kp=0}^{n} C_{s+kp+p-1}^{s+p-1} = C_{s+n+p}^{s+p} = C_{s+n+p}^{n}.$

171. Expresia $f(n) = 2\sum_{k=1}^{n} k\, C_{2n}^{2k} = 2\sum_{k=1}^{n} k\,\frac{2n}{2k}\, C_{2n-1}^{2k-1} = 2n\sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{2k-1} =$

$= 2n\cdot 2^{2n-2} = n\cdot 2^{2n-1}$, iar $\prod_{k=1}^{n} f(k) = \prod_{k=1}^{n} k2^{2k-1} = n!\, 2^{n^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^n = \sqrt[n]{\frac{f(1)f(2)\dots f(n)}{n!}}.$$

172. Dacă s_1 şi s_2 sînt cele două sume, atunci

$$s_1 + s_2 = 2^n,\ s_2 - s_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos\frac{2k\pi}{n} = 2^n \cos n\frac{\pi}{n}\cos^n\frac{\pi}{n} =$$

$$= -2^n\cos^n\frac{\pi}{n} \Rightarrow s_1 = 2^{n-1}\left(1 + \cos^n\frac{\pi}{n}\right) \text{ şi } s_2 = 2^{n-1}\left(1 - \cos^n\frac{\pi}{n}\right).$$

173. Evident dacă $a_1 = a_2 = \dots a_{n-1} = 0$, atunci ecuaţia devine $(x-1)^n = 0$. Dacă rădăcinile sînt reale şi pozitive atunci scriind prima şi ultima formulă a lui Viète, obţinem $x_1 + x_2 + \dots x_n = C_n^1 \cos q$,

$$x_1x_2\dots x_m = 1$$

şi din inegalitatea de medii rezultă $\cos a_1 \geqslant 1 \Rightarrow a_1 = 0$ şi deci

$$\frac{x_1 + x_2 \dots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_o} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$. Din celelalte formule a lui Viète rezultă $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$.

G.M. 6/1982

174. Vom calcula ambii membri folosind relaţia $C_{n-1}^m = \frac{n-m}{n} C_n^m$, sau pentru cazul nostru $C_{ki-1}^i = C_{ki}^i \frac{ki-i}{ki} = C_{ki}^i \frac{k-1}{k}$.

Membrul din stînga devine:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(C_{ki}^i)^p + \left(\frac{k-1}{k}\right)^p (C_{ki}^i)^p}{(C_{ki}^i)^{p-1} + \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}(C_{ki}^i)^{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(C_{ki}^i)^p\left[1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)^p\right]}{(C_{ki}^i)^{p-1}\left[1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}\right]} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_{ki}^i \frac{1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)^p}{1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}}.$$

Membrul din dreapta se mai scrie:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(C_{ki}^{i})^{p}+\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}\left(\sum_{i=1}^{p}C_{ki}^{i}\right)^{p}}{\left(\sum_{=1}^{n}C_{ki}^{i}\right)^{p-1}+\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}C_{ki}^{i}\right)^{p-1}}=\sum_{i=1}^{n}C_{ki}^{p}\frac{1+\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}}{1+\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}}.$$

Deci egalitatea este demonstrată.

G.M. 7/1982

175. Dacă $p \in \mathbf{N}$ şi $p > k$, atunci $p(n-k) > k(n-k)$ sau $k(n-k+p) < np$ (1). Facem în (1), $p = n+1, n+2, \ldots n+k$, şi înmulţind aceste k inegalităţi obţinem succesiv

$$k^k(2n-k+1)(2n-k+2)\ldots(2n) < n^k(n+1)(n+2)\ldots(n+k)$$

sau

$$k^k\frac{(2n)!}{(2n-k)!} < n^k\frac{(n+k)!}{n!} \Rightarrow \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\cdot\frac{k!n!}{(n+k)!} < \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

de unde rezultă prima inegalitate.

Dacă în (1) dăm lui p, valorile $k+1, k+2, \ldots, k+n$ şi procedăm ca mai sus obţinem inegalitatea b).

G.M. 1/1982

176. Evident, dacă $a = 1 \Rightarrow p_{k-1} = k$ şi $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} k\,C_{n+1}^{k} = (n+1)2^n$.

Dacă $a \neq 1$, $p_{k-1} = \frac{a^k-1}{a-1} \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left\{\frac{a^k-1}{a-1}\right\} =$

$$= \frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^{k}a^k - \frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^{k} = \frac{1}{a-1}[(1+a)^{n+1}-1-2^{n+1}+1] =$$

$$= \frac{2^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{1-a}.$$

G.M. 4–5/1984

177. Fie $z_1 = 1 + i\sqrt{a}$ şi $z_2 = 1 - i\sqrt{a}$. Observăm că $S_n = \frac{z_1^n + z_2^n}{2}$, iar z_1 şi z_2 sînt soluţiile ecuaţiei

$z^2 - 2z + a + 1 = 0$ (1). Din (1) rezultă $z^n - 2z^{n-1} + (1+a)z^{n-2} = 0$, de unde avem $z_1^n + z_2^n = 2(z_1^{n-1} + z_2^{n-1}) - 2(1+a)(z_1^{n-2} + z_2^{n-2}) \Rightarrow$ $\Rightarrow S_n = 2S_{n-1} - (1+a)S_{n-2}$. Demonstrăm prin inducţie după n proprietatea din enunţ; $s_1 = 1 \vdots 2^{1-1}$, dacă $s_k \vdots 2^{k-1}$ $(\forall)$ $k \leqslant n-1$, atunci $s_n = 2s_{n-1} - (1+a)s_{n-2} = 2(2^{n-2}\cdot q_1) - 4k(2^{n-3}\cdot q_2) = 2^{n-1}(q_1 - kq_2)$.

178. Evident suma este egală cu n pentru $p = 0$.

Fie $1 \leqslant p \leqslant n$, atunci $S = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(n-k+1-1)\,C_{n+1}^{k}C_{n-k}^{p-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(n-k+1)C_{n+1}^{k}C_{n-k}^{p-k} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{n+1}^{k}C_{n-k}^{p-k}.$$

Calculăm fiecare termen general $T_{k+1} = (-1)^k(n-k+1)$.

$$\frac{(n+1)!\,(n-k)!}{(n-k+1)!k!(n-p)!(p-k)!} = (-1)^k(n+1)\,C_n^p \cdot C_p^k.$$

$$T'_{k+1} = (-1)^k \frac{(n+1)n!}{(n-k)!(n-k+1)k!} \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} = (-1)^k \frac{(n+1)C_n^p C_p^k}{n-k+1}$$

Deci suma devine

$$S = (n+1)\,C_n^p \left[\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k - \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k C_p^k}{n-k+1}\right] = -(n+1)\,C_n^p \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k C_p^k}{n-k+1},$$

dar în baza exerc. (276), pentru $x=n+1$ se obține $\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k C_p^k}{n-k+1} = \frac{(-1)^p}{(n+1)C_n^p}$, de unde rezultă că $S = (-1)^{p+1}$. Pentru $p = n \Rightarrow S = (-1)^{n+1}$ iar pentru $p = n-1 \Rightarrow S = (-1)^n$.

G.M. 6/1983

179. Evident $m = n = 0$. Fie $m,n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît să aibă loc egalitatea din enunț, atunci are loc și egalitatea $(5-3\sqrt{2})^m = (3-5\sqrt{2})^n$, dar această egalitate este imposibilă, deoarece $0 < 5-3\sqrt{2} < 1$ și $5\sqrt{2}-3 > 1$ (pentru n par altfel membrul drept ar fi negativ).

180. Din $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sqrt{3}(2\,C_n^1 + \mathcal{M}3) = 0 \Rightarrow C_n^1 = \mathcal{M}3 \Rightarrow n = 3k \Rightarrow$
$\Rightarrow m = (3+\sqrt{3})^{3k} + (1-2\sqrt{3})^{3k} = (54+30\sqrt{3})^k + (37-30\sqrt{3})^k$.

Pentru $k = 1 \Rightarrow m \in \mathbf{Z}$ (deci $n = 3$).

Pentru $k > 1$ fiecare termen din primul binom care conține pe $\sqrt{3}$ este mai mare decît termenul analog din al doilea binom și nu se mai pot reduce, deci $m \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Singura soluție $n = 3$.

181. Împărțim ambii membri cu $(2n)^n$ și obținem

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant 1 + \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$$

După dezvoltare avem: $2\left[C_n^1\left(\frac{1}{2n}\right) + C_n^3\left(\frac{1}{2n}\right)^3 + \ldots\right] \geqslant 1$

care este evidentă deoarece chiar primul termen este $2\,C_n^1\frac{1}{2n} = 1$.

182. a) Evident $A_{m+k}^m = m!\,C_{m+k}^m$ și deci

$$\sum_{k=0}^{p} A_{m+k}^m = \sum_{k=0}^{p} m!\;C_{m+k}^m = m!\sum_{k=0}^{p} C_{m+k}^m = m!\;C_{m+p+1}^{m+1} =$$

$$= \frac{m!(m+p)!(m+p+1)}{(m+1)!p!} = \frac{m+p+1}{m+1}\,A_{m+p}^m.$$

b) Din $A_{n+1}^k = (n+1)\,A_n^{k-1}$ rezultă $\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1}^k = \sum_{k=1}^{n+1}(n+1)\,A_n^{k-1} =$

$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} A_n^{k-1} = (n+1)(A_n^{\circ} + \quad + A_n^n).$$

R.M.T. 2/1982

183. Pentru $n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!}$, pentru $n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}$.

Procedăm prin inducție, presupunem $a_n = \frac{1}{n!}$, atunci scriind relația dată pentru $n + 1$, obținem:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} = 2^{n+1} a_{n+1} \Rightarrow a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} + a_{n+1} a_0 = 2^{n+1} a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!(n+1-k)!} = 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} \right) =$$

$$= 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} - \frac{2}{(n+1)!} = 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(n+1)!}(2^n - 1) = 2a_{n+1}(2^n - 1) \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

184. Pentru $|x| < \frac{1}{4}$, $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$ (serie Taylor).

Fie $F(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$ $0 < |x| < \frac{1}{4} \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^{n}}{n+1} x^n$,

$0 < |x| < \frac{1}{4}$ și $1 + x F^2(x) = F(x)$ (*) $(\forall) x$, $0 < |x| < \frac{1}{4}$.

Determinînd coeficientul lui x^{n+1} din (*) rezultă:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{C_{2i}^{i}}{i+1} \cdot \frac{C_{2(n-i)}^{n-i}}{n-i+1} = \frac{C_{2(n+1)}^{n+1}}{n+2} \text{ și deci } a_n = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}.$$

185. Soluția I

$C_{np}^{mp} - C_n^m$ este coeficientul lui x^{mp} din dezvoltarea $(1+x)^{np} - (1+x^p)^n$, care se mai scrie $[(1+x)^p]^n - (1+x^p)^n = \left(1 + x^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k x^k\right)^n -$

$$- (1+x^p)^n = [1 + x^p + pA(x)]^n - (1+x^p)^n = (1+x^p)^n +$$

$$= \sum_{q=1}^{n} C_n^q (1+x^p)^{n-q} (pA)^q - (1+x^p)^n = p \sum_{q=1}^{n} C_n^q (1+x^p)^{n-q} p^{q-1} A^q$$

de unde rezultă că toți termenii se divid cu p, deci și coeficientul lui x^{mp}, adică $C_{np}^{mp} - C_n^m \vdots p$.

Soluția II

Se știe că $C_p^i \equiv 0 \pmod p$ pentru $i = 1, 2, \ldots, p-1$ sau echivalent în $\mathbf{Z}_p[X]$, $(1+X)^p = 1 + X^p$. Atunci în $\mathbf{Z}_p[X]$ avem

$$\sum_{k=0}^{pn} C_{pn}^{k} X^k = (1+X)^{pn} = [(1+X)^p]^n = [1 + X^p)^n = \sum_{j=0}^{n} C_a^j X^{jp}.$$

Deoarece coeficienții aceleraşi puteri trebuie să fie congruenți (mod p) în egalitatea

$$\sum_{k=0}^{pn} C_{pn}^{k} X^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i X^{ip} \text{ în } \mathbf{Z}_p[X]$$

se deduce că $C_{pA}^{pm} \equiv C_n^m \pmod p$.

186. Prima sumă se mai scrie

$$\sum_{k=3}^{n} C_{C_k^2}^2 = \sum_{k=3}^{n} \frac{C_k^2(C_k^2-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)}{2}\left[\frac{k(k-1)}{2} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{k=3}^{n}(k-2)(k-1)k(k+1) = \frac{1}{8}\sum_{k=3}^{n}(k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k).$$

Suma a doua devine

$$\sum_{k=2}^{n} C_{A_k^2}^2 = \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k^2(A_k^2-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)[k(k-1)-1] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^4 - 2k^3 + k).$$ Pentru ambele sume se folosesc relațiile

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,;\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2 \text{ şi } \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\,;\ k \geqslant 3.$$

187. Descompunem în fracții simple, notînd $a_p = a$

$$\frac{n!r^n}{a_p a_{p+1}\cdots a_{p+n}} = \frac{n!r^n}{a_p(a_p+r)\ldots(a_p+nr)} =$$

$$= \frac{n!r^n}{a(a+r)\ldots[a+(k-1)r][a+kr][a+(k+1)r]\ldots[a+nr]} =$$

$$= \frac{A_0}{a} + \frac{A_1}{a+r} + \ldots + \frac{A_k}{a+kr} + \ldots + \frac{A_n}{a+nr}.$$ Înmulțind cu $a+kr$ şi făcînd $a = -kr$, obținem

$$A_k = \frac{n!r^n}{(-kr)(-kr+r)\ldots(-r)(r)(2r)\ldots(nr-kr)} =$$

$$= \frac{n!r^n}{(-1)^{kk}\,!r^k \cdot r^{n-k}(n-k)!} = \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k C_n^k.$$

G.M. 9–10/1982

188. Descompunem în fracții simple

$$\frac{1}{pC_{n+p}^n} = \frac{n!}{p(p+1)\ldots(p+n)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p+1} + \ldots + \frac{A_k}{p+k} + \ldots$$

$$+ \ldots \frac{A_n}{p+n}.$$

Înmulțind cu $p+k$ şi făcînd $p = -k$, obținem

$$A_k = \frac{n!}{(-k)(-k+1)\ldots(-2)(-1)12\ldots(n-k)} = \frac{n!}{(-1)^{kk}\,!(n-k)!} = (-1)^k C_n^k.$$

189. Scriind și $(2-\sqrt{3})^{2p-1}=1+m-n\sqrt{3}$ și adunînd rezultă

$$m=\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2p-1}+(2-\sqrt{3})^{2p-1}-2\right]=$$

$$=\frac{1}{2^{2p}}\left[(4+2\sqrt{3})^{2p-1}+(4-2\sqrt{3})^{2p-1}-2\cdot 2^{2p-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^{2p}}\left[(1+\sqrt{3})^{2p-1}+(1-\sqrt{3})^{2p-1}\right]^2=\left[\frac{(1+\sqrt{3})^{2p-1}+(1-\sqrt{3})^{2p-1}}{2^p}\right]^2.$$

$m\in\mathbf{Z}$ rezultă ușor folosind binomul Newton în

$$(2+\sqrt{3})^{2p-1}=1+m+n\sqrt{3}.$$

190. Din $11^2=121$, rezultă că membrul drept al ecuație trebuie să conțină și factorii 11 și 22, deci $n!+1\geqslant 22$, de unde $n\geqslant 4$.

Deoarece $n!+1\geqslant 22>11$ și $n!>11$, deci $n!(n!+1)>121$, și din $1\cdot 2\cdot 3\ldots(n!-1)n!(n!+1)=121(n^3-n)!$ rezultă

$1\cdot 2\cdot 3\ldots(n!-1)<1\,2\,3\ldots(n^3-n)$, iar de aici rezultă

$n!-1<n^3-n$, deci $n!\leqslant n^3-n$ sau $(n-2)!\leqslant n+1$, de unde rezultă $n\leqslant 5$. Soluție unică $n=5$.

191. a) Din $C_m^k=\frac{m}{k}C_{m-1}^{k-1}\Rightarrow C_{2n}^k=\frac{2n}{k}C_{2-1}^{k-1}$, dar $\frac{2n}{k}\neq 1$, $(\forall)\ k\in\{1,2,\ldots 2^n-1\}$, deci numerele sînt pare.

b) Observăm mai întîi „situația nefavorabilă" în care $k=2^{n-1}$. În acest caz $C_{2^n}^k=C_{2^n}^{2^{n-1}}=2C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$. Rămîne de arătat că $2\nmid C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$. Pentru aceasta $C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}C_{2^n-2}^{2^{n-1}-2}=\ldots=\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\cdot\frac{2^n-2}{2^{n-1}-2}\ldots$ $\ldots C_{2^n-2^{n-1}}^{\circ}$ și toate puterile lui 2. Factorii comuni corespunzători numitorului și numărătorului se simplifică. Deci $C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ este impar.

192. $(m+1)^{k+1}-m^{k+1}=C_{k+1}^1m^k+C_{k+1}^2m^{k-1}+\ldots C_{k+1}^km'+1$. Dînd lui m valorile $0,1,2,\ldots,n+1$ și adunînd membru cu membru obținem:

$$(n+1)^{k+1}=C_{k+1}^1S_k+C_{k+1}^2S_{k-1}+\ldots+C_{k+1}^kS_1+C_{k+1}^{k+1}S_0+1,\text{ unde}$$
$$S_k=1^k+2^k\ldots+n^k.$$

193. Dacă $q=1\Rightarrow S_n=n+1$ și $S_n=n+1$ și egalitatea din enunț capătă aspectul $C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2+3C_{n+1}^3+\ldots+(n+1)C_{n+1}^{n+1}=2^n(n+1)$ care se verifică ușor ținînd seama de relația:

$$kC_{n+1}^k=(n+1)C_n^{k-1},\ k=1,2,\ldots n+1.$$

Fie $q\neq 1$. Înmulțind partea stîngă și dreaptă cu $1-q$ și respectiv $2\left(1-\frac{1+q}{2}\right)$, unde $1-q=2\left(1-\frac{1+q}{2}\right)$ și ținînd seama că $(1-q)s_n=$

$= 1 - q^{n+1}$ și $\left(1 - \frac{1+q}{2}\right) S_n = 1 - \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}$, relația din enunț devine

$$C_{n+1}^1(1-q) + C_{n+1}^2(1-q^2) + \ldots + C_{n+1}^{n+1}(1-q^{n+1}) =$$

$$= 2^{n+} \quad 1 - \left[\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\Big] = 2^{n+1} - (1+q)^{n+1}, \text{ care este evidentă.}$$

194. Evident, pentru $x \in (-\infty, 0]$ toți termenii sînt pozitivi.

Fie $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$. Grupînd termenii vecini doi cîte doi, obținem că fiecare grupare este pozitivă.

Într-adevăr, $C_n^p x^p - C_n^{p+1} x^{p+1} = \left(1 - \frac{n-p}{p+1} x\right) C_n^p x^p =$

$= \frac{p(1+x) + (1-nx)}{p+1} C_n^p x^p \geqslant 0$, p par. Dacă în expresia inițială sînt un număr impar de termeni, atunci ultimul termen este de forma

$$(-1)^{2q} C_n^{2q} x^{2q} \geqslant 0.$$

195. Evident $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$. Fie d un divizor comun al numerelor C_{2n}^{2k-1}, $k = 1, \ldots n$, atunci $d/2^{2n-1}$, deci $d = 2^m$.

Fie $n = 2^k q$, q impar, atunci $C_{2n}^1 = 2n = 2^{k+1} q \Rightarrow 2^{k+1}/C_{2n}^1$. Vom arăta că

$$2^{k+1}/C_{2n}^r;\ r = 1, 3, \ldots, 2^{n-1}.$$

Într-adevăr $C_{2n}^r = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,r!} = \frac{2n}{r} C_{2n-1}^{r-1} = \frac{2^{k+1} q}{r} C_{2n-1}^{r-1}$, dar cum r este impar și $\frac{q}{r} C_{2n-1}^{r-1}$ este întreg, rezultă că $2^{k+1}/C_{2n}^r$.

196. Relația dată se mai scrie

$$C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n-k} C_k^k + 2^{n-k-1} C_{k+1}^k + \ldots + 2C_{n-1}^k + C_n^k.$$

Demonstrăm prin inducție după $n - k$. Dacă $n - k = 0$, relația este evidentă. Presupunem relația adevărată pentru toate cazurile cînd diferența $n - k = N - 1$ și demonstrăm pentru cazul cînd $n - k = N$. Membrul stîng se mai scrie:

$$(C_n^k + C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + \ldots (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n =$$

$= C_n^k + 2(C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \ldots C_n^n)$ (1) dar în baza ipotezei de inducție

$$C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \ldots C_n^n = 2^{n-k-1} C_k^k + 2^{n-k-2} C_{k+1}^k + \ldots + C_{n-1}^k$$

și făcînd înlocuirea, membrul drept al egalității (1) devine:

$$C_n^k + 2(2^{n-k-1} C_k^k + 2^{n-k-2} C_{k-1}^k + \ldots + C_{n-1}^k) =$$

$$= 2^{n-k} C_k^k + 2^{n-k-1} C_{k+1}^k + \ldots + 2C_{n-1}^k + C_n^k.$$

197. Să presupunem că n este un număr natural de forma p^k cu $k \in \mathbf{N}^*$. Să considerăm polinomul $f(x) = (1+x)^{p^k} \in \mathbf{Z}_p[X]$.

Avem $(1+x)^p = 1 + x^p$ în $\mathbf{Z}_p[X]$, deoarece numerele $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{p-1}$ sînt divizibile cu p, iar $\mathbf{Z}_p$ este de caracteristică p.

De asemenea, $(1 + x)^{p^s} = [(1 + x)^p]^{p^{s-1}} = (1 + x^p)^{p^{s-1}} = 1 + x^{p^s}$.
Prin inducție se demonstrează că $f(x) = 1 + x^{p^k} = 1 + x^n$. Dar pe de altă parte, $f(x) = (1 + x)^{p^k} = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n$. De aici deducem că numerele $C_n^1, C_n, \ldots C_n^{n-1}$ sînt divizibile cu p. Să presupunem acum că $n = p^k \cdot q$ cu $q \geqslant 2$, q nedivizibil cu p și vom demonstra că în acest caz nu toate numerele $C_n^1, C_n^2, \ldots C_n^{n-}$ sînt divizibile cu p, ceea ce va încheia demonstrația.
Avem $f(x) = (1 + x)^n = (1 + x)^{p^k q}$ și coeficientul lui x^{p^k} în această dezvoltare este nenul deoarece q nu se divide prin p. Avem însă $f(x) = 1 + \ldots + C_n^1 x + \ldots C_n^{p^k} x^{p^k} + \ldots$
Egalînd coeficienții lui x^{p^k} din cele două dezvoltări obținem: $q = C_n^{p^k}$ în $\mathbf{Z}_p$ de unde deducem imediat că $C_n^{p^k}$ nu se divide cu p.

198. $C_n^{k-1} C_n^k, C_n^{k+1}$ formează o progresie aritmetică, atunci $C_n^{k-1} + C_n^{k+1} = 2C_n^k$ (1) cu condițiile $k - 1 \geqslant 0$ și $k + 1 \leqslant n \Rightarrow 1 \leqslant k \leqslant n - 1$ (2). Efectuînd calculele în (2) obținem $n^2 - 4nk + 4k^2 - n - 2 = 0$ (3) sau $n = (n - 2k)^2 - 2$, de unde rezultă că n trebuie să fie de forma $n = u^2 - 2$, cu $u \in \mathbf{N}$ și care satisface condiția ($u = n - 2k$ sau $u = 2k - n$), prin urmare $k = k_1 = \frac{n-u}{u} = \frac{u^2-u}{2} - 1 = C_n^2 - 1$ sau $k = k_2 = \frac{n+u}{2} = \frac{u^2+u}{2} - 1 = C_{n+1}^2 - 1$. Pentru ca n să fie pozitiv, trebuie ca $u \geqslant 2$, dar pentru $u = 2$ valorile k_1 și k_2 nu satisfac inegalitățile 2).

Dacă $u \geqslant 3$, atunci $k_1 = C_n^2 - 1 \geqslant 1$ și $k_1 = \frac{n-u}{2} < n$ și întrucît $k_1 + k_2 = n$ și $k_1 < k_2$, atunci ambele valori ale lui k satisfac inegalitățile (2). Deci perechile n,k pentru care coeficienții binomiali de mai sus formează o progresie aritmetică sînt date de

$$n = u^2 - 2, \quad k = C_n^2 - 1 \text{ sau}$$
$$k = C_{n+1}^2 - 1, \quad u \geqslant 3.$$

199. Din expresia coeficientului binomial

$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ deducem $C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1}$ sau $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$, deoarece C_{m-1}^{n-1} este întreg, din egalitatea precedentă deducem că $m \mid n \cdot C_m^n$ și cum $(m, n) = 1$, rezultă că $m \mid C_m^n$.

200. Presupunem că $n! + 1 \mid (2n)! + 1$.

De aici și cum $(2n)! + 1 = C_{2n}^n (n!)^2 + 1 = C_{2n}^n (n! + 1)(n! - 1) + C_{2n}^n + 1$ rezultă că $n! + 1 \mid C_{2n}^n + 1$, de unde $C_{2n}^n \geqslant n!$.
Prin încercări găsim această inegalitate adevărată pentru $n \leqslant 6$. Pentru $n \geqslant 7$ se arată ușor prin inducție că $(2n)! < (n!)^3$, adică $C_{2n}^n < n!$. Din $n \leqslant 6$ și din $n! + 1 \mid C_{2n}^n + 1$ găsim $n = 3$.

G.M. 12/1981 problema 0:271

201. Din expresia coeficientului binomial $\binom{n}{k}$ deducem

$$n! = \binom{n}{k} k!\,(n-k)!, \text{ de unde}$$
$$(1) \quad n(n-1) \ldots (n-k+1) = \binom{n}{k} k!$$

Dacă n este prim şi $1 \leqslant k \leqslant n-1$, atunci nici unul din numerele $1, 2, \ldots k$ nu se divide prin n şi deci nici $k!$ nu se divide prin n, şi cum membrul stîng al egalităţii (1) se divide prin n, atunci numărul $\binom{n}{k}$ se divide prin n.

Reciproc, dacă $\binom{n}{k}$ se divide prin n, pentru orice k, cu $1 \leqslant k \leqslant n-1$, dec i $\binom{n}{k} = ns$, unde s este un număr natural, atunci din (1) rezultă

(2) $(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = s \cdot k!$ pentru $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

Să arătăm că n este prim. Într-adevăr, dacă nu ar fi prim ar admite un divizor prim p cu $1 < p < n$, şi cum numerele $1, 2, \ldots p-1$ nu se divid cu p, rezultă că şi numerele $n-1, n-2, \ldots, n-(p-1)$ nu se divid prin p.

Astfel în egalitatea (2), luînd $k = p$, membrul stîng nu se divide prin p, în timp ce membrul drept, egal cu $s \cdot p!$, evident se divide prin p. Contradicţia obţinută demonstrează că n este prim.

202. Pentru ca toţi coeficienţii binomiali să fie impari, trebuie ca fracţiile

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \ldots, \frac{n-k}{k+1}, \ldots, \frac{1}{n} \quad (1)$$

aduse la fracţii ireductibile să aibă numărătorii şi numitorii impari. De asemenea n trebuie să fie impar. Fie $n = 2^s n - 1$ cu n impar. Atunci a (2^s+1)-a fracţie din şirul (1) este

$$\frac{n-(2^s-1)}{2^s} = \frac{2^s(n-1)}{2^s} = \frac{n-1}{1}$$

şi atunci pentru $n \neq 1$ are numărătorul par.

Deci $n = 1$ şi atunci $n = 2^s - 1$ şi a (2^s+1) fracţie din şirul (1) nu există. Reciproc, dacă $n = a^s - 1$, atunci termenul general din şirul (1) are forma $[2^s - (k+1)] \mid (k+1)$, unde $k < n$. Pentru $k+1 = 2^t v$ cu v impar acesta este $(2^{s-t} - v) \mid v$ şi toţi coeficienţii binomiali sînt impari. Deci toţi coeficienţii binomiali sînt impari dacă şi numai dacă n este de forma $2^k - 1$.

Generalizare: coeficienţii binomiali sînt toţi nemultipli de p dacă şi numai dacă $n = p^k - 1$, cu p prim, a fost dată de Eugen Rusu în G.M.A 1 (1954) p. 30—33.

A.M.M. 53 (1946) problema E 706.

203. Avem $\binom{np}{p} = \frac{(np)!}{p!(np-p)!} = \frac{np(np-1)!}{p(p-1)!(np-p)!} = n\binom{np-1}{p-1}$

pe de altă parte

$$\binom{np-1}{p-1} = \frac{(np-1)(np-2)\ldots(np-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)} = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{np-k}{k} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(\frac{np}{k} - 1\right).$$

Pentru orice $k = 1, 2, \ldots, p-1$, k nu se divide cu p (fiind $< p$) şi deci prin simplificarea numărului raţional $\frac{np}{k}$, el se va scrie sub forma $p\frac{a_k}{b_k}$, unde b_k nu se divide cu p şi este prim cu a_k. Făcînd înmulţirea obţinem

$$\binom{np-1}{p-1} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(p\frac{a_k}{b_k} - 1\right) = p\frac{a}{b} + (-1)^{p-1}.$$

Numitorul b se obține din înmulțirea numitorilor b_k care sînt primi cu p; deci b este prim cu p. Cum însă $\binom{np-1}{p-1}$ este număr întreg, rezultă că $b \mid a$ și deci $\binom{np-1}{p-1} = pq + (-1)^{p-1}$ cu q întreg. Dacă $p = 2$, atunci $\binom{2p-1}{1} = 2p - 1 = 8862 + 1$.

Dacă $p \neq 2$ atunci $(-1)^{p-1} = 1$ și deci în orice caz $\binom{np-1}{p-1} = \mathcal{M}p + 1$ de unde $\binom{np}{p} = \mathcal{M}p + n$.

Observație: 1° Rezolvarea este aceeași și în cazul: pentru p prim, n și r naturale avem același rest la împărțirile $\binom{up^r}{p^r} : p$ și $n : p$.

2° Caz mai general: (A.M.M. nr. 3/1979 problema A—5).

Dacă $a \geq b \geq 0$, și p prim, atunci $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$ (pentru $b = 1$, $a = n$ se obține, de aici, problema din enunț)

Matematica v'școle, nr. 4/1952

204. $\sum_{k=0}^{n}\left(1-2\frac{k}{n}\right)^2 (C_n^k)^2 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 - 4\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}(C_n^k)^2 + 4\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}(C_n^k)^2 =$

$= C_{2n}^n - 4\sum_{k=1}^{n} C_n^k C_{n-1}^{k-1} + 4\sum_{k=1}^{n}(C_{n-k}^{k-1})^2 = C_{2n}^n - 4C_{2n-1}^{n-1} + 4C_{2n-2}^{n-1} = \frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}$.

S-au utilizat sumele: $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$, $\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$.

205. Suma se mai scrie: $S = \sum_{k=m}^{n} C_k^m C_n^k = \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} =$

$= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!} \cdot \frac{1}{(k-m)!(n-k)!} = \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} =$

$= \sum_{k=m}^{n} C_n^m C_{n-m}^{n-k} = C_n^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{n-k} = C_n^m 2^{n-m}$.

POLINOAME

1. a) $f(X) = (X^2 + 3)(X - 2)^2 + X^2(m - 4) \Rightarrow m \in [4, \infty)$:

b) $f(1 - X) = X^4 + (m - 3)X^2 + 2(7 - m)X + m$

$f(X) - f(1 - X) = -4X^3 \Rightarrow 6X^2 + 2(m - 13)X + 12 - m = 0$

. $\Delta = m^2 - 20m + 97 \geqslant 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 10 - \sqrt{3}] \cup [10 + \sqrt{3}, \infty)$.

G.M. 7/1983

2. Fie $a = \frac{m}{3}$, $b = \frac{n}{2}$, $a + b + c = k$, $m, n, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f = \frac{m}{3}X^3 +$

$+ \frac{n}{2}X^2 + \left(k - \frac{m}{3} - \frac{n}{2}\right)X + d = m\frac{(X - 1)X(X + 1)}{3} + n\frac{X(X - 1)}{2} +$

$+ kX + d$ pentru $\alpha \in \mathbf{Z}; \frac{(\alpha - 1)\alpha(\alpha + 1)}{3} \in \mathbf{Z}; \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(\alpha) \in \mathbf{Z}$.

G.M. 3/1984

3. Pentru $a_1 r \in \mathbf{Z}$, $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ există $M \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(10a + r) = 10M + P(r)$. Observăm că dacă luăm zece numere întregi consecutive: $q, q + 1, \ldots, q + 9$, rezultă $\sum_{i=0}^{9} f(q + i) = 10M_1 + \sum_{i=0}^{9} f(i)$, deoarece prin împărțirea cu zece, a numerelor considerate se obțin ca resturi numerele de la zero la nouă. Pentru $k = 99$ avem:

$$f(x) + f(x + 1) + \ldots + f(x + 99) = \sum_{i=0}^{99} f(n + i) =$$

$$= \sum_{j=0}^{9}\sum_{i=0}^{9} f(n + 10j + i) = M_2 \cdot 10 + \sum_{j=0}^{9}\sum_{i=0}^{9} f(i) =$$

$$= M_2 \cdot 10 + 10\sum_{i=0}^{9} f(i) = M_3 \cdot 10 \text{ unde } M_2, M_3 \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 99.$$

G.M. 11–12/1988

4. $f = (X - a)(X - b)g + \alpha X + \beta$ pentru $\begin{cases} X = a \Rightarrow f(a) = \alpha a + \beta, \\ x = b \Rightarrow f(b) = \alpha b + \beta. \end{cases}$

rezultă deci $\alpha = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$; $\beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$.

Deci $r = \alpha X + \beta = \frac{(X - a)f(b) - (X - b)(f(a)}{b - a}$.

b) $f = (X - a)^2 g + \alpha X + \beta$, $f(a) = \alpha a + \beta$

$f' = 2(X - a)\,g + (X - a)^2 \cdot g' + \alpha \Rightarrow f'(a) = \alpha \Rightarrow \beta = f(a) - af'(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = f'(a)X + f(a) - af'(a)$.

5. Fie a, b, c cele trei rădăcini întregi ale lui $f(X)$, astfel încît $a = 3p$, $b = 3q + 1$, $c = 3r + 2$. Avem $f(X) = (X - a)(X - b)(X - c)g(X)$, unde $g \in \mathbf{Z}[X]$.

Dacă $x = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$ atunci

$$f(x) = 3(k - p)(x - b)(x - c)(g(x) \text{ este divizibil cu } 3.$$

Dacă $x = 3k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$f(x) = (x - a)(x - b)\, 3(k - r)\, g(x) \text{ este divizibil cu } 3.$$

Dacă $x = 3k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$f(x) = 3(k - q)(x - a)(x - c)g(x) \text{ este divizibil cu } 3.$$

6. Determinăm restul împărțirii polinomului f la $(X - \alpha)(X - \beta)$. Putem scrie:

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\, g(x) + cx + d \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Rezultă: $\begin{cases} f(\alpha) = c\alpha + d \\ f(\beta) = c\beta + d \end{cases}$; rezolvînd sistemul obținem:

$$c = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}\ ;\ d = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}\ .$$

Rezultă că r, restul împărțirii lui f la $(X - \alpha)(X - \beta)$ este

$$r = cX + d = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} X + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}\ .$$

În cazul problemei $\alpha = 1$; $\beta = -1$ $r = \text{constant} \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow f(1) = f(-1) \Leftrightarrow a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = 0$.

7. $f(X) = C(X) \cdot g(X) + R(X)$ $(\forall)$ g un polinom de gradul doi.

Presupunem grad $f \geqslant 2$.

Dacă f are cel puțin două rădăcini complexe distincte, x_1 și x_2, atunci $f(X)$ se divide cu $(X - x_1)(X - x_2)$ și deci restul nu este de gradul întîi.

Dacă f are o rădăcină complexă x_1 multiplă, atunci f se divide cu $(X - x_1)^2$ și deci restul nu este de gradul întîi. Rezultă deci că f este un polinom de gradul întîi.

8. $x^6 - 6x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x_1^3 = 2$; $x_2^3 = 4 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{2}$, $x_2 = \sqrt[3]{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(2) + \sqrt[3]{2}\, g(2) + \sqrt[3]{4} h(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = g(2) = gh(2) = 0$

$$f(4) + \sqrt[3]{4} g(4) + 2\sqrt[3]{2}\, h(4) = 0 \Leftrightarrow f(4) = g(4) = h(4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f, g, h \vdots (X - 2)(X - 4) = X^2 - 6X + 8.$$

G.M. 4—5/1984

9. Fie $\varepsilon_k \neq 1, k = \overline{1,4}$ rădăcini ale ecuației $x^5 = 1$.

Rezultă $\varepsilon_k^5 = 1$ și $\varepsilon_k^4 + \varepsilon_k^3 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k + 1 = 0$.

Pentru $x = \varepsilon_k$ avem $f_1(1) + \varepsilon_k f_2(1) + \varepsilon_k^2 f_3(1) = 0$.

Rezultă că ecuația $f_1(1) + xf_2(1) + x^2 f_3(1) = 0$ are patru rădăcini, ceea ce înseamnă că $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 0$.

Pentru $x = 1$ rezultă $f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) = 5f_4(1)$ deci și $f_4(1) = 0$.

10. Fie ε o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$. Rezultă:

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0,\ \varepsilon^3 = -1,\ \varepsilon \neq -1.$$

Polinomul $f = (X-1)^m + X^m + 1$ se divide cu $X^2 - X + 1$ dacă $f(\varepsilon) = 0$.
Cum $f(\varepsilon) = (\varepsilon - 1)^m + \varepsilon^m + 1 = \varepsilon^{2m} + \varepsilon^m + 1$.
Pentru $m = 6k + p$, $k \in \mathbf{Z}$, $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
rezultă $f(\varepsilon) = \varepsilon^{12k+2p} + \varepsilon^{6k+p} + 1 = \varepsilon^{2p} + \varepsilon^p + 1$.
Observăm că $f(\varepsilon) = 0$ pentru $p = 2, 4$, deci $m_1 = 6k + 2$, $m_2 = 6k + 4$.

11. Fie $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\Rightarrow \varepsilon^3 = 1$ şi
$f(\varepsilon) = \varepsilon^{14} + \varepsilon^{10} + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ rezultă că $X^2 + X + 1 | f$.

La fel se arată că $X^2 - X + 1 | f$.
Rezultă $f = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)g$, $g \in \mathbf{Z}[X]$.
Efectuînd calculele rezultă $g = X^{10} - X^8 + X^6 - X^2 + 1$.
Cum $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ rezultă că f nu are rădăcini reale, deci şi g nu are rădăcini reale.
Presupunem că există $h \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît grad $h = 2$ şi $h(X) | g(X)$.
Cum $g(X) = g(-X)$ şi $h(-X) | g(-X)$, $h(-X) | g(X)$ adică $h(X) \cdot h(-X) | g(X)$.
Luăm $h(X)h(-X) = X^4 + aX^2 + 1$. Rezultă $g(X) = (X^4 + aX^2 + 1)(X^6 + bX^4 + cX^2 + 1) = X^{10} - X^8 + X^6 - X^2 + 1$.
Dezvoltînd şi egalînd coeficienţii termenilor de acelaşi grad obţinem:

(1) $a + b = -1$
(2) $1 + ab + c = 1$ Din (2) rezultă $c = -ab$.
(3) $b + ac + 1 = 0$ Înlocuindu-l pe c în (3) şi (4)
(4) $c + a = -1$ rezultă $\begin{cases} b + 1 = a^2 b \\ a + 1 = ab \end{cases}$ sau

$\begin{cases} ab + a = a^3 b \ (a \neq 0) \\ a + 1 = ab. \end{cases}$ Rezultă $2a + 1 = a^2(a + 1)$ sau

$1 = a(a^2 + a - 2) = a(a - 1)(a + 2)$ relaţie imposibilă pentru $a \in \mathbf{Z}$.
Rezultă că peste $\mathbf{Z}[X]$, g nu are divizori de grad doi, patru sau şase, deci este ireductibil.
Deci $f = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^{10} - X^8 + X^6 - X^2 + 1)$.

G.M. 4/1983

12. a) Efectuînd substituţia $x \to t^2$ obţinem

$$P(t^6) = t^2 P(t^4) + t^4 P(-t^2) + t^6, \ (\forall) t \in [0, \infty). \quad (1)$$

Fie $n = \text{grad } P$. Din (1) rezultă $6n \leqslant \max\{4n + 2, 2n + 6, 6\} \Rightarrow n \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \in \{0, 1\}$.

Numai pentru $n = 1$ rezultă $P = aX + b$ şi impunînd ca P să verifice egalitatea din enunţ, rezultă $b = 0$, $a = 1$. deci $P = X$.

b) Fie $P = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.

$$(1) \ P\left(X + \frac{1}{n}\right) = a_m X^m + \left(a_m \frac{m}{n} + a_{m-1}\right) X^{m-1} + \left(a_m \cdot \frac{m(m-1)}{2n^2} + \right.$$
$$\left. + a_{m-1} \cdot \frac{m-1}{n} + a_{m-2}\right) X^{m-2} + P_1(X), \text{ gr. } P_1 \leqslant m - 3.$$

$$(2) \ P\left(X - \frac{1}{n}\right) = a_m X^m + \left(-a_m \frac{m}{n} + a_{m-1}\right) X^{m-1} +$$
$$+ \left(a_m \frac{m(m-1)}{2n^2} - a_{m-1} \frac{m-1}{n} + a_{m-2}\right) X^{m-2} + P_2(X), \text{ unde gr. } P_2 \leqslant m - 3.$$

Din (1) și (2) rezultă $P\left(X+\frac{1}{n}\right)+P\left(X-\frac{1}{n}\right)=2a_mX^m+2a_{m-1}X^{m-1}+$

$+2a_{m-2}X^{m-2}+a_m\frac{m(m-1)}{n^2}X^{m-2}+P_3(X)$,unde gr. $P_3(X)\leqslant m-3$ (3).

Acum egalitatea din enunț devine $a_m\frac{m(m-1)}{n^2}X^{m-2}+P_n(X)=0$,

$(\forall)\ x\in\mathbf{Q}$, gr. $P_n\leqslant m-3$, deci ultimul polinom este identic nul $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(m-1)=0\Rightarrow m=0$ sau $m=1\Rightarrow P=a_1X+a_0$.

13. Considerăm grad $f\geqslant 3$ și $f=(X-p)(X-p-1)(X-p-2)g+$ $+aX^2+bX+c$ unde $g\in\mathbf{Z}[X]$, $a,b,c\in\mathbf{Z}$.

Avem

$$f(p)=ap^2+bp+c=6$$

$$f(p+1)=a(p+1)^2+b(p+1)+c=18$$

$$f(p+2)=a(p+2)^2+b(p+2)+c=54.$$

Rezultă

$$f(p+1)-f(p)=2ap+a+b=12$$

$$f(p+2)-f(p+1)=2a(p+1)+a+b=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a=24\Rightarrow a=12\Rightarrow 24p+12+b=12\Rightarrow b=-24p\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24p^2-24p^2+c=6\Rightarrow c=6$$ și obținem:

$$f(X)=(X-p)(X-p-1)(X-p)g(X)+12a-24p+6.$$

Observăm că pentru $x\in\mathbf{Z}$ $f(x)=6k$, unde $k\in\mathbf{Z}$, deci ecuația $f(x)=2$ nu are soluții numere întregi.

G.M. 2/1987

14. a) $f(0)=1\Rightarrow X\mid f-1$

$f(1)=1\Rightarrow X-1\mid f-1\Rightarrow X(X-1)\mid f-1\Rightarrow f-1=X(X-1)f$, sau $f=X(X-1)f_1+1$.

b) $x_{n+1}-1=(x_n-1)x_nf_1(x_n)$ asemănător

$x_n-1=(x_{n-1}-1)\ x_{n-1}f_1(x_{n-1})$

— — — — — — — — — —

$x_2-1=(x_1-1)\ x_1f_1(x_1)$

$x_1-1=(x_0-1)\ x_0f_1(x_0)$. Prin înmulțire, după simplificare, pentru $x_0\neq 1$ și $x_0\neq 0$ se obține:

$$x_{n+1}-1=x_0x_1\ldots x_{n-1}x_nf_1(x_0)\cdot f(x_2)\ldots f_1(x_1).$$

Rezultă că x_{n+1} este prim cu produsul $x_0\cdot x_1,\ldots x_n$ deci cu $x_0, x_1,\ldots, x_n$.

15. $f(X^n)=(X-1)\,g(X)\Rightarrow f(1)=0$.

Fie ε_k, $k=\overline{1,n}$ rădăcinile ecuației $x^n-1=0$. Cum $f(\varepsilon_k^n)=f(1)=0$, rezultă că $f(X^n)$ se divide cu $\prod_{k=1}^{n}(X-\varepsilon_k)=X^n-1$.

16. Presupunem $m>n$, $m=k\cdot n+r$ unde $k\in\mathbf{N}^*$, $r<n$.

Avem succesiv: $f=(X^m-1,\ X^n-1)=(X^m-X^n,X^n-1)=(X^{m-n}-1,$ $X^n-1)=\ldots=(X^{m-kn}-1,X^n-1)=(X^r-1,X^n-1)$.

Luînd $n = pr + q$, $q < r$, avem $f(X^n - 1, X^r - 1) = (X^q - 1, X^r - 1)$ etc. Repetînd procedeul, observăm că determinarea lui presupune aflarea lui $d = (m, n)$, deci $f = X^d - 1$.

17. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 0$.
Înlocuind în relația $f(X + 2) + f(X) = \sqrt{2}f(X + 1)$ și identificînd coeficienții rezultă $2a_n = \sqrt{2}a_n \Rightarrow a_n = 0$.
Deci nu există $f \in \mathbf{R}[X]$, $f \neq 0$ astfel încît să fie satisfăcută relația dată $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

G.M. 3/1981

18. Fie $f = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$.

Pentru $x \in \mathbf{R}^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{x^i} = \frac{1}{x^n} \sum_{i=0}^{n} a_ix^{n-i}$

$$f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \sum_{i=0}^{n} a_ix^{n-i} = x^n \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow (a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n)(a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n) = X^n, \quad a_n \neq 0$$

$$a_na_0X^{2n} + (a_0a_{n-1} + a_na_1)X^{2n-1} + (a_na_2 + a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_0)X^{2n-2} + \ldots$$
$$\ldots + = X^n \Rightarrow a_na_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Din $a_0a_{n-1} + a_na_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ ș.a.m.d. pînă la $a_{n-1} = 0$, prin urmare

$f(X) = a_nX^n$, iar din $f(X)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow a_n^2 = 1 \Rightarrow a_n = \pm 1$, deci

$f(X) = X^n$, $f(X) = -X^n$ cu $n \in \mathbf{N}$, arbitrar.

19. a) $(X - 3)f(X) = (X - 1)f(X - 1) \Rightarrow f(1) = 0$, $f(2) = 0$.
Rezultă $f(x) = a(X - 1)(X - 2)$, $a \in \mathbf{Z}^*$.

b) $f(X) = a(X - 1)(X - 2) \neq 1981$ pentru $x \in \mathbf{Z}$, deoarece $(X - 1)(X - 2) =$ par.

G.M. 8/1984

20. Pentru $x = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f = (X - 1)g \Rightarrow$
$X(X - 1)g = (X - 2)\ X\ g(X + 1) \Rightarrow (X - 1)g = (X - 2)\ g(X + 1)$
Pentru $x = 1 \Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow g\ (X - 2)\ h \Rightarrow$
$(X - 1)(X - 2)\ h(X) = (X - 2)(X - 1)\ h(X + 1)$
$\Rightarrow h(X) = h(X + 1) = k \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow f = (X - 1)g = (X - 1)(X - 2)h = (X - 1)(X - 2)\ k \Rightarrow$
$\Leftrightarrow f = k(X - 1)(X - 2)$.

21. I. $a = 0 \Rightarrow X(f(X) - b) = Xf(X) \Rightarrow bX = 0$
1) $b = 0$, relația este adevărată pentru orice $f \in \mathbf{R}[X]$.
2) $b \neq 0$, nu există $f \in \mathbf{R}[X]$.
II. $a \neq 0$, $x = a \Rightarrow f(a) = b \Rightarrow f(X) = (X - a)g(X) + b$, $g(X) \in \mathbf{R}[X]$
$\Rightarrow X(X - a)\ g(X) = (X - a)\ [Xg(X + a) + b] \Rightarrow X[g(X) - g(X + a)] = b$.
Pentru $X = 0 \Rightarrow b = 0$
$b = 0 \Rightarrow g(X) = g(X + a)\ (\forall)\ X \in \mathbf{R} \Rightarrow g(X) = k$, $k \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow g(X) = k(X - a)$.

G.M. 2/1981

22. Pentru $X = a \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(X) = Xg(X)$;
$\Rightarrow (X - a)(X - b)\, g(X - b) = (X - b)(X - a)\, g(X - a) \Rightarrow$
$\Rightarrow g(X - b) = g(X - a)$.
Înlocuind X cu $X + a$ obținem $g(X) = g(X - b + a)$, $(\forall)\, X \in \mathbf{R}$.
Notăm $c = b - a \neq 0$ și rezultă $g(X) = g(X - c)$, $(\forall) X \in \mathbf{R}$.
Prin inducție rezultă $g(X) = g(X - nc)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$
$\Rightarrow g(0) = g(-nc)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$
$\Rightarrow g(X) = g(0)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) = aX$, $a \in \mathbf{R}$.

R.M.T. 1/1986

23. $X = 1 \Rightarrow 2f(1) = k \Rightarrow f(1) = \frac{k}{2}$.

$X = -1 \Rightarrow -2f(0) = k \Rightarrow f(0) = -\frac{k}{2}$.

$X = 0 \Rightarrow -f(1) + f(0) = k \Rightarrow -\frac{k}{2} - \frac{k}{2} = k \Rightarrow k = 0$.

Rezultă $(X - 1) f(X + 1) + (X + 1) f(X) = 0$, $(\forall)\, X \in \mathbf{R}$ și $f(0) = f(1) = 0$.
Luăm $f = (X - 1)Xg$, $g \in \mathbf{R}[X]$. Relația devine
$(X - 1)X(X + 1)\, g(X + 1) + (X + 1)(X - 1)X\, g(X) = 0$,
(1) $g(X + 1) + g(X) = 0$. Dacă $q(X)$ are o rădăcină din rel. (1), rezultă că $g(X)$ are o infinitate de rădăcini, ceea ce este absurd. Rezultă că $g(X) = a \in \mathbf{R}$.
Din (1) rezultă $a = 0$. Deci $g = 0 \Rightarrow f = 0$.

24. Pentru $x = 0 \Rightarrow \sin f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.
Pentru $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\sin f(k\pi) = f(0) = 0 \Rightarrow f(k\pi) = l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. Dacă $l = k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(k\pi) = k\pi$ pentru orice $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(x) = X$.
Dacă $l = 0 \Rightarrow f(k\pi) = 0$ $(\forall)\, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(X) = 0$.
Dacă l se modifică independent de k nu există $f(x)$. În concluzie $f(X) = X$ și $f(X) = 0$.

G.M. 10/1980

25. $(X + 1) f(X - 1) - X^2 g(X + 1) = X^2 - X - 1$.
Punînd $X + 2$ în locul lui X rezultă:
$$(X + 3) f(X + 1) - (X + 2)^2 g(X + 3) = X^2 + 3x + 1.$$
Dar $f(X + 1) - (X + 2)\, g(X + 3) = -1$. Înmulțim a doua relație cu $-(X + 2)$ și adunînd-o la prima obținem
$$f(X + 1) = x^2 + 3X + 1 + X + 2 \text{ sau}$$
$$f(X + 1) = x^2 + 4X + 3 = (X + 2)^2 - 1.$$
Rezultă $f = (X + 1)^2 - 1 = X(X - 2)$. Din relația a doua avem:
$(X + 2)\, g(X + 3) = 1 + f(X + 1) = (X + 2)^2$. Rezultă
$g(X + 3) = X + 2$, adică $g = (X - 1$.

G.M. 1/1986

26. Arătam că nu există $g \in \mathbf{Q}[X]$ cu proprietatea din enunț.
Pentru $x = -\frac{1}{3}$ se obține $g^2 - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)$, deci $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, imposibil pentru $g \in \mathbf{Q}[X]$. Căutăm $f, g \in \mathbf{R}[X]$ de gradul I care satisfac relația din

enunț. Fie $f(x) = ax + b$ și $g(x) = cx + d$

$$2x + 1 + (3x + 1)(ax + b) = (cx + d)^2 \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

$x = 0 \Rightarrow 1 + b = d^2$; $x = \frac{-1}{3} \Rightarrow \left(-\frac{c}{3} + d\right)^2 = \frac{1}{3}$. Luăm $d = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + b = 0$, $\frac{c^2}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow c \pm \sqrt{3}$ și $b = -1$. Pentru $a = 1$, $f(x) = x - 1$ și $g(x) = \sqrt{3}x$ verifică proprietatea din enunț, deci există $f, g \in \mathbf{R}[X]$.

G.M. 10/1983

27. Într-adevăr polinomul $f = \frac{X(X-1)(2X-2)\ldots(X-12)}{13}$ are valori întregi pentru orice $X \in \mathbf{Z}$ și coeficientul lui X^{13} este egal cu $\frac{1}{13}$.

28. a) Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $f(0) \neq 0$.

Atunci $f = 1$, deoarece dacă $f \neq 1$, atunci $f = Xg + 1$, $g \in \mathbf{R}[X]$ și $g(0) \neq 0 \in f(x^2) = x^2g(x^2) + 1 \Rightarrow x^2g^2(x) = 2xg(x) + 1 \Rightarrow$

$xg(x^2) = xg^2(x) + 2g(x)$, pentru $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$ absurd.

b) Dacă $f = X^kg$, $k \in \mathbf{N}^*$, $g \in \mathbf{R}[X]$

$f(X^2) = f^2(X) \Leftrightarrow g(X^2) = g^2(X)$. În concluzie, avem:

1) Dacă $f(0) \neq 0 \Rightarrow f = 1$.

2) Dacă $f(0) = 0 \Rightarrow f(X) = X^kg(X)$, $g(0) \neq 0 \Rightarrow g(X^2) = g^2(X) \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 1 \Rightarrow f(X) = X^k$, $k \in \mathbf{N}$. Observăm că și $f = 0$ este soluție.

29. $g = 0$ este o soluție. Pentru $g \neq 0$ observăm că dacă $x_0 \in \mathbf{C}$ este o rădăcină a lui f atunci $|g(x_0)| \leqslant |f(x_0)| = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0$, deci x_0 este rădăcină și pentru g. Rezultă $g = f \cdot h$ unde $h \in \mathbf{C}[X]$

$$|g(x)| = |f(x)|\,|h(x)| \leqslant |f(x)|,\ (\forall)\ x \in \mathbf{C} \Rightarrow |h(x)| \leqslant 1\ (\forall)x \in \mathbf{C}.$$

Dacă $h(X) = h_1(X) + ih_2(X)$, $h_1, h_2 \in \mathbf{R}[X]$.

Pentru $x \in \mathbf{R}$ avem: $|h(x)|^2 = h_1^2(x) + h_2^2(x) \leqslant 1$.

Rezultă $h_1(x) = a \in \mathbf{R}$, $h_2(x) = b \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 \leqslant 1$.

Deci $h(X) = a + ib = \alpha$, $|\alpha| \leqslant 1 \Rightarrow g(X) = \alpha f(X)$, unde $|\alpha| \leqslant 1$.

30. Arătăm prin inducție că $f(X_n) = X_n$ unde pentru $n \in \mathbf{N}$ luăm $X_{n+1} = X_n^3 + 1$, $x_0 = 0$

$$f(x_1) = f(x_0^3 + 1) = f^3(x_0) + 1 = f^3(0) + 1 = 1 = x,$$
$$f(x_2) = f(x_1^3 + 1) = f^3(x_1) + 1 = f^3(1) + 1 = 2 = x_2.$$

Presupunem $f(x_n) = x_n$.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n^3 + 1) = f^3(x_n) + 1 = x_n^3 + 1 = x_{n+1}.$$

Rezultă că $f(x_n) = x_n$ pentru $n \in \mathbf{N}$ adică ecuația $f(x) - x = 0$ are o infinitate de soluții, situație care are loc numai dacă $f(x) = x$. (Observație: se arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict monoton.)

G.M. 11–12/1988

31. Considerăm șirul de numere naturale x_k, $k \in \mathbf{N}$, definit prin relația de recurență $x_{k+1} = x_k^n + 1$, $k \geqslant 0$, $x_0 = 0$.

Rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict monoton.

Rezultă: $f(x_{k+1}) = f(x_k^n + 1) = [f(x_k)]^n + 1$ pentru $k \geqslant 0$,
$f(x_0) = f(0) = 0$, $f(x_1) = [f(x_0)]^n + 1 = x_1$, $f(x_2) = [f(x_1)]^n + 1 = x_1^n + 1 = x_2$.

Presupunem că $f(x_k) = x_k$. Rezultă că:

$$f(x_{k+1}) = [f(x_k)]^n + 1 = x_k^n + 1 = x_{k+1}$$

Deci prin inducție a rezultat că $f(x_k) = x_k$ $(\forall)\ k \geqslant 0 \Rightarrow f = X$.

G.M. 11/1983

32. Arătăm, prin inducție că $f(X) = g(X) = X$, $f(0) = g(0) = 0$.
Pentru $x = 0$ din 1° și 2° rezultă $f(1) = g(1) = 1$.
Presupunem $f(k) = g(k) = 1$. Din 1° și 2° pentru $x = k$ obținem:

$$f(k + 1) = g(k + 1) = k + 1.$$

Rezultă $f(n) = g(n) = n$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. adică ecuațiile polinomiale
$f(x) - x = 0$ și $g(x) - x = 0$ are o infinitate de rădăcini.
Rezultă $f(X) = X$, $g(X) = X$.

G.M. 11/1988

33. Dacă gradul polinomului este n, fie $a_1 = a_2 = \ldots = a_k \neq 0$ pentru

$$k \in \{1, 2, \ldots n + 1\} \quad a_{k+1} = a_{k+2} = a_{n+1} = 0 \Rightarrow k f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

$$k = \overline{1, n+1} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ pentru } k = \overline{1, n+1}.$$

$\Rightarrow f(X)$ este nul pentru $n + 1$ valori reale nenule diferite, deci $f(X) = 0$.

G.M. 11/1980

34. Fie $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pentru $x \in \mathbf{C}^*$ și $|x| = 1$ avem:

$$1 = |f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{x}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \frac{1}{x^k}.$$

Rezultă $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} x^k$ sau $x^n = (a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n)(\overline{a}_n +$
$+ \overline{a}_{n-1} x + \ldots + \overline{a}_0 x^n)$, polinomul fiind unitar rezultă $a_n = 1$. Dezvoltînd și identificînd coeficienții obținem $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Deci

$$f(X) = X^n.$$

G.M. 5/1989

35. Pentru $x = -y$ obținem $f(y^2 + y + 1) = [f(-y)]^2 - f(-y) + 1$
Pentru $x = y + 1$ obținem: $f[(y + 1)^2 - (y + 1) + 1] = [f(y + 1)]^2 -$
$- f(y + 1) + 1$ sau $f(y^2 + y + 1) = [f(y + 1)]^2 - f(y + 1) + 1$. Rezultă că $[f(-y)]^2 - f(-y) + 1 = [f(y + 1)]^2 - f(y + 1) + 1$, sau

$$[f(-y)]^2 - [f(y + 1)]^2 - [f(-y) - f(y + 1)] = 0, \text{ sau}$$

$$[f(-y) - f(y + 1)][f(-y) + f(y + 1) - 1] = 0.$$

Fie $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$, $a_0 \neq 0$ Deosebim cazurile:

1) $f(y + 1) = f(-y)$ rezultă $a_0(y + 1)^n + a_1(y + 1)^{n-1} + \ldots =$
$= a_0(-y^n) + a_1(-y)^{n-1} + \ldots \Rightarrow n = par$; $n \neq 0$, $na_0 + a_1 = -a_1 \Rightarrow na_0 + 2a_1 = 0$
$C_n^2 a_0 + C_n^1 a_1 + a_2 = a_2 \Rightarrow (n - 1)a_0 + 2a_1 = 0$ absurd, pentru $a_0 \neq 0$.

2) $f(y+1) = 1 - f(-y)$, rezultă $f(1) = 1 - f(0) = 1$.

$a_0(y+1)^n + a_1(y+1)^{n-1} + \ldots = 1 - a_0(-y)^n - a_1(-y)^{n-1} - \ldots$

rezultă n = impar şi $na_0 + a_1 = -a_1 \Rightarrow (n-1)a_0 + 2a_1 = 0$

$$C_n^2 a_0 + na_1 + a_2 = a_2 \Rightarrow (n-1)a_0 + a_1 = 0.$$

Pentru $n \neq 1 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă $n = 1$ $\quad f(X) = a_0X + a_1$

$f(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow f(x) = a_0X$

$f(1) = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \quad \Rightarrow f(x) = X.$

G.M. 9/1988

36. Dacă $(\exists)\ x_0$ astfel încît $x_0 = f(x_0)$ $h(x_0) = h(f(x_0)) = f(h(x_0))$ rezultă că şi $h(x_0)$ este un punct fix pentru $f(x)$.
Dar $x_2 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = 2x^2 - 7x_0 + 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$.
Cum $f(x)$ are un punct fix unic $x_0 = 2$, rezultă că $h(2) = 2$, adică x_0 este punct fix şi pentru h.

37. 1) Fie $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. Avem succesiv:

$$f(a + f(a)) = \sum_{k=0}^{n} a_k [a + f(a)]^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i a^{n-k-i} f(a)^i =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[C_{n-k}^0 a^{n-k} + \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a^{n-k-i} f(a)^i \right] =$$

$$= f(a) + f(a) \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a^{n-k-i} f(0)^{i-1}. \text{ Deci } f(a) \mid f(a + f(a)).$$

2) Deoarece un polinom neconstant poate lua aceeaşi valoare numai pentru un număr finit de valori există $a_1 \in \mathbf{Z}^*$, astfel încît $|f(a_1)| \geqslant 2$. Dacă $f(a_1)$ nu este prim, problema e rezolvată. Dacă $f(a_1)$ este prim luăm $a_2 = a_1 + f(a_1)$. Rezultă că $f(a_1) \mid f(a_2)$. Dacă $f(a_2)$ nu este prim problema este rezolvată, dacă nu, rezultă că

$$f(a_2) = \pm f(a_1).$$

În continuare se repetă raţionamentul pentru $a_{i+1} = a_i + f(a_i)$, $i = 2, 3, \ldots$. Cum şirul (a_i) $i \geqslant 1$ este infinit iar polinomul nu poate lua aceleaşi valori $\pm f(a_i)$, decît de un număr finit de ori, rezultă că există $a_k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a_k)$ să nu fie număr prim.

38. Dacă P are coeficienţi naturali, rezultă că pentru $n \in \mathbf{N}$, $P(n) \in \mathbf{N}$. Cum $f(n) = P(n)$ pentru $n \in \mathbf{N}$, atunci pentru $k \in \mathbf{N}^*$

$f(k + f(k)) = P[k + P(k)]$ = număr prim.

Dar $P(k + P(k)] = P(k) \cdot Q(k) + P(k) = [Q(k) + 1]P(k)$ = număr prim.

Deosebim cazurile:

1) $P(k) = 1$. Fie $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_1X + a_0$ $a_i \in \mathbf{N}$, $i = \overline{0, n}$. Rezultă:

$k(a_nk^{n-1} + \ldots + a_1) + a_0 = 1$. Cum $k \in \mathbf{N}^*$ rezultă $a_0 = 1$ şi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Rezultă $P(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{N}$.

2) $P(k) = q > k$, q număr prim;

$$P[k + P(k)] = P(k + q) > P(k) + P(q) = q + P(q) > q.$$

Cum $q \mid P[k + P(k)]$ ori $q < P[k + P(k)]$ rezultă că $P[k + P(k)]$ nu este prim, rezultă că $P(k) = 1$.
În concluzie f este funcția constantă.

G.M. 3/1986

39. $f(19) = f(18 + 1) = 2p + f(1)$, unde $p \in \mathbf{Z}$.

$$f(88) = f(88 + 0) = 2q + f(0), \text{ unde } g \in \mathbf{Z}.$$

$f(19) \cdot f(88) = [2p + f(1)][2q + f(0)] = 5 \Rightarrow f(1)$ și $f(0)$ impare.
Pentru $k \in \mathbf{Z}$, $k = 2l + m$, $l \in \mathbf{Z}$, $m \in \{0, 1\}$.
Rezultă $f(k) = f(2l + m) = 2r + f(m)$, $r \in \mathbf{Z}$.
Cum $f(m)$ este impar pentru $m \in \{0, 1\}$, rezultă că $f(k)$ este impar pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, deci $f(k) \neq 1988$, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$.
Generalizare: $f(2p + 1)f(2q) = 2l + 1$, $p, q, l \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(0)$, $f(1)$ impare $\Rightarrow$ $f(k) \neq 2n$ $(\forall)$ $k, r \in \mathbf{Z}$.

G.M. 5–6/1988

40. Fie S suma coeficienților polinomului f. Rezultă:

$$S = f(1) = a(1 - b)(-1)^{k+1} - b(-1)^k - a(-1)^{k+2} + 1 = 0.$$

Pentru $k \in \mathbf{N}$, k par avem: $S = -a(1 - b) - b - a + 1 = 0$ sau $(a - 1)(b - 2) = 1$.

Deoarece $a, b \in \mathbf{Z}$ atunci $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}$ sau

$\begin{cases} a - 1 = -1 \\ b - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$. Pentru $k \in \mathbf{N}$, k impar avem:

$S = a(1 - b) + b + a + 1 = 1 + 2a + b - ab = 0$ sau $ab - 2a - b + 2 = 3$ sau

$(a - 1)(b - 2) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2 \\ b - 2 = 3 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0 \\ b - 2 = -3 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$

sau $\begin{cases} a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4 \\ b - 2 = 1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a - 1 = -3 \Rightarrow a = -2 \\ b - 2 = -1 \Rightarrow b = 1. \end{cases}$

G.M. 11/1982

41. Fie $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_k > 0$ pentru $k = \overline{0,n}$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow f(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k > 0$ $f(1) \geq \frac{1}{f(1)} \Leftrightarrow f(1)^2 \geq 1$.

Pentru $x \in \mathbf{R}_+$ $f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = f(1)^2 > 1$.

Cum $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$, rezultă $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{f(x)}$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$.

G.M. 9/1987

42. Fie $f(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, $a_k > 0$, pentru $k = \overline{0, m}$.

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i}{1 - x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{x_i}{1 - x_i}\right)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{1 - x_i}\right)^k.$$

Cum $x_i \in (0,1)$, rezultă $\frac{x_i}{1-x_i} < 0$ şi

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^k}{n} \geqslant \left(\frac{\sum\frac{x_i}{1-x_i}}{n}\right)^k \geqslant \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{n}\right)^k = \frac{1}{(n-1)^k}.$$

Rezultă $\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{n}{(n-1)^k} = nf\left(\frac{1}{n-1}\right)$.

Observaţie: am folosit şi inegalitatea $\sum \frac{x_i}{1-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$.

(vezi. cap. inegalităţi)

G.M. 9–10/1982

43. Arătăm că pentru $0 \leqslant c$ şi $0 \leqslant a \leqslant b$; $(b+c)^k + a^k \geqslant b^k + (a+c)^k$ pentru $k \in \mathbf{N}$. Dacă $k = 1$ avem egalitate.

Dacă $k \geqslant 2$, $(b+c)^k + a^k = b^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i b^i C^{k-i} + C^k + a^k \geqslant$

$\geqslant b^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i a^i c^{k-i} + c^k + a^k = b^k + (c+a)^k.$

Dacă $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_k \in \mathbf{R}_+$, $f(b+c) + f(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k[(b+c)^k + a^k] \geqslant$

$\geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k[b^k + (a+c)^k] = f(b) + f(a+c).$

Deci (1) $f(b+c) - f(a+c) \geqslant f(b) - f(a)$ pentru $0 \leqslant c \leqslant a \leqslant b$.
Luăm $a' = a - c$, $b' = b - c$. Cum $0 \leqslant a' \leqslant b'$ şi $c \geqslant 0$ rezultă din (1) $f(b'+c) - f(a'+c) \geqslant f(b') - f(a')$ sau $f(b) - f(a) \geqslant f(b-c) - f(a-c)$.

G.M. 9/1983

44. Să presupunem că $f = QR$, unde QR sînt polinoame alternate, cu grad $Q \geqslant 2$, grad $R \geqslant 2$. Dacă $Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^{m-i}$,

$R = \sum_{i}^{k} C_i X^{k-i}$, atunci, identificînd coeficienţii lui X^{n-1} şi X^{n-2} din egalitatea $f = QR$, obţinem $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0.$$

Rezultă că (1) $a_2 - a_1 = b_0(C_2 - C_1) + b_1(C_1 - C_0) + b_2C_0$.
Avem $b_0 = C_0 = 1$. Deoarece $C_2 - C_1$ şi $C_1 - C_0$ sînt numere impare, iar b_1 este număr par şi b_2 impar, membrul drept al egalităţii (1) este număr par iar membrul stîng impar, contradicţie. Prin urmare grad $Q = 1$ sau grad $R = 1$ şi atunci f are o rădăcină întreagă impară.

45. a) Dacă f este pară, atunci $\tilde{f}(ix) = \tilde{f}(-ix)$ $(\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{F}(ix) \in \mathbf{R}$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow \tilde{F}(iR) \subset \mathbf{R}$.

Dacă $\tilde{F}(i\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, fie $a \in \mathbf{R}$, $z = \tilde{F}(ia) \in \mathbf{R}$, $\bar{z} = \tilde{f}(-ia) \in \mathbf{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{z} = z$, adică $\tilde{F}(ia) = \tilde{F}(-ia)$ pentru $a \in \mathbf{R}$, adică $\tilde{F}$ este funcţie pară.
b) asemănător a).

G.M. 6/1987

46. Luăm $x = t - \frac{a+b}{2}$; $g(t) = f\left(t - \frac{a+b}{2}\right) = \left(t + \frac{a-b}{2}\right)\left(t - \frac{a-b}{2}\right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} + c\right)\left(t - \frac{a+b}{2} + d\right)$.

$d - \frac{a+b}{2} = d - \frac{c+d}{2} = -\frac{c-d}{2}$

$c - \frac{a+b}{2} = c - \frac{c+d}{2} = \frac{c-d}{2}$ rezultă $g(t) = \left[t^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]\left[t^2 - \left(\frac{c-d}{2}\right)^2\right] =$

$= t^4 - \left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2\right]t^2 + \left[\frac{(a-b)(c-d)}{4}\right]^2$. $g(t)$ are un minim pentru

$t^2_{\min} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2\right] \geqslant 0$ deci

$$x_{1,2\min} = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2\right]}.$$

47. Fie $(x_i)_{i=\overline{1,4}}$ abscisele punctelor $M_{i,i=\overline{1,4}}$.

Dacă ecuația dreptei este $y = mx + n$ rezultă că $(x_i)_{i=\overline{1,4}}$ sînt rădăcinile ecuației $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n$ sau (1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + (c - m) + d - n = 0$, $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$, implică $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$, adică rădăcinile ecuație (1) sînt în progresie aritmetică. Luăm

$x_1 = \alpha - 3r$, $x_2 = \alpha - r$, $x_3 = \alpha + r$, $x_4 = \alpha + 3r \Rightarrow \alpha = -\frac{a}{4}$,

$b = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = 4\alpha^2 + \alpha^2 - 9r^2 + \alpha^2 - r^2 = 6\alpha^2 - 10r^2$.

Rezultă $10r^2 = 6\alpha^2 - b = \frac{3a^2}{8} - b$, deci $r = \sqrt{\frac{3a^2 - 8b}{80}}$.

Dar $m - c = x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) = (\alpha^2 - 9r^2)2\alpha + (\alpha - r^2)2\alpha = 2\alpha(2\alpha^2 - 10r^2) = 4\alpha(\alpha^2 - 5r^2)$, iar

$$d - n = x_1x_2x_3x_4 = (\alpha^2 - 9r^2)(\alpha^2 - r^2).$$

Rezultă că $m = c + 4\alpha(\alpha^2 - 5r^2) = c - a\left(\frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{16} + \frac{b}{2}\right) = c + a\left(\frac{a^2}{8} - \frac{b}{2}\right)$

iar $n = d - (\alpha^2 - 9r^2)(\alpha^2 - r^2) = d - \left[\frac{a^2}{16} - \frac{9(3a^2 - 8b)}{80}\right]\left[\frac{a^2}{16} - \frac{3a^2 - 8b}{80}\right] =$

$= d + \frac{11a^2 - 36b}{40} \cdot \frac{a^2 + 4b}{40}$.

Problema admite soluții dacă $r \in \mathbf{R}$, adică dacă $3a^2 > 8b$.

48. Cum $a_k = a_0q^k$, $k = \overline{1, n}$ rezultă f.

$$f = a_0(X^n + qX^{n-1} + \ldots + q^{n-1}X + q^n)$$

$$f(q) = a_0(n + 1)\, q^n \neq 0.$$

G.M. 2/1986

49. Evident $f(a) - f(b) \vdots a - b$ $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{Z}$.

Dacă $m \in \mathbf{Z} - \{k, k + 1, k + 2\}$ numerele $f(m) - f(k)$, $f(m) - f(k + 1)$, $f(m) - f(k + 2)$ sînt divizibile cu $m - k$, $m - (k + 1)$, $m - (k + 2)$, care sînt consecutive și deci unul este multiplu de 3.

Prin urmare unul din numerele de mai sus este multiplu de 3, de unde rezultă că $f(m)$ este multiplu de 3.

50. Un polinom $P \in \mathbf{Z}[X]$ care are rădăcina $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ are și rădăcinile $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Rezultă deci că $P(X) : X^4 - 10X^2 + 1$.

Fie $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow (x - \sqrt{2})^3 = 3$

$x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2 + 2)$. Ridicînd din nou la pătrat, rezultă

$$Q(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0,$$

$$P(x) = Q(x)\,(x^4 - 10x^2 + 1).$$

51. a) Fie ε, $\bar{\varepsilon}$ rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.

Se arată că $f(\varepsilon) = 0$ și $f'(\varepsilon) = 0$.

b) Fie α, $\bar{\alpha}$ rădăcinile ecuației $x^2 + 3x + 3 = 0$, atunci $f(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow f : x^2 + 3x + 3$.

c) $x_1 = 1$ rădăcină triplă; $x = -1$ rădăcină simplă și ε, $\bar{\varepsilon}$ sînt rădăcini cel puțin simple pentru polinomul $(X^{n-1} - 1)(X^n - 1)(X^{n+1} - 1)$.

d) Se consideră polinomul în funcție de X și se arată că:

$$f(-y - z) = 0, \text{ deci } f \vdots X + Y + Z.$$

52. Gradul din stînga este n^2 iar gradul polinomului din dreapta este $2n \Rightarrow n^2 = 2n \Rightarrow n = 2 \Rightarrow f = a(X^2 - X)$, $a \in \mathbf{R}^*$.

53. $f(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)^m + \varepsilon^m + 1 = (-1)^m \varepsilon^{2m} + \varepsilon^m + 1$.

Dacă $m = 3k \Rightarrow f(\varepsilon) \neq 0$, dacă $m = 3k + 1 \Rightarrow f(\varepsilon) = (-1)^{3k+1}\varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, deci k = impar $k = 2p + 1 \Rightarrow m = 6p + 4$.

Dacă $m = 3k + 2 \Rightarrow f(\varepsilon) = (-1)^{3k+2}\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = (-1)^{3k}\varepsilon + \varepsilon^2 + 1$, deci k = par $\Rightarrow m = 6p + 2$. Prin urmare $f : X^2 + X + 1$, dacă $m = 6p + 2$, $6p + 4 \to f'(X) = m(X + 1)^{m-1} + mX^{m-1} \Rightarrow f(\varepsilon) = (-1)^{m-1}\varepsilon^{2m-2} + \varepsilon^{m-1} =$ $= \varepsilon^{m-1}[1 + (-1)^{m-1}\varepsilon^{m-1}] \Rightarrow m = 3k + 1$ cu k impar $\Rightarrow m = 6p + 4$.

Deci pentru $m = 6p + 4 \Rightarrow f \vdots (X^2 + X + 1)^2$. La fel se procedează pentru g.

54. Rădăcinile ecuației $x^5 + 1 = 0$, în afară de -1, sînt rădăcinile lui g. Fie deci α, $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$ rădăcinile lui g.

Polinomul f se mai scrie $f = (X^8 + X^6 + X^4 + X^2 + 1)\,h + X^{10p+5} + 1$

dar $f(\alpha) = (\alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1)\,h(\alpha) + \alpha^{10p} \cdot \alpha^5 + 1 =$

$$= \underbrace{(\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1)}_{=0}\,h(\alpha) - 1 + 1 = 0, \text{ deci } f(\beta) = 0,$$

s-a ținut seama că $\alpha^5 = -1$, $\beta^5 = -1$.

55. a) $f(i) = 0 \Rightarrow f(i) = -i^m + i \Rightarrow m = 4p + 1$.

b) Evident $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) =$
$= (x - \varepsilon)(x - \bar{\varepsilon})(x - \omega)(x - \bar{\omega})$ unde $\varepsilon^3 = 1$ și $\omega^3 = -1$.

$f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^m - \varepsilon^m - 1 = (-\varepsilon^2)^m - \varepsilon^m - 1 = (-1)^m\varepsilon^{2m} - \varepsilon^m - 1$.

Evident pentru $m = 3k$ $f(\varepsilon) \neq 0$.
Pentru $m = 3k + 1$ rezultă $f(\varepsilon) = 0$ dacă $m = 6p + 1$.
Pentru $m = 3k + 2$ rezultă $f(i) = 0$ dacă $m = 6p + 5$.
Deci $f : X^2 + X + 1$ dacă $m = 6p \pm 1$

$$f(\omega) = (\omega - 1)^m - \omega^m + 1 = \omega^{2m} - \omega^m + 1.$$

Pentru $m = 3k \Rightarrow f(\omega) = 2 - (-1) \neq 0$.
Pentru $m = 3k + 1 \Rightarrow f(\omega) = \omega^2 - (-1)^k\omega + 1 \Rightarrow k = 2p \Rightarrow m = 6p + 1$.
Pentru $m = 3k + 2 \Rightarrow f(\omega) = -\omega - (-1)^k\omega^2 + 1 \Rightarrow k = 2p + 1 \Rightarrow$
$m = 6p + 5$. Deci $f \vdots X^4 + X^2 + 1$ dacă $m = 6p \neq 1$.

56. a) $f = \left(\frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}\right)^2 - X^n = \frac{X^{2n+2} - 2X^{n+1} + 1 - X^{n+2} + 2X^{n+1} - X^n}{(X-1)^2} =$

$= \frac{(X^n - 1)(X^{n+2} - 1)}{(X-1)^2} = (1 + X + \ldots + X^{n-1})(1 + X + \ldots + X^{n+1})$.

b) $f = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n+1} + X^{n+2} + X^{n+3} + \ldots + X^{2n+1} -$
$- (X^2 + X^3 \ldots X^{n+2})$.

c) $\frac{X^{2n+2} - 1}{X - 1} - X^2\frac{X^{n+1} - 1}{X - 1} = \frac{X^{2n+2} - X^{n+3} + X^2 - 1}{X - 1} =$
$= (1 + X + \ldots + X^{n+1})(1 + X + \ldots + X^n)$.

d) $f = (X^n - 2)^n - X - 2 = (X^n - X - 2 + X)^n - X - 2 =$
$= (X^n - X - 2)^n + C_n^1(X^n - X - 2)^{n-1}X + \ldots + C_n^{n-1}(X^n - X - 2)X^{n-1} +$
$X^n - X - 2 = (X^n - X - 2)g$.

e) $f = C_n^0X^{2n+1} + C_n^1X^{2n-1} + \ldots + C_n^nX = X[C_n^0X^{2n} + C_n^1X^{2n-2} +$
$+ \ldots + C_n^n] = X[C_n^nX^{2n} + C_n^{n-1}X^{2n-2} + \ldots + C_n^0] = X(1 + X^2)^n$.

57. Evident a şi c sînt numere impare iar b număr par.
Dacă toate rădăcinile ar fi raţionale atunci $x_i = \frac{p_i}{q_i}$, $i = \overline{1, 2, 3}$, atunci evident $p_i | c$ şi $q_i | a \Rightarrow p_i$ şi q_i sînt impare, deci din

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} = -\frac{b}{a}, \text{ contradicţie.}$$

58. Dacă $c(a + b)$ impar $\Rightarrow c$, $a + b$ impare.
Dacă f ar fi reductibil în $\mathbf{Z}[X]$, atunci $f = (X - X_0)(X^2 + \alpha X + \beta)$ cu $\alpha, \beta, x_0 \in \mathbf{Z}$, deci $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 | c \Rightarrow x_0$ impar, $x_0^3 + c$ par şi

$$f(x_0) = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \Rightarrow ax_0 + b \text{ — par}$$
$\Rightarrow ax_0 + b - (a + b)$ impar, deci $a(x_0 - 1)$ — impar, absurd.

59. Considerăm polinomul $g = f - 7$, evident $g(a) = g(b) = g(c) =$
$= g(d) = 0 \Rightarrow f - 7 = g = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)h$.
Presupunem că există $m_0 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $f(m_0) = 14$, atunci

$$7 = f(m_0) - 7 = g(m_0) = (m_0 - a)(m_0 - b)(m_0 - c)(m_0 - d)(h(m_0),$$

adică numărul 7 se descompune într-un produs de cel puţin patru factori distincţi, absurd.

60. Fie $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$.
Considerăm $m = f(a)$ şi $n = a$ atunci $f(m + n) = f(f(a) + a) = a_0(f(a) + a)^n +$
$+ a_1(f(a) + a)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(f(a) + a) + a_n = \mathcal{M}f(a) + a_0a^n + a_1a^{n-1} +$
$+ \ldots + a_{n-1}a + a_n = \mathcal{M}f(a) + f(a) \Rightarrow f(a) | f(f(a) + a)$ iar $f(m + n) =$
$= f(f(a) + a) = \mathcal{M}a + a_0\overset{n}{f(a)} + a_1\overset{n-1}{f(a)} + \ldots + a_{n-1}f(a) + a_n = \mathcal{M}a +$
$+ f(f(a) = \mathcal{M}_1a \Rightarrow a | f(f(a) + a)$.

61. Fie $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$.
Să presupunem că P are rădăcină întreagă x_0 atunci $P(a) - P(x_0) = P(b) - P(x_0) = P(c) - P(x_0) = 1$ și deci 1 se divide cu $a - x_0$, $b - x_0$, $c - x_0$, care sînt diferite, absurd.
(evident $P(m) - P(n) \vdots m - n$).

62. Presupunem că f are o rădăcină $x_0 \in \mathbf{Z}$, deci $f(x_0) = 0 \Rightarrow f = (X - x_0)g$. Fie $f(a) = (a - x_0)\, g(a)$ și $f(b) = (b - x_0)\, g(b)$ și cum unul din numerele $a - x_0$, $b - x_0$ este par (deoarece unul din numerele a, b este par) rezultă că $f(a)$ sau $f(b)$ este par, contradicție.

Fie $x_0 = \frac{p}{q}$ rădăcină rațională, atunci $q \mid a_0 \Rightarrow q$ impar.
Din $f(x_0) = 0 \Rightarrow f = (qx - p)g \Rightarrow f(a) = (qa - p)g(a)$ și $f(b) = (qb - p)g(b)$ și cum $qa - p + qb - p = q(a + b) - 2p$ este impar rezultă că unul din numerele $qa - p$ sau $qb - p$ este par deci $f(a)$ sau $f(b)$ este par, contradicție.

63. Să presupunem că există $x_0 \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(x_0) = 0 \Rightarrow f = (X - x_0)g \Rightarrow f(k) = (k - x_0)g(k)$ și $f(k + 1) = (k + 1 - x_0)g(k + 1)$ dar cum cel puțin unul din numerele consecutive $k - x_0$ și $k - x_0 + 1$ este par, rezultă că $f(k)$ sau $f(k + 1)$ este par, absurd.

64. Presupunem că f are o rădăcină rațională $x_0 = \frac{p}{q}$.

Cum $p \mid a_n$ și $q \mid a_0 \Rightarrow p$ și q impari.
Din $P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a^n$ — impar și $a_0 + a_n$ par rezultă $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ — impar.
Din $P(x_0) = 0 = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^k$ și $a_0 p^n + a_n q^n$, par, rezultă $a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} =$ par, deci
$a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_1(p^{n-1} q - 1) + a_2(p^{n-2} q^2 - 1) + \ldots + a_{n-1}(p q^{n-1} - 1)$ — impar, absurd (deoarece $p^k q^m - 1$ sînt pare).

65. Fie $x_0 = \frac{p}{q}$ rădăcină rațională $\Rightarrow f(X) = (qX - p)g(X) \Rightarrow$

$|f(a)| = |qa - p|\ |g(a)| = 1$ și
$|f(b)| = |qb - p|\ |g(b)| = 1 \Rightarrow |qa - p| = 1$ și $|qb - p| = 1$.

Eliminînd situațiile neconvenabile rezultă (1) $qa - p = 1$ și $qb - p = -1$ sau (2) $qa - p = -1$ și $qb - p = 1$.
Din (1) sau (2) rezultă $q(a - b) = 2 \Rightarrow a - b \mid 2 \Rightarrow |a - b| \leqslant 2$.

Fie $x_0 = \frac{p}{q}$ și $x_1 = \frac{u}{v}$, distincte. Obținem relațiile omoloage cu (1) și (2) din care rezultă $qa - p = va - u$ (3) $\Rightarrow$ $a(q - v) = p - u$ și $b(q - b) = p - u$ $\Rightarrow a = b$ sau $\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$, contradicție. Se poate obține o relație de forma
$a(q + v) = p + u$ și $b(q + v) = p + u$ din care rezultă tot o contradicție.

66. Fie $x_0 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $f(x_0) = 0 \Rightarrow f = (x - x_0)g(X)$
$f(0) f(1) \ldots f(n) = (-x_0)(1 - x_0) \ldots (n - x_0)\, g(0)\, g(1) \ldots g(n) =$
$= (-x_0)(1 - x_0) \ldots (n - x_0)k.$
a) Dacă $x_0 \in \{0, 1, \ldots n\} \Rightarrow f(0) f(1) \ldots f(n) = 0 \vdots (n + 1)!$.

b) Dacă $x_0 > n$, atunci $f(0)\,f(1)\,\ldots\,f(n) = (-1)^{n+1}x_0(x_0-1)\,\ldots$
$\ldots\,(x_0-n)k = (-1)^{n+1}k\cdot A_{x_0}^{n+1} = (-1)^{n+1}k\cdot(n+1)!\,C_{x_0}^{n+1} : (n+1)!$.

c) Dacă $x_0 < 0$, atunci

$$f(0)\,f(1)\,\ldots\,f(n) = k\cdot A_{n-x_0}^{n+1} = k(n+1)!\,C_{n-x_0}^{n+1}(n+1)!.$$

67. Efectuînd în b) substituţia $X \to X-2$ rezultă $f(X-1) =$
$= Xg(X+1) - 1 \Rightarrow f(X-1) = Xg(X+1) - 1$ care înlocuită în a) dă:

$$Xg(X+1) = X^2 \Rightarrow g(X) = X-1,\ f(X) = (X+1)^2 - 1.$$

68. $f(f(x)) - g(g(X)) = f(f(X)) - f(g(X)) + g(f(X)) - g(g(X)) =$
care evident este divizibil cu $f-g$.
Deoarece $f(f(X)) - f(g(X)) : f-g$ şi $g(f(X)) - g(g(X)) : f-g$.

69. Considerăm polinomul $g(X) = f(X) - f(-X)$ care este de grad cel mult 5. Avem $g(a) = g(-a) = g(b) = g(-b) = g(c) = g(-c) = 0$, numerele $a, -a, b, -b, c, -c$, fiind distincte după cum rezultă uşor din datele problemei. Rezultă deci că g are cel puţin 6 rădăcini. Cum grad $g \leqslant 5$ urmează că g este polinomul identic nul, adică $f(X) = f(-X)$.

70. Fie $f = (X-a_1)(X-a_2)\,\ldots\,(X-a_n)g + h(X)$, grad $h = k < m$. Dacă resturile împărţirii lui f la $X-a_k$ sînt egale cu r, atunci
$(*)$ $f(a_1) = h(a_1) = r$, $f(a_m) = h(a_m) = r$, atunci polinomul $h-r$ are m rădăcini distincte, deci $h =$ constant.
Reciproc, dacă $h = c$ — constant, atunci din identitatea $(*)$ rezultă: $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_m) = c$, adică resturile împărţirii lui f la $X-a_k$ sînt egale.

71. Avem $f_{2m} - C_m^1 c f_{2m-1} + C_m^2 c^2 f_{2m-2} - \ldots\, C_m^m(-c)^m f_m = (c-Z)^{2m} -$
$- C_m^1 c(c-Z)^{2m-1} + C_m^2 c^2(c-Z)^{2m-2} - \ldots + C_m^m(-c)^m(C-Z)^m - [Z^{2m} -$
$- C_m^1 c Z^{2m-1} + C_m^2 c^2 Z^{2m-2} - \ldots + C_m^m(-c)^m Z^m] = (c-Z-c)^m(c-Z)^m -$
$- (Z-c)^m Z^m = 0$ q.e.d.

72. a) Fie $X^n + 4 = f\cdot g$ unde grad $f = p < n$ şi grad $g = q < n$. Evident orice rădăcină a polinoamelor f sau g este şi rădăcină a polinomului $X^n + 4$, deci au modulul $\sqrt[n]{4}$.
Din relaţiile lui Viète rezultă că produsul rădăcinilor polinoamelor f sau g sînt numere raţionale, deci $(\sqrt[n]{4})^p$ şi $(\sqrt[n]{4})^q$ sînt numere raţionale de unde rezultă că $n/2p$ şi $n/2q \Rightarrow p = q = \frac{n}{2}$, adică $n =$ par. Dacă $\frac{n}{2}$ este impar, atunci polinoamele f şi g au cel puţin cîte o rădăcină reală (au grade impare), deci $X^n + 4$ are cel puţin două rădăcini reale — absurd.
Prin urmare $\frac{n}{2}$ par, adică n multiplu de 4.
Reciproc, dacă $n = 4k$, atunci $X^{4k} + 4 = X^{4k} + 4X^{2k} + 4 - 4X^{2k} =$
$= (X^{2k}+2)^2 - (2X^k)^2 = (X^{2k} + 2X^k + 2)(X^{2k} - 2X^k + 2)$.

b) Dacă $n = 2k$, atunci $X^{4k} + 9X^{2k} + 81 = X^{4k} + 18X^{2k} + 81 -$
$- 9X^{2k} = (X^{2k}+9)^2 - (3X^k)^2 = (X^{2k} + 3X^k + 9)(X^{2k} - 3X^k + 9)$.
Reciproc: fie $X^{2n} + 9X^n + 81 = g\cdot f$ unde $f, g \in \mathbf{Z}[X]$.
Deoarece $X^{2n} + 9X^n + 81 = (X^n - Z_0)(X^n - \bar{z}_0)$, (unde $z_0 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$),
rezultă că rădăcinile polinomului dat au acelaşi modul, $|z_0|^{\frac{1}{n}} = 9^{\frac{1}{n}}$. Evident produsul rădăcinilor polinoamelor f şi g sînt numere raţionale. Dacă grad

$f = p$ și grad $g = q$ atunci $9^{\frac{p}{n}}$ și $9^{\frac{q}{n}}$ sau $3^{\frac{2p}{n}}$ și $3^{\frac{2q}{n}}$ sînt numere raționale $\Rightarrow n|2p$ și $n|2q \Rightarrow p = q = \frac{n}{2}$ de unde rezultă ca n este par.

G.M. 11–12/1989

73. Evident 1 este rădăcină multiplă de ordinul $p + q$ pentru g și de ordinul n pentru f și -1 este rădăcină de ordinul $\left[\frac{n}{2}\right]$ pentru f și de ordinul $\left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right]$ pentru g, dar cum $\left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right] \leqslant \left[\frac{p+q}{2}\right] \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ rezultă că ordinul de multiplicitate al lui -1 în g este mai mic decît ordinul de multiplicitate în f.

Fie α o rădăcină de ordinul k a unității, atunci ordinul ei de multiplicitate în f este $\left[\frac{n}{k}\right]$ iar în g este $\left[\frac{p}{k}\right] + \left[\frac{q}{k}\right]$ dar $\left[\frac{p}{k}\right] + \left[\frac{q}{k}\right] \leqslant \left[\frac{p+q}{k}\right] \leqslant \left[\frac{n}{k}\right]$ s.a.m.d., deci $g|f$.

74. a) Dacă n este impar se arată că $f \vdots X^2 + X + 1$, iar dacă n este par atunci $f \vdots X^2 - X + 1$.

b) f nu poate avea rădăcini reale pozitive. Arătăm că f nu poate avea nici rădăcini negative.

Numărul rădăcinilor negative (reale) ale lui f este egal cu numărul rădăcinilor reale pozitive ale lui $g(X) = f(-X) = (X^4 + 1)^n - X^{2n+3}$.

Arătăm că g nu are rădăcini pozitive.

Fie $x_0 \in (0, \infty)$. Dacă $x \in (0, 1) \Rightarrow (x_0^4 + 1) > x_0^{4n} + 1$, deci

$$g(x_0) = (x_0^4 + 1)^n - x_0^{2n+3} > x_0^{4n} - x_0^{2n+3} + 1 = t^2 - x_0^3 t + 1 > 0.$$

$$\Delta = x_0^6 - 4 < 0.$$

Dacă $x_0 \in (1, \infty) \Rightarrow (x_0^4 + 1)^n > x_0^{4n}$, $(n \geqslant 2,\ x_0 > 0) \Rightarrow g(x_0) = (x_0^4 + 1)^n - x_0^{2n+3} > x_0^{4n} - x_0^{2n+3} > 0$ (deoarece $x_0^{2n} > x_0^3$), deci $g(x_0) \neq 0$.

Altfel cum grad $f =$ par rezultă că dacă f are o rădăcină reală atunci el mai are cel puțin încă o rădăcină reală. (negative).

Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, deci

$$0 = f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) f'(c), \text{ dar } f'(c) = 4c^3 n(c^4 + 1)^{n-1} + (2n + 3)c^{2n+2} \Rightarrow \text{deci trebuie ca } 4n(c^4 + 1)^{n-1} + c(2n + 3)c^{2n-2} = 0$$

$$4n(c^4 + 1)^{n-1} = -c(2n + 3)c^{2n-2} \text{ egalitate imposibilă pentru } c > 0.$$

G.M. 6/1985

75. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ se constată ușor ca $f(a) - f(b)$ se divide cu $a - b$.

Avem $2\left[a_0 + a_2 + \ldots + a_{2\left[\frac{n}{2}\right]}\right] = f(1) + f(-1) = f(-1)$

$$2[a_1 + a_3 + \ldots + a_n - u_n] = f(1) - f(-1) = -f(-1).$$

De asemenea $f(4) - f(-1)$ se divide cu $4 - (-1) = 5$ adică $f(-1) \vdots 5$,

$f(16) - f(-1) \vdots 17$ și deci $f(-1)$ se divide cu $5 \cdot 17 = 85$.

G.M. 8/1982

76. Fie α o rădăcină întreagă pentru f. Se observă că α nu face parte dintre numerele $x+1, x+2, \ldots x+k$ întrucît acestea nu sînt divizibile prin k. Există printre numerele $x+1, \ldots x+k$ unul care dă același rest la împărțirea prin k ca și α; fie acesta $x+i$.

Atunci $f(\alpha)-f(x+i)$ se divide cu $\alpha-(x+i)$ care la rîndul său se divide cu k. Rezultă că $f(\alpha)-f(x+i) \vdots k$ adică $f(x+i) \vdots \alpha$.

Contradicția obținută arată că f nu poate avea rădăcini întregi.

G.M. 9–10/1982

77. Fie $\alpha=\frac{p}{q}$ rădăcină a unui polinom cu coeficienți întregi în care coeficientul termenului de grad maxim este egal cu 1 și să presupunem $(p, q)=1$ și $|q| \neq 1$. α satisface o relație de tipul:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Înmulțind această relație cu q^n deducem

$p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n = 0$ de unde obținem

$q \mid p^n$ și cum $|q| \neq 1$ rezultă $(p, q) \neq 1$, contradicție.

78. Fie $Q(X) = -1 + \prod_{k=0}^{n-1} P(X^{p^k})$. Deoarece $Q \in \mathbf{R}[X]$ este suficient să demonstrăm că $Q(i)=0$. Avem $P(X)=\frac{X^p-1}{X-1}$ și $\prod_{k=0}^{n-1} P(X^{p^k}) =$

$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(X^{p^k})^p-1}{X^{p^k}-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{X^{p^{k+1}}-1}{X^{p^k}} = \frac{X^{p^n}-1}{X-1}$ și atunci

$Q(X) = -1 + \frac{X^{p^n}-1}{X-1} = \frac{X^{p^n}-X}{X-1}$. Deoarece p este număr prim mai mare decît 2, p este impar și cum n este par deducem că $p^n \equiv 1 \pmod 4$, deci $Q(i) = \frac{i-i}{i-1} = 0$.

79. Înmulțind cu X cele două polinoame deducem că divizibilitatea celor două polinoame are loc dacă și numai dacă $X^m + C_m^1 X^{m-1} + \ldots + C_m^{m-1} X$ divide $X^n + C_n^1 X^{n-1} + \ldots C_n^{n-1} X$ adică numai dacă

$(X+1)^m - 1$ divide $(X+1)^n - 1$ care este echivalent cu faptul că $X^m - 1$ divide $X^n - 1$. Dacă m este divizor al lui n atunci în mod evident $X^m - 1$ divide $X^n - 1$.

Să presupunem că $X^m - 1$ divide $X^n - 1$ și fie α o rădăcină primitivă de ordinul m a unității. Putem lua $\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + i \sin\frac{2\pi}{m}$.

Atunci $\alpha^n - 1 = 0$ adică $\cos\frac{2n\pi}{m} + i\sin\frac{2n\pi}{m} = 1$, de unde se deduce imediat că m divide pe n.

G.M. 8/1982

80. Rădăcinile polinomului g sînt rădăcinile polinomului $h = X^{n+1} - 1$ adică rădăcinile de ordinul $n+1$ ale unității fără valoarea $x=1$

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\ k = \overline{1, n}.$$

Dacă $f \vdots g \Rightarrow f(x_k) = 0$ adică $f_1(x_k^{n+1}) + x_k f_2(x_k^{n+1}) + \ldots + x_k^{n-1} f_n(x_k^{n+1}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f_1(1) + x_k f_2(1) + \ldots + x_k^{n-1} f_n(1) = 0$ pentru $k = \overline{1, n}$.
Aceste relaţii reprezintă un sistem liniar omogen în necunoscutele $f_k(1)$, are determinantul de tip Vandermonde, care este nenul deoarece $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$. Prin urmare sistemul admite soluţia banală $f_k(1) = 0$, $k = \overline{1, n} \Rightarrow f_k \vdots X - 1$. Reciproc: dacă $f_k \vdots X - 1 \Rightarrow f_k(1) = 0$, fie x_k o răd. de ordinul $n + 1$ a unităţii, diferită de 1, atunci $f_k(x_k^{n+1}) = f(1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_k) = 0 \text{ deci } f \vdots \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \Leftrightarrow f \vdots g.$$

81. Fie $f = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$, $g = \prod_{j=1}^{m} (X - b_j)$; $\prod_{j=1}^{m} f(b_j) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (b_j - a_i) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (-1)(a_i - b_j) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (a_i - b_j) =$$

$$= (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{n} g(a_i). \text{ Rezultă că } \frac{\prod_{i=1}^{m} f(b_i)}{\prod_{i=1}^{n} g(a_i)} = (-1)^{mn}.$$

82. Fie $h = f - g$, $h \in \mathbf{R}[X]$. Avem $h(a) \cdot h(b) = [f(a) - g(a)][f(b) - g(b)] = [f(a) - f(b)][f(b) - f(a)] = -[f(a) - f(b)]^2 \leqslant 0$. Rezultă că ecuaţia $h(x) = 0$ are cel puţin o soluţie.

83. Pentru $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

$f(-2k) = (-2k + 1)(-2k + 3) \ldots (-1)\, 1 \ldots [2(n - k) + 1]$
$f(-2k - 2) = (-2k - 1)(-2k + 1) \ldots (-1)\, 1 \ldots [2(n - k) - 1]$
$f(-2k) \cdot f(-2k - 2) = (-2k - 1)\{-2k + 1) \ldots [2(n - k) - 1]\}^2$
$[2(n - k) + 1] < 0$.
Rezultă că polinomul are cel puţin o rădăcină în intervalul $(-2k - 2, -2k)$, $k = \overline{0, n - 1}$ adică f are cel puţin n rădăcini reale. Cum f are gradul $n + 1$ rezultă că f are toate rădăcinile reale deoarece nu poate avea numai o rădăcină complexă.

84. Pentru $n = 1, f = \frac{1 - X}{1!}$, pentru $n = 2, f = \frac{1 - X}{1!} + \frac{X(X - 1)}{2!} =$

$$= \frac{(1 - X)(2 - X)}{2!}.$$

Presupunem că pentru $n = k$, $f = \frac{(1 - X)(2 - X) \ldots (k - X)}{k!}$.

Pentru $n = k + 1$, $f = 1 - \frac{X}{1!} + \ldots (-1)^k \frac{X(X - 1) \ldots (X - k + 1)}{k!} +$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{X(X - 1) \ldots (X - k + 1)(X - k)}{(k + 1)!} = \frac{(1 - X)(2 - X) \ldots (k - X)}{k!} -$$

$$- \frac{X(1 - X) \ldots (k - 1 - X)(k - X)}{(k + 1)!} = \frac{(1 - X) \ldots (k - X)(k + 1 - X)}{(k + 1)!} \text{ rezultă că}$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \quad f = \frac{(1 - X)(2 - X) \ldots (n - X)}{n!}.$$

85. În $f(x)$ se minorează coeficienții de indice par, obținîndu-se

$$f \geqslant X^{2n} + a_1X^{2n-1} + \frac{a_1^2 + a_3^2}{4} X^{2n-2} + a_3X^{2n-3} + \frac{a_3^2 + a_5^2}{4} X^{2n-2} +$$

$$+ a_5X^{2n-5} + \ldots + \frac{a_{2n-3}^2 + a_{2n-1}^2}{4} X^2 + a_{2n-1}X + 1 = X^{2n-2}\left(X + \frac{a_1}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{a_3^2}{4} X^2 + a_3X + \frac{a_3^2}{4}\right) X^{2n-4} + X^{2n-6}\left(\frac{a_5^2X^2}{4} + a_5X + \frac{a_5^2}{4}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{a_{2n-1}}{4} X + 1\right)^2$$ Deoarece $\Delta = a_{2p+1}^2(4 - a_{2p+1}^2) \leqslant 0$ rezultă că $(\forall)\ x \in \mathbf{R},\ f(x) \geqslant 0.$

G.M. 1/1983

86. Observăm că: $f(\pm 1) = f(\pm 2) = 14.$

Pentru $x = \pm 1$ și $x = \pm 2$ obținem $f_1(14) \pm f_2(14) + f_3(14) = 0$

$$f_1(14) \pm 2f_2(14) + 4f_3(14) = 0.$$

Scăzînd relațiile obținute rezultă, $\pm f_2(14) + 3f_3(14) = 0$, de unde $f_3(14) = f_2(14) = 0$. Rezultă și $f_1(14) = 0$, adică $x = 14$ rădăcină comună pentru ecuațiile din enunț.

G.M. 4/1988

87. Dacă $f = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ este un polinom cu coeficienți nenegativi atunci pentru fiecare x real, aplicînd inegalitatea Cauchy—Buniakovski avem:

$$f^2(x) = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{a_k} \cdot \sqrt{a_k}x^k)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} a_kx^{2k}\right) = f(1) \cdot f(x^2).$$ Adică:

$$f^2(x) \leqslant f(1)f(x^2).$$

Dar $f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+1} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$

Rezultă $f^2(x) < f(x^2)$ adică ecuația dată nu are soluții reale.

R.M.T. 1—2/1989

88. I. a) Presupunem $f(x) = f(-x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{C}$.

Dacă x_1 este o rădăcină a polinomului $f(x_1) = 0 \Rightarrow f(-x_1) = f(x_1) = 0.$

Deci, dacă polinomul admite rădăcina x_1 o admite și pe $-x_1$, rezultă că f are gradul $2n$ (adică par) și $x_i, -x_i$, $i = \overline{1, n}$ rădăcinile polinomului. Rezultă:

$$f(x) = a_{2n}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)(x + x_i).$$ Notăm $g(x) = b\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = b^2g(x) \cdot g(-x) = b^2\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)(-x - x_i) =$$

$$= (-1)^nb^2\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)(x + x_i)$$ rezultă $b^2 = (-1)^na_{2n}.$

b) Dacă $f(x) = g(x) \cdot g(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$, deci funcția polinomială este pară.

II. Dacă $f(-x) = -f(x)$, adică funcția asociată este impară. Rezultă

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = xf_1(x)\ (\forall)\ x \in \mathbf{C}$$

şi $f_1(x) = f_1(-x) \Rightarrow f_1(x) = g(x) \cdot g(-x) \Rightarrow f(x) = xg(x) \cdot g(-x)$.
Dacă $f(x) = xg(x) \cdot g(-x) \Rightarrow f(-x) = -xg(-x)\,g(x) = -f(x)$,
adică funcţia asociată este impară.

89. Fie $x_j = a_j + ib_j$ şi $x_{j+k} = a_j - ib_j$, $j = \overline{1, k}$, $2k \leqslant n$, rădăcinile complexe ale polinomului f.

Rezultă $f = a_n \prod_{j=1}^{k} (X - a_j - ib_j) \prod_{j=k+1}^{2k} (X - a_j + ib_j) \cdot \prod_{j=2k}^{n} (X - x_j)$ (x_j pentru $j = \overline{2k, n}$ sînt rădăcinile reale ale polinomului f).

Rezultă că $f = a_n \prod_{j=1}^{k} [(X - a_j)^2 + b_j^2] \prod_{j=2k}^{n} (X - x_j)$, rezultă că:

deoarece un produs de polinoame cu coeficienţi reali este un polinom cu coeficienţi reali, rezultă că

$$F = \prod_{j=1}^{k} [X - a_j)^2 + b_j^2] \prod_{j=2k}^{n} (X - x_j) \in \mathbf{R}[X].$$

G.M. 12/1983

90. Fie gruparea de $n - 1$ polinoame $f_2, f_3, \ldots, f_n$. Cu aceste polinoame se pot forma C_{n-1}^{n-2} grupări de $n - 2$ polinoame. Dacă f_1 are aceeaşi rădăcină comună cu două asemenea grupări (ex.: $f_2, f_4, \ldots, f_n$ şi $f_3, f_4, \ldots, f_n$) rezultă că cele n polinoame au o rădăcină comună. În caz contrar, rezultă că f_1 are $C_{n-1}^{n-2} = n - 1$ rădăcini, ceea ce este imposibil, deoarece gradul lui f_1 este $n - 2$.

Rezultă că polinoamele $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au o rădăcină comună.

G.M. 1/1983

91. Dacă $f = k$, $k \in \mathbf{R}$, atunci $g \in \mathbf{R}[X]$. Dacă $g = k$, atunci $f \in \mathbf{R}[X]$. Pentru f şi g neconstante, fie $n = \operatorname{grad} f$ şi $p = \operatorname{grad} g$.
Rezultă gradul $(f \circ g) = n \cdot p$.
Dacă produsul np este par atunci $f \cdot g$ nu este monotonă deoarece la $-\infty$, şi $+\infty$ ia valori infinite, de acelaşi semn. Rezultă n şi p impare. Dacă f are mai mult de o rădăcină reală, cum $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, rezultă că $f \circ g$ nu este monotonă, deoarece pentru $g_1 < g_2$ şi $f(g_1) = f(g_2) = 0$, ar rezulta că $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in [g_1, g_2]$, deci $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Cum f este neconstantă rezultă

$f(x) = a(x - b)^n$, $a, b \in \mathbf{R}$. Deci $f \circ g = a(g - b)^n$, $n \in 2\mathrm{N} + 1$.

Dacă g are mai mult de o rădăcină $f \circ g$ nu este monotonă deoarece pentru $g(x_1) = g(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$, ar rezulta $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) = a(-b)^n$ $(\forall)$ $x \in [x_1, x_2]$ deci $(f \circ g)(x)$ este constantă pe $\mathbf{R}$, de unde rezultă că şi $g(x)$ este constantă pe $\mathbf{R}$, ceea ce contrazice ipoteza.
Rezultă că g are o rădăcină adică $g(x) = c(x - d)^p$, $c, d \in \mathbf{R}$.
Rezultă $h(x) = (f \circ g)(x) = a[c(x - d)^p - b]^n$

$$h'(x) = na[c(x - d)^p - b]^{n-1} \cdot cp(x - d)^{p-1}.$$

Pentru $ac > 0 \Rightarrow h'(x) \geqslant 0$, deci funcţia h este crescătoare.
Pentru $ac < 0 \Rightarrow h'(x) \leqslant 0$, deci funcţia h este descrescătoare.

92. Fie x_i, $i = \overline{1, n}$ rădăcinile ecuației. Cum $x_i \in (-1, 1)$ considerăm $x_i = \cos 2\alpha_i$, $i = \overline{1, n}$. Rezultă $f(X) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (X - \cos 2\alpha_i)$. Rezultă

$$f(1) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \cos 2\alpha_i) = 2^n a_0 \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i$$

$$f(1) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + \cos 2\alpha_i) = 2^n a_0 \prod_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + = f(1) - (-1)^n f(-1) = a_0 2^n \left(\prod_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i - \prod_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \right)$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = f(1) + (-1)^n f(-1) = a_0 2^n \left(\prod_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i + \prod_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \right).$$

Dar

$$-1 < \frac{\prod_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i}{\prod_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots}{a_2 + a_4 + a_6 + \ldots} < 1.$$

G.M. 5–6/1988

93. I. Determinăm funcțiile polinomiale injective.

a) $f \in \mathbf{R}[X]$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Dacă f are mai mult de o rădăcină, funcția f nu este injectivă.
Rezultă $f = a(X + b)^n$, $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$.
Dacă n este par funcția nu este injectivă deoarece pentru $\alpha \in \mathbf{R}^+$

$$f(\alpha - b) = f(-\alpha - b) = a\alpha^n.$$

Rezultă $f = a(X + b)^n$, $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$, $n \in 2\mathbf{N} + 1$.

b) $f \in \mathbf{C}[X]$, $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Deoarece $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ luăm

$$f = a(X + b)^n, \; a \in \mathbf{C}_1^*, \; b \in \mathbf{C}, \; n \in 2\mathbf{N} + 1.$$

Pentru $n \geqslant 3$ luăm $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{C} - \{1\}$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n$.
Rezultă $f(\varepsilon_1 - b) = f(\varepsilon_2 - b) = a$.
Rezultă $n = 1$ și $f = aX + b$, $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$.

II. Deoarece funcțiile determinate la punctele a) și b) sînt evident surjective rezultă că sînt bijective.

94. Observăm că dacă $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}[X]$

$$(f_1^2 + f_2^2)(f_3^2 + f_4^2) = (f_1 f_3 - f_2 f_4)^2 + (f_1 f_4 - f_2 f_3)^2.$$

Cum $f(x) \geqslant 0$ rezultă că $f(x) = g^2(x) \prod_{k=1}^{n} [(a_k x + b_k)^2 + a_k^2]$.
Se arată prin inducție că

$$\prod_{k=1}^{n} [(a_k x + b_k)^2 + c_k^2] = h^2(x) + l^2(x).$$

Deci $f = (gh)^2 + (gl)^2$.

95. Presupunem $f = g \cdot h$, unde $g, h \in \mathbf{Z}[X]$ $1 \leqslant \operatorname{grad} h \leqslant n-1$ $f(a_i) = -1$ pentru $i = \overline{1,n}$ implică $g(a_i) \cdot h(a_i) = -1$ ptr. $i = \overline{1,n}$, de unde $g(a_i) = \pm 1$ și $h(a_i) = \pm 1$, adică $g(a_i) + h(a_i) = 0$ ptr. $i = \overline{1,n}$. Cum polinomul $h + g$ are gradul mai mic decît n rezultă că

$$g(x) + h(x) = 0 \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \text{ adică } g = -h.$$

Rezultă $f = -g^2$ ceea ce este imposibil deoarece primul coeficient al lui f este pozitiv. Rezultă că f este ireductibil pe $\mathbf{Z}[X]$.

96. Fie $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1 = P(x)\,Q(x)$. Avem $P(a_1)\,Q(a_1) = 1$, $P(a_1)$, $Q(a_1) \in \mathbf{Z}$, deci $P(a_1) = 1$, $Q(a_1) = 1$ sau $P(a_1) = Q(a_1) = -1$. În ambele cazuri $P(a_1) - Q(a_1) = 0$. Analog se arată că $P(a_2) - Q(a_2) = P(a_3) - Q(a_3) = \ldots = P(a_n) - Q(a_n) = 0$. Polinomul $P - Q$ are gradul cel mult $n-1$ și are n rădăcini distincte, deci este identic nul, i.e. $P = Q$.

Atunci $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1 = P^2(x)$, deci n este par, $n = 2k \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2k}) = (P(x)-1)(P(x)+1)$, $P(x)-1$, $P(x)+1$ au ambele gradul k. De aici rezultă că $P(x) - 1$ se anulează pentru k din valorile $a_1, a_2, \ldots a_{2k}$ iar $P(x) + 1$ pentru celelalte.

Mai mult obținem că:

$$(1)\ \begin{cases} P(x)+1 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k) & \text{iar} \\ P(x)-1 = (x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\ldots(x-a_{2k}) & \text{sau} \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} P(x)+1 = -(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k) & \text{și} \\ P(x)-1 = -(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\ldots(x-a_{2k}). & \end{cases}$$

Cum ambele cazuri se tratează analog putem considera numai cazul (1).

Scăzînd din prima relație pe cea de a doua obținem:

$$2 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k) - (x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\ldots(x-a_{2k}) \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x = a_1$ obținem $2 = (a_1-a_{k+1})(a_1-a_{k+2})\ldots(a_1-a_{2k})$.

Cum numerele $a_1 - a_{k+1}, \ldots, a_1 - a_{2k}$ sînt distincte, iar 2 se poate scrie ca produsul a cel mult trei factori distincți $2 = (-1)\cdot 1(-2)$, obținem $k \leqslant 3$. Considerăm mai întîi *cazul* $k = 3$. Avem

$$2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) - (x-a_4)(x-a_5)(x-a_6). \qquad (*)$$

Putem presupune $a_1 < a_2 < a_3$, $a_4 < a_5 < a_6$.

Din $(*) \Rightarrow 2 = (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$. Cum $a_4-a_1 > a_4-a_2 > a_4-a_3 \Rightarrow a_4-a_1 = 1$, $a_4-a_2 = -1$, $a_4-a_3 = -2$.

Tot din $(*) \Rightarrow 2 = -(a_1-a_4)(a_1-a_5)(a_1-a_6)$ și cum

$$a_1-a_4 > a_1-a_5 > a_1-a_6 \Rightarrow a_1-a_4 = 2,\ a_1-a_5 = 1$$

$a_1 - a_6 = -1$ și am ajuns la o contradicție căci $a_4 - a_1 = 1$ și pe de altă parte $a_1 - a_4 = 2$.

Au mai rămas de examinat cazurile $k = 1$, $k = 2$.

Cazul $k = 1$. Avem $2 = (x-a_1) - (x-a_2) \Rightarrow a_2 = a_1 + 2$.

Atunci $(x-a_1)(x-a_1-2)+1 = (x-a_1)^2 - 2(x-a_1)+1 = (x-a_1-1)^2$,

deci pentru $n = 2$ este suficient ca $a_2 = a_1 + 2$ pentru ca problema să aibă soluție.

Cazul $k = 2$. $2 = (x - a_1)(x - a_2) - (x - a_3)(x - a_4)$ $(**)$.

Putem presupune $a_1 < a_2$, $a_3 < a_4$. Luînd $x = a_1$ în $(**)$

$2 = -(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)$, $a_1 - a_3 > a_1 - a_4$, deci $\begin{cases} a_1 - a_3 = -1 \\ a_1 - a_4 = -2 \end{cases}$ sau

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 2 \\ a_1 - a_4 = -1 \end{cases}.$$

Luînd $x = a_2$ în $(**)$, $2 = -(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)$, $a_2 - a_4 > a_1 - a_4$ și ținînd seama de faptul că $a_2 - a_3 > a_1 - a_3$ obținem:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = a_1 - 1 \\ a_2 - a_3 = 2 \\ a_1 - a_4 = -2 \Rightarrow a_4 = a_1 + 2 \\ a_2 - a_4 = -1 \Rightarrow a_2 = a_4 - 1 = a_1 + 1, \text{ atunci } (x - a_1)(x - a_2)(x - \\ - a_3)(x - a_4) = (x - a_1)(x - a_1 - 1)(x - a_1 + 1)(x - a_1 - 2) + 1 = \\ = [(x - a_1)^2 - 2(x - a_1)]\,[(x - a_1)^2 - 1] + 1 = (x - a_1)^4 - 2(x - a_1)^3 - \\ - (x - a_1)^2 + 2(x - a_1) + 1 = [(x - a_1)^2 - (x - a_1) - 1]^2. \end{cases}$$

Deci în cazul $k = 2$, condițiile suficiente sînt $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 - 1$, $a_4 = a_1 + 2$.

97. Presupunem $f = g \cdot h$, unde $g, h \in \mathbf{Z}[X]$, $1 \leqslant \operatorname{grad} h \leqslant n \leqslant \operatorname{grad} g \leqslant 2n - 1$. Deoarece $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$., rezultă că g și h nu au rădăcini reale deci își păstrează semnul pe $\mathbf{R}$. Presupunem $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Cum $f(a_i) = g(a_i)\, h(a_i) = 1$ rezultă $g(a_i) = g(a_i) = 1$, pentru $i = \overline{1, n}$. Dacă $\operatorname{grad} h < n < \operatorname{grad} g$ rezultă că h este polinomul constant ceea ce nu convine deoarece $\operatorname{grad} h \geqslant 1$, deci $\operatorname{grad} h = n = \operatorname{grad} g$. Rezultă $h = \alpha(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) + 1$

$$g = \beta(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) + 1 \text{ unde } \alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*.$$

Deci $f = gh$ rezultă $\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ sistem care nu are soluții numere întregi.

Rezultă că polinomul f este ireductibil peste $\mathbf{Z}[X]$.

98. $X - \frac{n}{m} \mid f \Rightarrow mX - n \mid mf$. Deci:

$$(1) \quad mf(x) = (mx - n)\, g(x) \quad (\forall) \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$ există $p \in \mathbf{Z}$ astfel încît $pg \in \mathbf{Z}[X]$, rezultă

$$mf(x) = \frac{mx - n}{p}\, g(x) \Rightarrow p \mid m \text{ și } p \mid n \Rightarrow p = (m, n) = 1 \Rightarrow g \in \mathbf{Z}[X].$$

Din (1) pentru $k \in \mathbf{Z}$ avem $mf(k) = (mk - n)\, g(k)$ $(m, mk - n) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \mid g(k)$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{Z}$.

Dacă $g = X(X(X \ldots (Xa_0 + a_1) + \ldots + a_{k-2}) + a_{k-1}) + a_k$

$m \mid g(n) \Rightarrow m \mid a_i$, $i = \overline{0, k}$, deoarece $(m, n) = 1$ adică $g_1(x) = \frac{1}{m}\, g(x)$ și $f =$ $= (mX - n)\, g_1(X)$.

99. $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a_0 p^n}{q} = -(a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1}) \in \mathbf{Z}$

sau $\frac{a_n q^n}{p} = -(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \ldots + a_{n-1} q^{n-1}) \in \mathbf{Z}$.

Cum $(p, q) = 1$ ultimele două egalităţi în numere întregi, nu pot avea loc decît dacă $q \mid a_0$ şi $p \mid a_n$.

Dacă $x = \frac{p}{q}$, atunci există $g \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît $f = (qX - p)g$, pentru $x = m \in \mathbf{Z}$ rezultă $f(m) = (qm - p)\, g(x)$, deci $p - qm \mid f(m)$.
Pentru $m = 1$ rezultă $p - q \mid f(1)$, iar pentru $m = -1$ rezultă $p + q \mid f(-1)$.

100. Presupunem că polinomul admite rădăcina raţională $x_0 = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbf{N}^*$ $p \in \mathbf{Z}$, $(p, q) = 1$. Rezultă că există $g \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît

$$f = (qX - p)g.$$

Pentru $x = x_1 \Rightarrow (qx_1 - p)\, g(x_1) = \pm 1$

$x = x_2 \Rightarrow (qx_2 - p)\, g(x_2) = \pm 1$. Cum $qx_1 - p$, $qx_2 - p$, $g(x_1)$, $g(x_2) \in \mathbf{Z}$ rezultă

(*) $qx_1 - p = \pm 1$ şi $qx_2 - p = \pm 1$, care prin scădere rezultă

$$q(x_1 - x_2) = \pm 2, \text{ deoarece } q(x_1 - x_2) \neq 0.$$

Pentru $q \in \mathbf{N}^*$ $(x_1 \neq x_2)$ rezultă $|x_1 - x_2| = \frac{2}{q} \leqslant 2$, deoarece $q > 1$.

Pentru $q = 1$ rezultă $|x_1 - x_2| = 2$. Presupunem $x_1 > x_2$.
Pentru $q = 1$ din relaţiile (*) rezultă $x_1 = p + 1$, $x_2 = p - 1$ de unde $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Deci singura soluţie posibilă este $x_0 = p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

101. Presupunem că polinomul f admite rădăcina $x_1 = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$. În f grupîndu-se termenii, se scoate $nX - m$ factor şi rezultă $f(X) = (nX - m)\, g(X)$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$ (V. prob. 98).
Avem $f^2(a) = (na - m)^2 g^2(a) = 4$, $g(a) \in \mathbf{Z}$

$$(n, na - m) = 1 \Rightarrow |na - m| = k, \text{ unde } k \in \{1, 2\},$$

$f^2(a + 5) = (na - m + 5a)^2 g^2(a + 5) = 4 \Rightarrow (5a \pm 1)^2 g^2(a + 5) = 4$
$\Rightarrow |5a \pm 1| \leqslant 2$ şi $5a \pm 1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow a = 0$ de unde rezultă că $f^2(0) \cdot f^2(5) = 4$ sau $f(0) \cdot f(5) = \pm 2$.
Pentru $f = Xg + c$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$, $c \in \mathbf{Z}$,
rezultă

$$c[5g(5) + c] = \pm 2 \text{ sau } 5cg(5) + c^2 = \pm 2,$$

adică $c^2 = 2$ sau $c^2 = 3$ ceea ce este imposibil deoarece $c \in \mathbf{Z}$.
Rezultă că f nu admite rădăcini raţionale.

G.M. 9/1986

102. Evident $\operatorname{grad} f \leqslant n$ şi $f(a_i) = c_i$ $(\forall)$ $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ deoarece din suma de definiţie a lui f numai termenul cu coeficientul c_i nu se înmulţeşte cu $(X - a_i)$.
Polinomul este unic deoarece dacă $f = b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots b_{n-1} X + b_n$ atunci $f(a_i) = c_i$, pentru $i = \overline{1, n+1}$, constituie un sistem liniar cu $n + 1$

ecuații și $n+1$ necunoscute $b_0, b_1, \ldots, b_n$, sistem care este compatibil determinat, deoarece determinantul sistemului este de tip Vandermonde, deci este diferit de zero pentru $a_i \neq a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$.

103. Rezultă că $f(i) = (-1)^i$, $i = \overline{0, 2n}$.

Folosind formula de interpolare a lui Lagrange avem:

$$a_i = i,\ c_i = f(a_i) = (-1)^i,\ i = \overline{0,2n} \text{ deci}$$

$$f = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)(X-i-1)\ldots(X-2n)}{i(i-1)\ldots 1 \cdot (-1)(-2)\ldots[-(2n-i)]} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)(X-i-1)\ldots(X-2n)}{i!(-1)^{2n-i}(2n-i)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)(X-i-1)\ldots(X-2n)}{(2n)!}.$$

104. Din relația de interpolare Lagrange avem:

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(X-a_1)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})}$$

unde $a_i = k - i$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n+1}$, iar $f(a_i) = c_i \in \mathbf{Z}$, $i = \overline{1, n+1}$.

Observăm că dacă $x \in \mathbf{Z}$ atunci $f(x) \in \mathbf{Z}$, deoarece

$$\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})} =$$

$$= \frac{(x-k+1)\ldots(x-k+i-1)}{(i-1)\ldots(1)} \cdot \frac{(x-k+i+1)\ldots(x-k+n+1)}{(-1)(-2)\ldots[-(n+1-i)]} \in \mathbf{Z}$$

ambele fracții luînd valori întregi, deoarece sînt raportate $i-1$, respectiv $n-i+1$, numere întregi, consecutive la primele $i-1$, respectiv $n-i+1$, numere naturale.

105. Dacă grad $f = n$, rezultă că dacă $g = f(X^2)$, grad $g = 2n$ și g ia valori întregi pentru $2n+1$ valori întregi consecutive:

$$-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Rezultă că g ia valori întregi pentru orice număr întreg (vezi 104) deci f ia valori întregi pentru toate pătratele numerelor naturale.

106. $E = f(x)$, unde f este un polinom de grad cel mult $n-1$. Cum $f(a_1) = f(a_2) + \ldots + f(a_n) = 1$ rezultă că $f(x)$ ia aceeași valoare pentru n valori, deci este constant.

107. Vom demonstra pentru început următoarea:

Lemă: Dacă $f \in \mathbf{Z}[X]$ și $f(0) = 0$, atunci pentru p număr prim suficient de mare polinomul $f + p$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Demonstrație: fie $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X$. Alegem p prim $p > |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ și arătăm că în acest caz $f + p$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$. Să observăm că dacă α este rădăcină a polinomului $f + p$ atunci $|\alpha| > 1$. Într-adevăr din relația

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + p = 0,$$

deducem $p = -a_n\alpha^n - a_{n-1}\alpha^{n-1} \ldots - a_1\alpha$ de unde $p = |p| \leqslant |a_n|\,|\alpha|^n + |a_{n-1}|\,|\alpha|^{n-1} + \ldots + |a_1|\,|\alpha|$. Deci vom avea $|\alpha| \leqslant 1$ obţinem $p \leqslant |a_n| \ldots + |a_1|$ ceea ce contrazice alegerea lui p. Să presupunem că $f + p$ este reductibil în $\mathbf{Z}[X]$. Atunci există $g_1 h \in \mathbf{Z}[X]$, $1 \leqslant \operatorname{grad} g$, $h < n$ a.î. $f(X) + p = g(X)\,h(X)$. Făcînd $X = 0$ obţinem $p = g(0)\,h(0)$. Rezultă că $|g(0)| = 1$ sau $|h(0)| = 1$. Fie $|g(0)| = 1$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ rădăcinile lui g, $k \geqslant 1$.

Evident $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ sînt şi rădăcini ale lui $f + p$ iar $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k = \pm \frac{1}{a}$ unde a este coeficientul termenului de grad maxim al lui g. Rezultă că $|\alpha_1| \ldots |\alpha_k| = \left|\frac{1}{a}\right| \leqslant 1$. Dar pe de altă parte $|\alpha_i| > 1$, $i = \overline{1, k}$ şi deci $|\alpha_1| \ldots |_k\alpha| < 1$ care este o contradicţie.

Revenim la soluţia problemei.

Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Deci grad $f = 0$ sau 1; totul este evident, f va fi suma a două polinoame de gradul 1. Să presupunem că grad $f \geqslant 2$. Conform lemei există $e \in \mathbf{Z}$ a.î. $g(X) = f(X) - X + e$ să fie ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$. Atunci $f(X) = g(X) + (X - e)$ iar polinomul $X - e$ este în mod evident ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

108. Ţinînd cont de ipoteză şi de relaţiile lui Viète deducem că $f = (X + a_1) \ldots (X + a_n)$ cu $a_1, \ldots a_n > 0$ şi $a_1a_2 \ldots a_n = 1$.

Trebuie deci să demonstrăm că $(2 + a_1) \ldots (2 + a_n) \geqslant 3^n$ $(*)$ dacă $a_1a_2 \ldots a_n = 1$ şi $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Vom dovedi că dacă $a_1, \ldots, a_k$ sînt numere pozitive atunci $(2 + a_1) \ldots (2 + a_n) \geqslant (2 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^n$ de unde ineg. $(*)$ va rezulta în mod evident.

Avem $(2 + a_1) \ldots (2 + a_n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \sum a_i, \ldots a_{ik}$ unde a doua sumă se face după toate numerele $i_1, i_2, \ldots i_k$ distincte, elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots n\}$. De asemenea $(2 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} C_n^k (\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^k$.

Este suficient deci să demonstrăm că $\Sigma a_i, \ldots a_{ik} \geqslant C_n^k (\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^k$ folosind inegalitatea mediilor avem

$$\frac{\Sigma a_i, \ldots, a_{ik}}{C_n^k} \geqslant \left[a_1^{C_{n-1}^{k-1}} \ldots a_n^{C_{n-1}^{k-1}}\right]^{\frac{1}{C_n^k}} = a_1^{\frac{k}{n}} \ldots a_n^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^k \quad \text{q.e.d.}$$

109. Deoarece mulţimea numerelor naturale este bine ordonată există în mod evident $f \in \mathbf{Q}[X]$ de grad minim a.î. $f(\alpha) = 0$.

Fie $g \in \mathbf{Q}[X]$ a.î. $g(\alpha) = 0$. Conform teoremei împărţirii cu rest $g(X) = f(X) \cdot c(X) + r(X)$ cu grad $r <$ grad f.

Să presupunem prin absurd că $r \neq 0$. Făcînd $X = \alpha$ în relaţia de mai sus obţinem $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot c(\alpha) + r(\alpha)$ de unde $r(\alpha) = 0$ şi cum grad $r <$ grad f ajungem la o contradicţie.

Observaţii: polinomul f de grad minim cu coeficienţi raţionali cu proprietatea $f(\alpha) = 0$ îl vom numi polinomul minimal al lui α peste $\mathbf{Q}$. Să presupunem că f ar fi reductibil în $\mathbf{Q}[X]$. Atunci avem:

$$f(X) = f_1(X)\,f_2(X) \text{ în } \mathbf{Q}[X] \text{ cu grad } f_1, f_2 < \text{grad } f.$$

Făcînd $X = \alpha$ obţinem $0 = f(\alpha) = f_1(\alpha)\,f_2(\alpha)$ de unde $f_1(\alpha)$ sau $f_2(\alpha)$ este egal cu 0 şi se contrazice alegerea lui f.

110. Să presupunem că $(f, g) = 1$. Atunci există polinoamele $p, q \in \mathbf{Q}[X]$ a.î. $p(X)f(X) + q(X)g(X) = 1$. Înmulțind această relație cu cel mai mic multiplu comun, al numitorilor coeficienților polinoamelor p și q, obținem o relație de tipul $\alpha(X)f(X) + \beta(X)g(X) = a$ cu $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[X]$, $a \in \mathbf{Z}^*$.
Dacă $X = k \in \mathbf{Z}$ deducem că $(f(k), g(k))$ divide pe a și cum mulțimea divizorilor lui a este finită rezultă că $D_{(f,g)}$ este mulțime finită.
Reciproc dacă $D_{f,g}$ este mulțime finită să presupunem că $(f, g) = d \neq 1$ cu $d \in \mathbf{Q}[X]$ și grad $d \geqslant 1$. Atunci $f = d \cdot f'$ și $g = d \cdot g'$ cu $f', g' \in \mathbf{Q}[X]$. Există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}^*$ a.î. $\alpha_1 d \in \mathbf{Z}[X]$, $\alpha_2 f' \in \mathbf{Z}[X]$, $\alpha_2 g' \in \mathbf{Z}[X]$. Notînd $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $d_1 = \alpha_1 d$ și $f_1 = \alpha_2 f'$, $g_1 = \alpha_2 g'$ obținem $\alpha \cdot f = d_1 f_1$ $\alpha g = d_1 g_1$. De aici deducem că $d_1(k)$ divide $\alpha f(k)$ și $\alpha g(k)$ unde $k \in \mathbf{Z}$ și prin urmare $d_1(k)$ divide $(\alpha f(k), \alpha g(k))$. Cum mulțimea $\{d_1(k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ este infinită rezultă că $D_{\alpha f, \alpha g}$ este mulțime infinită, și deoarece $D_{\alpha f, \alpha g} = \alpha D_{f,g}$, rezultă că $D_{f,g}$ este mulțime infinită, contradicție.

G.M. 7/1985

111. Deoarece coeficientul termenului de grad maxim al polinomului $Z^n - 1$ este egal cu 1. Folosind algoritmul împărțirii cu rest pentru polinoame deducem că $P(Z) = Q(Z)(Z^n - 1) + P'(Z)$ unde $Q, P' \in \mathbf{Z}[X]$ și grad $P' <$ grad P, iar polinomul $P'(Z)$ are aceleași proprietăți ca și P. De aceea este suficient să presupunem că grad $P < n - 1$ și să demonstrăm că în acest caz $P(Z) = 0$.
Fie $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ rădăcinile polinomului $Z^n - 1$ și să notăm:
$S_k = Z_1^k + \ldots + Z_n^k$. Este utilă următoarea:
Lemă:

$$S_k = \begin{cases} 0 \text{ dacă } 1 \leqslant k < n \\ n \text{ dacă } k = n. \end{cases}$$

Soluție: Dacă $k = n$ evident $S_k = n$. Să presupunem $1 \leqslant k < n$. Fie $Z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci în mod evident $Z_1^k \neq 1$. Se observă că elementele $Z_1Z_1, Z_1Z_2, \ldots, Z_1Z_n$ sînt aceleași cu elementele $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, eventual în altă ordine. Atunci $Z_1^k S_k = S_k$ de unde $(Z_1^k - 1) S_k = 0$ și un $Z_1^k - 1 \neq 0$ rezultă $S_k = 0$ q.e.d. Să presupunem că $P(X) \neq 0$. Atunci $P(X)$ poate fi scris în forma $P(X) = X^k(a_0 + a_1X + \ldots a_mX^m)$ cu $a_0 \neq 0$ și $m + k \leqslant n - 1$. Polinomul $P'(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ are aceleași proprietăți ca și P și atunci putem considera că $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots$ $\ldots + a_mX^m$ cu $a_0 \neq 0$ și $m \leqslant n - 1$.
Avem $|P(Z_i)| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$ și cel puțin una dintre aceste inegalități este strictă ținînd cont de ipoteză.
Atunci $|P(Z_1) + \ldots + P(Z_n)| < |P(Z_1)| + \ldots + |P(Z_n)| \leqslant n$ și ținînd cont de lemă deducem că $n|a_0| < n$ și cum a_0 este număr întreg, rezultă că $a_0 = 0$, contradicție.

112. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ rădăcinile întregi distincte ale polinomului f. Numărul rădăcinilor întregi distincte ale polinomului $f \circ p$ este egal cu numărul răd. întregi distincte ale tuturor ecuațiilor $P(X) = a$, $i = 1, \ldots, k$. Alegem c număr natural a.î. $c|k$, mai mare decît numărul tuturor divizorilor întregi ai numerelor $a_i - a_j$, $i \neq j$, număr pe care îl vom nota cu n. Dacă nici una din ecuațiile $P(X) = a_i$ nu are rădăcini întregi atunci în mod evident sînt satisfăcute condițiile cerute. Să presupunem că ecuația $P(X) = a_1$ are rădăcini întregi și fie x_1 o astfel de rădăcină. Avem $P(x_1) = a_1$

Dacă $k = 1$ problema este rezolvată deoarece ecuația $P(x) = a_1$ are cel mult grad p rădăcini întregi. Să presupunem $k \geqslant 2$ și să fixăm $i \in \{2, \ldots k\}$. Fie α o rădăcină întreagă a ecuației $P(x) = a_i$. Atunci $\alpha - x_1$ este divizor al lui $a_i - a_1$ și prin urmare expresia $\alpha - x_1$ nu poate avea mai mult de n valori distincte.
Rezultă că ecuația $P(x) = a_i$ are cel mult n rădăcini întregi.
Atunci ecuațiile $P(x) = a_i$, $i = 2, \ldots k$ au cel mult $(k-1)n$ rădăcini întregi și cum ecuația $P(x) = a_1$ are cel mult grad p rădăcini întregi rezultă că numărul rădăcinilor întregi ale polinomului $f \circ p$ este mai mic decît grad $p + (k-1)n <$ grad $p + kn =$ grad $p + c$.

113. Ecuația dată este echivalentă cu $P(Z)\,[1 - P(-z)] = 0$.
Dacă ecuația $P(Z) = 0$ are soluții în ambele semiplane $\mathrm{Im}Z > 0$ sau $\mathrm{Im}Z < 0$ problema este rezolvată.
Să presupunem că ec. $P(Z) = 0$ are soluții numai în semiplanul $\mathrm{Im}Z \geqslant 0$. Deoarece nu toți coeficienții lui P sînt reali rezultă că cel puțin o rădăcină a polinomului P este situată în semiplanul $\mathrm{Im}Z > 0$.
Rămîne să demonstrăm că ecuația $P(-Z) - 1 = 0$. admite cel puțin o rădăcină în semiplanul $\mathrm{Im}Z < 0$. Dacă presupunem contrariul, deci că toate rădăcinile ecuației $P(-Z) - 1 = 0$ sînt situate în semiplanul $\mathrm{Im}Z \geqslant 0$, făcînd o schimbare de variabilă evidentă rezultă că toate rădăcinile ecuației $P(Z) - 1 = 0$ sînt situate în semiplanul $\mathrm{Im}Z \leqslant 0$. Dacă $P(Z) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ cu $n \geqslant 2$ atunci din considerațiile făcute asupra ecuației $P(Z) = 0$ și ținînd cont de relațiile lui Viète rezultă că $\mathrm{Im} - \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$.
De asemenea ecuația $P(Z) - 1 = 0$ admite cel puțin 0 soluție situată în semiplanul $\mathrm{Im}Z < 0$. Rezultă, deoarece $n \geqslant 2$ că $\mathrm{Im} - \frac{a_{n-1}}{a_n} < 0$ contradicție.

114. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ rădăcinile ecuației.
Rezultă $|x_1 \cdot x_2 \ldots x_{2n}| = |a_{2n}| = 1$. Coeficientul a_k, $k \in \{1, 2, \ldots 2n-1\}$ este dat de suma produselor de cîte k rădăcini din cele $2n$ rădăcini, adică C_{2n}^k produse, care au același semn, deoarece toate rădăcinile sînt de același semn. Cum produsul rădăcinilor, în modul, este unu, rezultă, din inegalitatea mediilor:

$$|a_k| \geqslant C_{2n}^k, \quad k = \overline{1, 2n-1}.$$

Exemplu :

$$|a_2| = \Big|\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} x_i x_j\Big| = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i|\,|x_j| \geqslant C_{2n}^2 \sqrt[C_{2n}^2]{(|x_1|\,|x_2| \ldots |x_n|)^{n-1}} = C_{2n}^2.$$

Rezultă : $|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{2n}| \geqslant 1 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$.
Egalitate avem dacă $|a_i| = 1$, pentru $i = \overline{1, 2n}$.

115. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}$ rădăcinile ecuației: Rezultă $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = n^2 - b(n-1) = n.$$

Cum $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$

Deci $a_{n-i} = (-1)^i C_n^i$, $i = \overline{3, n}$.

116. Fie (1) $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n = a_0(X^n - SX^{n-1} + \ldots)$.

Dar

$$(2)\quad f = \sum_{k=1}^{n}(S - x_k)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j X^{n-j}x_k^j =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(S - x_k)C_n^0X^n - \sum_{k=1}^{n}(S - x_k)x_kC_n^1X^{n-1} + \ldots .$$

Din (1) şi (2) rezultă (3) $a_0 = \sum_{k=1}^{n}(S - x_k)C_n^0 = (n-1)S$

$$a_1 = a_0S = \sum_{k=1}^{n}(S - x_k)x_k \cdot n \text{ sau}$$

(4)

$$a_0S = \left(S^2 - \sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)n \quad \text{Din (3) şi (4) rezultă}$$

$$(n-1)S^2 = nS^2 - n\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \text{ sau } S^2 = n\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \text{ sau}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \text{ sau } \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{n}$$

rezultă $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = \frac{1}{n}$,

rezultă $f = \frac{(n-1)S}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X - \frac{S}{n}\right)^n = (n-1)S\left(X - \frac{S}{n}\right)^n$

G.M. 2/1988

117. Din teorema împărţirii cu rest rezultă că există $h, r \in \mathbf{Q}[X]$ grad $h < 3$ astfel încît $g = h \cdot f + r$. Atunci $g(X_i) = h(X_i) \cdot f(X_i) + r(X_i) = r(X_i)$, $i = 1, 2, 3$. Dacă r este polinom constant atunci $g(X_1) = g(X_2) = g(X_3) = r \in \mathbf{Q}$. Să presupunem în continuare că grad $r \geqslant 1$ adică $r = ax^2 + bx + c$, $ab \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{Q}$ şi să admitem că $g(X_1) = X_2$). Rezultă că $aX_1^2 + bX_1 + c = aX_2^2 + bX_2 + c$ sau $(X_1 - X_2)(aX_1 + aX_2 + b) = 0$. Dar $X_1 \neq X_2$ pentru că un polinom ireductibil nu are rădăcini multiple.

Deducem că $aX_1 + aX_2 + b = 0$. Dacă $a = 0$ rezultă $b = 0$ ceea ce contrazice condiţia $ab \neq 0$. Dacă $a \neq 0$ din relaţiile lui Viète obţinem $X_1 + X_2 + X_3 \in \mathbf{Q}$, $aX_1 + aX_2 + aX_3 \in \mathbf{Q}$, $aX_3 - b \in \mathbf{Q}$, $X_3 \in \mathbf{Q}$, a surd pentru că un polinom ireductibil din inelul $\mathbf{Q}[X]$ nu poate avea rădăcini raţionale.

G.M. 7/1982

118. Fie $X_1, X_2, \ldots, X$ rădăcinile ecuaţiei considerate.

Folosind relaţiile lui Viète avem: $\sum_{i=1}^{n}X_i = n$ şi $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}X_iX_j = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ridicînd prima relație la pătrat rezultă că $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j = n^2$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = n^2 - 2\frac{n(n-1)}{2} = n.$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy—Buniakovsky avem:

$n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ cu egalitate doar în cazul în care $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$. Făcînd înlocuirile obținem $n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ și deci $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$.

Cum suma acestor numere este n rezultă că $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1$ și în acest caz $f(X) = (X-1)^n$ de unde identificînd coeficienții

$$a_i = (-1)^i C_n^i.$$

119. Fie $X_1, \ldots, X_n$ rădăcinile lui f și să presupunem că acestea sînt reale. Atunci din faptul că $a_n \neq 0$ rezultă că $X_i \neq 0$, $i = 1, \ldots n$. Ținînd cont de relațiile lui Viète obținem că:

$$X_1 \ldots X_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} = 0 \text{ și } X_1 \ldots X_n \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{X_iX_j} = 0.$$

Notînd $\frac{1}{X_i} = y_i$, $i = 1, \ldots n$ rezultă că:

$$\sum_{1\leq i\leq n} y_i = 0 \text{ și } \sum_{1\leq i<j\leq n} y_iy_j = 0.$$

De aici $\sum_{1\leq i\leq n} y_i^2 = \left(\sum_{1\leq i\leq n} y_i\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} y_iy_j = 0$,

de unde $y_i = 0$, $i = 1, \ldots n$. Dar $y_i = \frac{1}{x_i} \neq 0$, $i = 1, \ldots n$, contradicție.

G.M. 4/1985

120. a) Pentru $x_0 \in \mathbf{C}$ avem

$$f_{(x_0)}^{(n)} = \lambda_n f_n^{(n)}(x_0)$$
$$f_{(x_0)}^{(n-1)} = \lambda_n f_n^{(n-1)}(x_0) + \lambda_{n-1} f_{n-1}^{(n-1)}(x_0)$$
$$f_{(x_0)}^{(n-2)} = \lambda_n f_n^{(n-2)}(x_0) + \lambda_{n-1} f_{n-1}^{(n-2)}(x_0) + \lambda_{n-2} f_{n-2}^{(n-2)}(x_0)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$f(x_0) = \lambda_n f_n(x_0) + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x_0) + \ldots + \lambda_0 f_0(x_0).$$

Dar grad $f_i = i \Rightarrow f_i^{(i)}(x_0) \neq 0$, $(\forall)\ x_0 \in \mathbf{C}$.

Considerînd necunoscute $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ observăm că ele sînt unic determinate, deoarece sistemul de mai sus este compatibil determinat, determinantul sistemului fiind

$$\begin{vmatrix} f_n^{(n)}(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ f_n^{(n-1)}(x_0) & f_{n-1}^{n-1}(x_0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_0) & f_{n-1}(x_0) & \ldots & f_0(x_0) \end{vmatrix} = f_n^{(n)}(x_0) \cdot f_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \ldots f_0(x_0) \neq 0.$$

b) Luăm $f_i = \frac{(X-a)^i}{i!} + \ldots$, $i = \overline{0, n+1}$, rezultă

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{X-a}{1!} + \alpha_2 \frac{(X-a)^2}{2!} + \ldots + \alpha_n \frac{(X-a)^n}{n!}.$$

Observăm că: $\alpha_0 = f(a)$, $\alpha_1 = f'(a)$, $\ldots$, $\alpha_n = f^{(n)}_{(a)}$, rezultă că:

$$f = f(a) + \frac{X-a}{1!} f'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(X-a)^n}{n!} + f^{(n)}_{(a)}.$$

121. 1) $f(m) \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\ m \in \mathbf{Z}$, rezultă

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_0 + a_1 \\ f(2) = a_0 + a_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ f(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases}$$

s-a obținut un sistem liniar cu determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

sistemul fiind compatibil determinat se rezolvă aplicînd regula lui Cramer, necunoscutele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ rezultînd întregi, deoarece $\Delta = 1$, iar determinanții asociați necunoscutelor sînt întregi, avînd elementele numere întregi.

2) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$, $f(\alpha) \in \mathbf{Z}$ $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{Z}$, deoarece

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \in \mathbf{Z},\ k = \overline{1, n}.$$

$\alpha, \alpha-1, \ldots, \alpha-k+1$ sînt k numere întregi consecutive și printre ele există cel puțin un număr divizibil cu $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

122. Dăm lui X valori de la 0 la $n-1$ și obținem:

$f(0) = a_0$,
$f(1) = a_0 + a_1 A^1_1$,
$f(2) = a_0 + a_1 A^1_2 + a_2 A^2_2$,
$f(3) = a_0 + a_1 A^1_3 + a_2 A^2_3 + a_3 A^3_3$,
. . . . . .
$f(n-1) = a_0 + a_1 A^1_{n-1} + a_2 A^2_{n-1} + \ldots + a_n A^{n-1}_{n-1}$.

Se obține un sistem liniar compatibil determinat, deoarece determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & A^1_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & A^1_2 & A^2_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & A^1_{n-1} & A^2_{n-1} & \ldots & A^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} A^1_1 A^2_2 \ldots A^{n-1}_{n-1} = 1 \neq 0.$$

sistemul avînd soluție unică rezultă că f este unic.

123. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ progresia considerată, iar $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+n}$ cel $n+1$ termeni consecutivi ai progresiei ($k \in \mathbf{N}^*$). Considerăm $f \in \mathbf{R}[X]$ de forma:

$f(X) = a_0 + a_1(X - b_k) + a_2(X - b_k)(X - b_{k+1}) + \ldots + a_n(X - b_k)(X - b_{k+1})\ldots$ $\ldots (X - b_{n+k-1})$. Rezultă:

$$f(b_k) = a_0,$$
$$f(b_{k+1}) = a_0 + A_1^1 r a_1,$$
$$f(b_{k+2}) = a_0 + A_2^1 r a_1 + A_2^2 r^2 a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(b_{k+n}) = a_0 + A_n^1 r a_1 + A_n^2 r^2 a_2 + \ldots + A_n^n r^n a_n.$$

Cum determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & A_1^1 r & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & A_2^1 r & A_2^2 r^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & A_n' r & A_n^2 r^2 & \ldots & A_n^n r^n \end{vmatrix} =$

$A_1^1 \cdot A_2^2 \ldots A_n^n r^{\frac{n(n+1)}{2}}$, iar

$$a_i = \frac{q_i \ldots r \ldots r^{i-1} \cdot r^{i+1} \ldots r^n}{A_1^1 \cdot A_2^2 \ldots A_n^n r \cdot r^2 \ldots r^n} = p_i \frac{1}{r^i},$$

unde $q_i, p_i \in \mathbf{Q}$, $i = \overline{0, n}$, rezultă

$$f(X) = p_0 + p_1 \frac{X - b_k}{r} + p_2 \frac{(X - b_k)(X - b_{k+1})}{r^2} + \ldots +$$
$$+ p_n \frac{(X - b_k)(X - b_{k+1}) \ldots (X - b_{k+n-1})}{r^n}$$

pentru $x = b_i$ $i \in \mathbf{N}^*$, cum $(X - b_k) = (b_i - b_k) = (i - k)r$, $(\forall)$ $i, k \in \mathbf{N}^*$ $\Rightarrow f(b_i) \in \mathbf{Q}$. Dacă $(\exists)$ $i \in \mathbf{N}$ astfel încît $a_i, a_{i+1} \in \mathbf{Q}$ rezultă

$$p_i \frac{1}{r_i} \in \mathbf{Q} \text{ și } p_{i+1} \frac{1}{r^{i+1}} \in \mathbf{Q} \Rightarrow r \in \mathbf{Q} \Rightarrow a_i \in \mathbf{Q}, \text{ pentru } i = \overline{0, n}.$$

G.M. 12/1984

124. Cum $f' = f_1' = f_2' = f_3'$ rezultă că f' are toate rădăcinile reale și distincte. Fie ξ_1, ξ_2 două rădăcini alăturate ale polinomului f', $\xi_1 < \xi_2$. Rezultă că polinoamele f_1 și f_2 au cîte o rădăcină în intervalul (ξ_1, ξ_2), deci luînd în calcul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, rădăcinile polinomului f' rezultă că polinoamele f_1 și f_2, au cîte o rădăcină, în intervalele disjuncte $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), $\ldots$, (ξ_{n-2}, ξ_{n-1}), (ξ_{n-1}, ∞). Pentru $f_1(\alpha) = 0$ și $f_2(\beta) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = a$ și $f(\beta) = b$ iar $f_3(\alpha) \cdot f_3(\beta) = [f(\alpha) - \lambda][f(\beta) - \lambda] = (a - \lambda)(b - \lambda) \leqslant 0$. Deci între rădăcinile polinoamelor f_1 și f_2, situate în intervalele de mai sus este situată o rădăcină a polinomului f_3, deci f_3 are toate rădăcinile reale și distincte.

125. Rădăcinile fiind în progresie aritmetică considerăm:

$x_1 = a - 2r$; $x_3 = a$
$x_2 = a - r$; $x_4 = a + r$; $x_5 = a + 2r$. Putem scrie:

$$f = c(x - a + 2r)(x - a + r)(x - a)(x - a - r)(x - a - 2r) =$$
$$= c(x - a)[(x - a)^2 - 4r^2][(x - a)^2 - r^2] =$$
$$= c[(x - a)^5 - 5r^2(x - a)^3 + 4r^4(x - a)], \text{ unde } c \in \mathbf{R}$$

$f'' = c[20(X-a)^3 - 30r^2(X-a)] = 2ac\left(X - a + \sqrt{\frac{3}{2}}r\right)(X-a) \cdot$

$\cdot \left(X - a - \sqrt{\frac{3}{2}}r\right)$ observăm că $f'' = 0$ are rădăcinile $a - \sqrt{\frac{3}{2}}r$, a, $a + \sqrt{\frac{3}{2}}r$, evident în progresie aritmetică.

Rădăcina $x = a$ este rădăcină comună pentru f şi f''.

G.M. 5–6/1988

126. Rădăcinile polinomului sînt în progresie aritmetică.

$$f'(x_i) = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n).$$

Dacă $x = x_1 + (i-1)r$, atunci

$$f'(x_i) = (i-1)\,r(i-2)r \ldots r.$$

$$(-r) \cdot (-2r) \ldots [-(n-i)r] = (i-1)!\,r^{i-1} \cdot (-1)^{n-i}(n-i)!\,r^{n-i} =$$
$$= (-1)^{n-i}(i-1)!\,(n-i)!\,r^{n-1}$$

127. Dacă polinomul are gradul n şi $k \leqslant n$, $k \in \mathbf{N}$ rădăcini reale, rezultă că are $n - k$ rădăcini complexe.

Polinomul derivat are gradul $n-1$ şi cel puţin $k-1$ rădăcini reale, rezultă că are cel mult $n - 1 - (k-1) = n - k$ rădăcini complexe, adică are cel mult tot atîtea rădăcini complexe ca polinomul considerat.

128. Dacă h are toate rădăcinile reale, atunci derivata de ordin $(n+1)$ are toate rădăcinile reale şi

$$h^{n+1}(X) = q(X) + a(n+2)\frac{(n+3)!}{2}X^2 + b(n+3)!X + c(n+2)!,$$

unde $g(X) = a_{n+3}X^{n+3} + a_{n+2}X^{n+2} + \ldots + a_3X^3 + 0X^2 + 0 \cdot X + 0$,
Dacă rădăcinile lui $h_{(x)}^{(n+1)}$ sînt reale atunci şi

$$l(X) = c(n+2)!X^{n+3} + b(n+3)!X^{n+2} + a(n+2)\frac{(n+3)!}{2}X^{n+1} + a_3X^n + \ldots$$

$\ldots + a_{n+2}X + a_{n+3}$ sînt reale fiind inverselе rădăcinilor lui $h_{(x)}^{(n+1)}$.
Dacă $l(X)$ are rădăcini reale atunci toate derivatele sale au rădăcinile reale.
Deci şi $l_{(x)}^{(n+1)} = (n+2)!\left[\frac{c(n+3)!}{2}X^2 + b(n+3)!X + \frac{a(n+3)!}{2}\right] =$

$$= \frac{(n+2)!(n+3)!}{2}(cX^2 + 2bX + a) \Rightarrow \Delta \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \geqslant ac.$$

G.M. 4–5/1986

129. Fie $g = X(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$. Rezultă $f = g'$. Cum g are n rădăcini reale simple, rezultă că şi $f = g'$ are rădăcini reale simple.

G.M 1/1984

130. Fie $n = \operatorname{grad} f$.

1) Dacă $m \geqslant n+1$, atunci $f(x) = k \neq k + p$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ deoarece ecuaţia $f(x) - k = 0$ are mai mult de n rădăcini.

2 Dacă $1 \leqslant m \leqslant n$ atunci polinomul f este nenul şi cum $f(x)$ este uncţe continuă pe $\mathbf{R}$, atunci $[k, +\infty) \subset f(\mathbf{R})$ sau $(-\infty, k] \subset f(\mathbf{R})$. Cum

$(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$, $(\exists)\ p_1, p_2$, numere prime astfel încît $k + p_1 < k$ şi $k + p_2 < k$ rezultă că $(\exists)\ a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a) = k + p_1$ sau $f(a) = k + p_2$ deci $m = n + 1$.

G.M. 4–5/1984

131. Dacă $f = (X + 1)^m - X^m - 1$; $f' = m[(X + 1)^{m-1} - X^{m-1}]$

$$f'' = m(m - 1)[(X + 1)^{m-2} - X^{m-2}].$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{C}$ astfel încît $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

$$f'(\varepsilon) = m[(\varepsilon + 1)^{m-1} - \varepsilon^{m-1}] = m[(-\varepsilon^2)^{m-1} - \varepsilon^{m-1}] =$$
$$= m\varepsilon^{m-1}[(-\varepsilon)^{m-1} - 1]. \text{ Asemănător}$$
$$f''(\varepsilon) = m(m - 1)[(-\varepsilon)^{m-2} - 1]$$

$f'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow m - 1 = 6k \Rightarrow m = 6k + 1$; $f''(\varepsilon) = 0 \Rightarrow m - 2 = 6p \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 6p + 2$. Cum $6k + 1 \neq 6p + 2$ $(\forall)\ k, p \in \mathbf{Z}$, rezultă că primele două derivate nu se anulează simultan, deci nu este posibil ca f să se dividă cu $(X^2 + X + 1)^3$. Asemănător se procedează şi cu celălalt polinom.

132. Avem $g(a) = 0$ şi cum $g' = \frac{1}{2}[f'(X) + f'(0)] + \frac{X - a}{2} f''(X) - f'(X)$ rezultă $g'(a) = 0$. Dar

$g'' = \frac{1}{2} f''(X) + \frac{X - a}{2} f'''(X) + \frac{1}{2} f''(X) - f''(X) = \frac{X - a}{2} f'''(X)$ rezultă

$g''(a) = 0$. Dacă a este rădăcină multiplă de ordinul k, $k \in \mathbf{N}$, pentru f''' atunci pentru g este rădăcină multiplă de ordin $k + 3$.

133. Rezultă că $f' = a(X - 1)^n(X + 1)^n = a(X^2 - 1)^n =$

$$= a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (X^2)^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k X^{2n-2k}.$$

Deci

$$f = a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2n - 2k + 1} X^{2n-2k+1} + b.$$

Cum $f(1) + 1 = 0$ şi $f(-1) - 1 = 0$, rezultă că

$$\begin{cases} a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2n - 2k + 1} + b = -1 \\ -a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2n - 2k + 1} + b = 1. \text{ De unde} \end{cases}$$

$$a = -\left(\sum (-1)^k \frac{C_n^k}{2n - 2k - 1}\right)^{-1} \qquad b = 0.$$

134. a) Evident.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k - x} = n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{a_k - x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - a_k} = 0$. Fie $f = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$.

Rezultă $\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k} = 0 \Leftrightarrow f' = 0.$

Cum f are n rădăcini reale rezultă că f' are $n - 1$ rădăcini reale. În concluzie ecuația dată are n rădăcini reale și cum prin aducere la același numitor se obține o ecuație de gradul n, rezultă că ecuația are toate rădăcinile reale.

135. $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X - x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - X + X}{X - x_i} = -n + X\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i} =$

$= X\frac{f'(X)}{f(X)} - n = \frac{Xf'(X) - nf(X)}{f(X)}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{C} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

136. Fie $f(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$

$f'(X) = [(X - x_1)(X - x_2) + (X - x_2)(X - x_3) + (X - x_3)(X - x_1)]$.

Rezultă a) $\frac{x_1^2}{f'(x_1)} + \frac{x_2^2}{f'(x_2)} + \frac{x_3^2}{f'(x_3)} = \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{x_2^2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$

$+ \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{-x_1^2(x_2 - x_3) - x_2^2(x_3 - x_1) - x_3^2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 1.$

b) $g = \alpha x + \beta\ \frac{g(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{g(x_2)}{f'(x_2)} + \frac{g(x_3)}{f'(x_3)} =$

$= \frac{-(\alpha x_1 + \beta)(x_2 - x_3) - (\alpha x_2 + \beta)(x_3 - x_1) - (\alpha x_3 + \beta)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} =$

$= \frac{-\alpha(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - x_2x_1 + x_3x_1 - x_3x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} +$

$+ \frac{-\beta(x_2 - x_3 + x_3 - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$

137. $f'(X) = f(X)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i} \Rightarrow f''(X) = f'(X) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i} + f(X) \cdot$

$\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(X - x_i)^2} = f(X)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - x_i)^2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f''(X)\,(X - x_k)}{f(X)} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{X - x_k}{(X - x_i)(X - x_j)} =$

$= 2 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{X - x_j} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{X - x_i} + 2 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \neq k}} \frac{X - x_k}{(X - x_i)(X - x_j)}$. (1)

Pentru $x = x_k$ din (1) rezultă

$$\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} = 2 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Dînd lui k valorile $1, 2, \ldots, n$ obţinem

$$\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = 2\left(\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} + \ldots + \frac{1}{x_1 - x_n}\right)$$

$$\frac{f''(x_2)}{f'(x_2)} = 2\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \ldots + \frac{1}{x_2 - x_n}\right)$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} = 2\left(\frac{1}{x_n - x_1} + \frac{1}{x_n - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\right).$$

Prin adunare obţinem:

$$\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f''(x_2)}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} = 0.$$

138. 1) Să presupunem că x_0 este rădăcină multiplă. Atunci $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$, dar $f(x_0) - f'(x_0) = 0 = \frac{x_0^n}{n!} \Rightarrow x_0 = 0$. Absurd.

2) Să presupunem că $x_0 \Rightarrow \mathbf{Q}$ este rădăcină a polinomului f, atunci ea este rădăcină şi a polinomului $n!\, f(x)$ care are coeficientul dominant 1 şi deci $x_0 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_0 / n!$ $(x_0 \notin \{0, \pm 1\})$.

Fie p un factor prim al lui x_0 şi α puterea lui p în $n!$.

Deci $\alpha = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \ldots + \frac{k}{p^n}\Big] + \ldots$ şi

$$\alpha < \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \frac{k}{p^3} + \ldots \frac{k}{p^n} + \ldots < \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{k}{p-1} \leqslant k$$

Atunci p^k / x_0^k şi $p^k / k!$ şi deci $\frac{x_0^k}{k!}$ se poate reprezenta sub forma unei fracţii ireductibile $\frac{a_k}{b_k}$, unde $p \mid a_k$ şi $p \nmid b_k$. Prin urmare $f(x_0) = 0 = 1 +$

$$+ \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^k}{k!} + \ldots \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots \frac{a_k}{b_k} + \ldots \frac{a_n}{b_n}$$

şi înmulţind cu

$$B = b_1 b_2 \ldots b_n \Rightarrow a_1 \frac{B}{b_1} + a_2 \frac{B}{b_2} + \ldots + a_n \frac{B}{b_n} = -B.$$

Deoarece $p \mid a_k$, rezultă că membrul stîng este divizibil cu p, dar membrul drept nu este, contradicţie.

139. Observăm că grad $f = n$ şi $f = f' + X^n$

$$f' = f'' + A_n^1 X^{n-1}$$

$$f'' = f''' + A_n^2 X^{n-2}$$

$$- - - - - - - -$$

$$f^{(n-1)} = f^{(n)} + A_n^{n-1} X$$

$$f^{(n)} = A_n^n.$$

Adunînd relaţiile de mai sus, după efectuarea reducerilor obţinem

$$f = A_n^n + A_n^{n-1} X + \ldots + A_n^1 X^{n-1} + X^n = n!\left(1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}\right).$$

140. Rezultă grad $f = n$, iar prin derivări succesive

$$\begin{array}{l|l} f = af' + bX^n & \\ f' = af'' + bA_n'X^{n-1} & a' \\ f'' = a''' + bA_n^2X^{n-2} & a^2 \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - & - \quad - \\ f^{(n-1)} = af^{(n)} + bA_n^{n-1}X & a^{n-1} \\ f^{(n)} = \quad bA_n^n & a^n \end{array}$$

Înmulțind aceste relații cu termenii din dreapta și adunînd obținem:

$$f = b[X^n + A_n'a'X^{n-1} + A_2^2a^2X^{n-2} + \ldots A_n^{n-1}a^{n-1}X + A_n^na^n] =$$

$$= bn!\left[\frac{1}{n!}X^n + \frac{a}{(n-1)!}X^{n-1} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{1!}X + 1\right].$$

141. $f' \mid f \Rightarrow f = f'(aX + b)$

Rezultă că rădăcinile lui f' sînt și rădăcinile lui f.

Presupunem că f' are două rădăcini distincte, rezultă că f are două rădăcini distincte, cel puțin duble, adică grad $f \geqslant 2 + \text{grad } f'$, ceea ce este absurd.

Rezultă:

$$f' = k(\alpha X + \beta)^{k-1},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\ k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = (\alpha X + \beta)^k.$$

142. Dacă $f(X) \in \mathbf{Z}[X] \Rightarrow f(m) \in \mathbf{Z}\ (\forall)\ m = \overline{0, n}$.

Cum $f(m) \in (0, n]$ pentru $n + 1$ valori ale lui m, $f(m)$ poate lua n valori. Rezultă că există $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ astfel încît $f(m_1) = f(m_2)$, rezultă că există $c \in (m_1, m_2) \subset [0, n]$ astfel încît $f'(c) = 0$.

143. $f(X) = 0$ este soluție. Dacă $n = \text{grad } f \geqslant 1$, din relația

$$[f(X)]^2 = f'(X) \cdot f''(X) \ldots f^{(n)}(X). \text{ rezultă}$$

$$\text{grad } f^2 = \text{grad } f' + \text{grad } f'' + \ldots + \text{grad } f_{(n)}$$

sau

$$2n = n - 1 + n - 2 + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Rezultă $4n = n^2 - n \Leftrightarrow 5n = n^2 \Rightarrow n = 5$.

Observăm că: $f'(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$, rezultă că x_1 este rădăcină dublă pentru $f(x)$. Cum grad $f = 5$ rezultă că $f(X)$ are cel mult două rădăcini duble, rezultă că $f'(X)$ are cel mult două rădăcini distincte, deci aceste rădăcini trebuie să fie duble pentru $f'(X)$. Rezultă că $f(X)$ are două rădăcini triple ceea ce nu se poate (grad $f = 5$) rezultă că $f'(X)$ are o rădăcină multiplă de ordin 4, adică $f(X)$ are o rădăcină multiplă de ordinul 5. Deci $f(X) = a(X - \alpha)^5$.

Înlocuind în relație, obținem $a^2(X - \alpha)^5 = 5a(X - \alpha)^4 \cdot 20a(X - \alpha)^3 \cdot 60a(X - \alpha)^2 \cdot 120a(X - \alpha) \cdot 120a$

Deci $a^2 = 100 \cdot 60 \cdot 120^2a^5$. Cum $a \neq 0$ rezultă

$$a^3 = \frac{5}{2 \cdot 6^3 \cdot 10^6} \Rightarrow a = \frac{1}{6000}\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Deci

$$f(X) = \frac{1}{600}\sqrt{\frac{5}{2}}(X-\alpha)^5$$

G.M. 5/1983

144. Dacă $n = \text{grad} f$, din relaţia din enunţ, egalînd gradele, rezultă

$$2n = n - 1 + n - 2 + \ldots + n - k \text{ sau}$$

$$4n = 2nk - k(k+1) \quad \text{sau}$$

(1) $2n(k-2) = k(k+1)$. Pentru $k < n$, rezultă $f(x) = 0$

pentru $k \leqslant n$ din relaţia (1) $\Rightarrow 2n = \frac{k(k+1)}{k-2} \Rightarrow 2n = k + 3 + \frac{6}{k-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n = 3, k = 3)$; $(n = 5, k = 4)$; $(n = 5, k = 5)$ $(n = 6, k = 8)$ care ne dă $f(X) = 0$.

În celelalte cazuri se identifică coeficienţii, determinîndu-se polinoamele.

145. Evident polinoamele identic nule verifică relaţiile.

Dacă $\text{grad} f(x) = n \Rightarrow \text{grad} f^2(X) = 2n$, $\text{grad} f'(X) = n - 1$ şi $\text{grad} f'(X^4) = 4n - 4$. Rezultă: $2n = 4n - 4 \Rightarrow n = 2$.

Fie $f(X) = aX^2 + bX + c$, $b, c \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^*$.

Rezultă $(aX^2 + bX + c)^2 = 2aX^4 + b$.

Rezultă $a^2 = 2a$, $2ab = 0$, $2ac + b^2 = 0$, $2bc = 0$, $c^2 = b$.

Rezultă $a = 2$, $b = c = 0$, deci $f(X) = 2X^2$.

Asemănător rezultă $g(X) = 3X^3$.

146. Evident polinomul identic nul verifică relaţia. Dacă $\text{grad} f = n$, rezultă $2n = k(n-1)$ sau $n(k-2) = k$ $k \in \mathbf{N} \setminus \{2\} \Rightarrow k \geqslant 3$.

a) Pentru $k =$ impar, cum $(k, k-2) = 1$ şi $k - 2 | k \Rightarrow k - 2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow f^2(X) = f'(X^3) \Rightarrow f(X) = 3X^3$. (vezi. 145)

b) Pentru $k = 2p$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 2$ rezultă $n2(p-1) = 2p$ sau

$n(p-1) = p \Rightarrow$ cum $p - 1 \mid p$ şi $(p, p-1) = 1 \Rightarrow p - 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2 \Rightarrow k = 4$ şi $n = 2$,

$\Rightarrow f^2(X) = f'(X^4) \Rightarrow f(X) = 2X^2$ (vezi ex. precedent).

147. Fie $x_1, \ldots, x_k$ rădăcinile distincte ale lui $f(X)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ ordinele lui de multiplicitate respective. Presupunem $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

Funcţia $\varphi(X) = \frac{f'(X)}{f(X)}$ este continuă în intervalele deschise

$(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{k-1}, x_k), (x_k, ∞) şi variază de la 0 la $-\infty$ în intervalul $(-\infty, x_1)$, de la $+\infty$ la $-\infty$ în fiecare dintre intervalele (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{2, k}$ şi de la $+\infty$ la 0 în intervalul $(x_k, +\infty)$. Prin urmare $\varphi(X) + \lambda$ are o rădăcină în fiecare din intervalele (x_{i-1}, x_i) pentru $i = \overline{2, k}$, şi în plus, pentru $\lambda > 0$, o rădăcină în intervalul $(-\infty, x_1)$, iar pentru $\lambda < 0$ o rădăcină în intervalul $(-\infty, x_1)$.

Deci $\varphi(X) + \lambda$ şi, prin urmare, $f(X)[\varphi(X) + \lambda] = \lambda f(X) + f'(X)$ are k rădăcini diferite de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pentru $\lambda \neq 0$, sau $k - 1$ rădăcini diferite de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pentru $\lambda = 0$. Cum $\lambda f + f'$ admite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ca rădăcini multiple de ordine, respectiv $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1$, $\ldots$, $\alpha_k - 1$ rezultă că în total polinomul $\lambda f + f'$ are $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ rădăcini pentru $\alpha \neq 0$

sau $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - 1$ rădăcini pentru $\alpha = 0$, adică numărul de rădăcini reale este egal cu gradul polinomului $\lambda f + f'$.

148. Fie $g = f + \lambda f'$. Cum g nu are rădăcini reale, rezultă grad $g =$ = par, rezultă grad $f =$ par.

Presupunem f polinom unitar. Rezultă că şi g este polinom unitar. Dacă f are gradul par şi are rădăcini reale distincte atunci are cel puţin două. Fie $x_1, x_2, x_1 < x_2$ rădăcini ale polinomului astfel încît x_1, x_2, să fie cele mai mari rădăcini ale lui f $(\exists) c \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f'(c) = 0$ şi $f(c) < 0$ deoarece $f(\infty) = +\infty \Rightarrow g(c) = f(c) < 0$. Dar $g(\infty) = \infty$. Rezultă, g are o rădăcină în intervalul (c, ∞). Absurd, deci nici f nu are rădăcini reale.

Dacă $f = af_1, f_1 \in \mathbf{R}[X]$, $a \in \mathbf{R}$ $a \neq 1$, atunci

$g = a(f_1 + \lambda f) = ag_1 \Rightarrow g_1$ nu are rădăcini reale implică f_1 nu are rădăcini reale, deci nici f.

Altfel: considerăm funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$h(x) = f(X)\, e^{\frac{x}{\lambda}},\ \lambda \in \mathbf{R}^*$$

h este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$

$h'(X) = \frac{1}{\lambda}(\lambda f' + f)e^{\frac{x}{\lambda}}$. Polinoamele f şi $g = f + \lambda f'$ are acelaşi grad.

Dacă g nu are rădăcini reale, rezultă că grad $g =$ par. Presupunem că f are rădăcini reale. Cum grad $f =$ grad $g =$ par rezultă că f are cel puţin două rădăcini reale, deci şi $h(X)$ are cel puţin două rădăcini reale de unde rezultă că $h'(X)$ are cel puţin o rădăcină reală. Adică are rădăcini reale. Absurd, deci f nu are rădăcini reale.

Pentru $\lambda = 0$ $f = g$, deci f nu are rădăcini reale.

G.M. 4/1981

149. Nu este adevărat. De exemplu $f(X) = X^2 + a^2$ $a \in \mathbf{R}^*$

$$f + \alpha f' = X^2 + a^2 + 2\alpha X = (X + \alpha)^2 + a^2 - \alpha^2.$$

a) Dacă $\alpha > a$, f nu are rădăcini reale, dar $f + \alpha f'$ are rădăcina reală $x = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - a^2}$.

b) Dacă $\alpha \leqslant a$, atît f, cît şi $f + \alpha f'$ au rădăcini complexe.

150. grad $g = n - 1$; grad $f = n$. Dacă g nu admite rădăcini reale, rezultă că are gradul par, rezultă că grad $f =$ impar deci f are cel puţin o rădăcină reală. Dar

$$f'(X) = na_0X^{n-1} + (n-1)a_1X^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}X + a_{n-1}$$

$$g(X) = a_1X^{n-1} + 2a_2X^{n-2} + \ldots + (n-1)a_{n-1}X + na_n.$$

Rezultă că $Xf' + g = nf$.

Rezultă că $g = nf - Xf'$. Presupunem că f are mai mult de o rădăcină reală. Cum are grad impar, rezultă că are cel puţin trei, rezultă că f' are cel puţin două.

Fie a, b rădăcinile lui f'. Rezultă $f'(a) = f'(b) = 0$,

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (a şi b sînt două rădăcini alăturate)

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= nf(a) \\ g(b) &= nf(b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(a) \cdot g(b) < 0 \Rightarrow g(X) \text{ are rădăcini reale.}$$

Absurd, deci presupunerea nu este adevărată, deci f are o singură rădăcină reală.

G.M. 6/1981

151. Fie $g(X) = Xf'(X) - nf(X) \Rightarrow g(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci $g(X)$ nu are rădăcini reale. Rezultă că polinomul f admite o singură rădăcină reală. (vezi soluția problemei 150).

G.M. 6/1980

152. Observăm că $a_1X^{n-1} + 2a_2X^{n-2} + \ldots + na = nf - Xf'$.
Dacă luăm $f_0 = f$ și $f_{i+1} = nf_i - Xf_i'$ pentru $i = \overline{1, k-1}$ atunci condițiile din enunț devin:

$f_0(1) = 0$
$f_1(1) = nf_0(1) - f_0'(1) = 0$
$f_2(1) = nf_1(1) - f_1'(1) = 0$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$f_k(1) = nf_{k-1}(1) - f_{k-1}'(1) = 0.$

Din relațiile $f_{i+1} = nf_i - Xf_i'$. pentru $i = \overline{1, k-1}$, presupunînd că $f_0 = f$ este divizibil cu $(X-1)^{k+1}$, rezultă că f_1 se divide cu $(X-1)^k$ și din aproape în aproape f_k se divide cu $X - 1$, deci

$$f_0(1) = f_1(1) = \ldots = f_k(1) = 0.$$

Din relația $f_{i+1} = nf_i - Xf'$, rezultă că dacă $f_i(x_0) = f_{i+1}(x_0) = 0$, unde $x_0 \in \mathbf{R}^*$ este o rădăcină multiplă de ordinul $p \in \mathbf{N}^*$, pentru f_{i+1}, atunci x_0, pentru f_i, este o rădăcină multiplă de ordinul $p + 1$.
Presupunînd relațiile din enunț adevărate rezultă evident

$$f_0(1) = f_0'(1) = f_1(1) = f_1'(1) = \ldots = f_{k-1}(1) = f_{k-1}'(1) = f_k(1)$$

Deci $x = 1$, pentru f_{k-1} este rădăcină multiplă de ordinul 2, pentru f_{k-2} este de ordinul 3, și din aproape în aproape, rezultă că pentru f_0 este rădăcină multiplă de ordinul $(k+1)$, deci f se divide cu $(X-1)^{k+1}$.

153. Observăm că $g(X) = a_nX^n + \sum_{i=0}^{n-1} [a_iX^i + (a_{i+1}X^{i+1})'] =$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_iX^i + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}X^{+1})' = f(X) + f'(X).$$

Fie $x_1 < x_2$ două rădăcini alăturate ale polinomului f. Rezultă că există $y \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f'(y) = 0$. Polinomul f avînd rădăcini distincte rezultă că y este unic și $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.
Dar $g(x_1) \cdot g(x_2) = f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.
Rezultă că între două rădăcini alăturate ale polinomului f există cel puțin o rădăcină a polinomului g. Cum f are n rădăcini reale rezultă că g are cel puțin $n-1$ rădăcini reale și cum grad $g = n$, rezultă că g are toate rădăcinile reale deoarece nu poate avea o singură rădăcină complexă.

G.M. 3/1986

154. Dacă $g = a_0(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$, luăm

$h_0 = a_0f$
$h_1 = h_0 + \lambda_1h_0' = a_0(f + \lambda_1f')$
$h_2 = h_1 + \lambda_2h_1' = a_0[f + (\lambda_1 + \lambda_2)f' + \lambda_1\lambda_2f'']$
$h_n = h_{n-1} + \lambda_nh_{n-1}' = a_0[f + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)f' +$
$+ (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n)f'' + \ldots + (\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n)f^{(n)}] =$
$= a_0f + a_1f' + \ldots + af^{(n)}.$

Cum f are toate rădăcinile reale conform problemei 147 polinoamele h_0, $h_1, \ldots, h_n$ au toate rădăcinile reale.

155. Fie $f = X^m$, polinom cu toate rădăcinile reale.

Avem

$$h = [a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \ldots + a_n f^{(n)}]\, X^{n-m}.$$

Conform problemei 154, h are toate rădăcinile reale.

156. Fie $x = \alpha$. paralelă la axa Oy. Se disting situaţiile

$f = a(X - \alpha)^4$ (1)
$f = a(X - \alpha)^2(X^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + \beta^2)$ (2) unde rădăcinile polinomului $X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 + \beta^2$ sînt $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$ ci $\beta \neq 0$ şi
$f = (X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 + \beta^2)(X^2 - 2\alpha X + \alpha^2\beta^2)$ (3).

Derivînd în fiecare din cazurile (1), (2) şi (3) rezultă că f' are rădăcinile tot pe aceeaşi paralelă.

157. Fie $f: (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = (1 + t)^x$

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} t^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}$$

$$(1 + t)^x = 1 + \frac{x}{1!} t + \frac{x(x-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} t^n +$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} (1 + \theta_t)^{x-n-1} t^{n+1}$$

Pentru $t = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} +$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} \cdot (1 + \theta)^{x-n-1},\ \theta \in (0, 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} (1 + \theta)^{x-n-1} = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

158. Ecuaţia tangentei într-un punct $A(x_0, P(x_0))$ este

$y - P(x_0) = P'(x_0)(X - x_0)$. Pentru ca aceste tangente să treacă prin origine este necesar şi suficient să avem

$P(x_0) = x_0 P'(x_0)$, aşa încît numărul tangentelor la graficul lui $P(X)$ concurente în origine este dat de numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $P(X) = XP'(X)$ adică $P(X) - X'(X) = 0$. Fie $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \in \mathbf{R}$,

$f(X) = \frac{P(X)}{X}$ şi să notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cele n rădăcini reale distincte şi nenule ale lui $P(X)$. Putem presupune că sînt k rădăcini negative şi $n - k$ pozitive, adică $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < 0 < x_{k+1} < \ldots < x_n$.
Din relaţiile $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$. Aplicînd pe fiecare interval $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$ $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k+1}, x_{k+2}]$, $[x_{n-1}, x_n[$ teorema lui Rolle deducem că $f'(X)$ are $n - 2$ rădăcini

$$y' \in [x_1, x_2],\ y_2 \in [x_2, x_3],\ \ldots\ y_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k],\ y_k \in [x_{k+1}, x_{k+2}],$$
$$\ldots\ y_{n-2} \in [x_{n-1}, x_n].$$

Dar $f'(X) = \frac{XP'(X) - P(X)}{X^2}$ aşa încît ecuaţia $P(X) - XP'(X) = 0$ are cel puţin $n - 2$ rădăcini reale.

G.M. 6/1982

159. Fie $f \in \mathbf{Q}[X]$, ireductibil. Presupunem prin reducere la absurd că f admite o rădăcină multiplă α. Dacă notăm cu f' derivata formală a polinomului f atunci se ştie că $f'(\alpha) = 0$. Întrucît f este ireductibil şi grad $f' <$ grad f rezultă că $(f, f') = 1$. Atunci există $g, h \in \mathbf{Q}[X]$ cu proprietatea $g \cdot f + h \cdot f' = 1$ adică $g(X)f(X) + h(X)f'(X) = 1$ $(\forall)X \in \mathbf{Q}$. Dar atunci această relaţie are loc şi pentru $X \in \mathbf{C}$. Făcînd $X = \alpha$ obţinem $0 = 1$ ceea ce este absurd.

160. Evident f nu poate avea gradul par deoarece orice funcţie polinomială de grad par este mărginită inferior. Să presupunem că f are coeficientul termenului de grad maxim pozitiv. Se poate observa uşor că în aceste condiţii există $a \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că f este crescătoare strict pe $[a, \infty)$ şi $f(a) > f(x)$, $(\forall)\ x < a$.

Fie $x \in \mathbf{Z}$, $x > a$. Din relaţiile $f(x + k) > f(x + 1) > f(x) > f(y)$ $(\forall)\ y, k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, $(\forall)y < a$ deducem că $f(x) + 1 = f(x + 1)$.

(am folosit faptul că $f : \mathbf{Z} \mathbf{X} \mathbf{Z}$ fiind surjectivă ia şi valoarea $f(x) + 1$).

Atunci $f(x + 1) = f(x) + 1$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$, de unde $f(1) = f(0) + 1$, $f(2) = f(1) + 1, \ldots f(n) = f(n - 1) + 1$ şi adunînd aceste relaţii găsim că

$f(n) = f(0) + x = k + x$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ unde prin k am notat valoarea $f(0)$. Dacă coeficientul termenului de grad maxim al polinomului f este negativ se deduce că $f(x) = -x + k$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

G.M. 12/1982

161. Fie α o rădăcină a lui $\mathbf{Q}$. Atunci $|P(\alpha)| \leqslant |Q(\alpha)| = 0$ de unde $P(\alpha) = 0$ şi deci α este rădăcină şi pentru P. Rezultă $P(X) = (X - \alpha)P'(X)$ şi $Q(X) = (X - \alpha)Q'(X)$. Avem $|X - \alpha|\,|P'(X)| \leqslant |X - \alpha|\,|Q'(X)|$ $(\forall)X \in \mathbf{R}$ şi deci pentru $X \neq \alpha$ $|P'(X)| \leqslant |Q'(X)|$. Dar trecînd la limită cu $X \to \alpha$, obţinem $|P'(\alpha)| \leqslant |Q'(\alpha)|$ şi deci $|P'(X)| \leqslant |Q'(X)|$ $(\forall)\ X \in \mathbf{R}$. Repetînd raţionamentul de mai sus deducem că orice rădăcină a lui Q' este şi rădăcină a lui P' şi din aproape în a aproape obţinem că toate rădăcinile lui Q se numără printre răd. lui P avînd cel puţin acelaşi ordin de multiplicitate. Rezultă că $P(X) = Q(X) \cdot R(X)$ şi cum $|P(X)| < |Q(X)|$ rezultă că $|R(X)| \leqslant 1$ $(\forall)\ X \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n \to$ răd. lui Q. Asta se poate numai dacă R(X) este o constantă c, $|c| \leqslant 1$. Deci $m = n$ şi $a = cb_i$ deci $|a_i| \leqslant |b_i|$ $(\forall)i = 1, \ldots n$.

§ 2. ECUAŢII ALGEBRICE

162. a) Se face substituţia $x = y\sqrt{3}$ şi se obţine $y^3 - 4y^2 + y + 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = 3\sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

b) $(1 - x^2)^2 + 4x^2 = 4x(1 - x^2) \Rightarrow (1 - x^2 - 2x)^2 = 0$.

c) Se adună în ambii membrii $4x^2 + 4$.

d) Se adună în ambii membrii $\frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$.

e) Ecuația se mai scrie $(x^2+x)^2+(x+5)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x^2+x+i(x+5)][x^2+x-i(x+5)]=0$, etc.

163. a) Din $x_1x_2x_3x_4=-1984$. Atunci $x_1x_2=-32 \Rightarrow x_3x_4=62$. Punînd $x_1+x_2=a$ și $x_3+x_4=b$. Din formulele lui Viète rezultă

$$\begin{cases} a+b=18 \\ 62a-32b=-200 \end{cases} \Rightarrow a=4,\ b=14, \text{ prin urmare}$$

$$k=(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=86.$$

b) Evident $1=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{8} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{x_1x_2x_3x_4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 8}}=1$

unde $x_1x_2x_3x_4=\frac{5}{4}$ egalitatea doar dacă $\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{4}=\frac{x_3}{5}=\frac{x_4}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{5}{4}$, $x_4=2$. Din relațiile lui Viéte rezultă și $a, b. c,$

164. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile primei ecuații, atunci

$y_1=\frac{x_2+x_3}{2}$, $y_2=\frac{x_1+x_3}{2}$, $y_3=\frac{x_1+x_2}{2}$ sînt rădăcinile ecuației a doua, de unde rezultă echivalența.

165. 1). $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=1-4=-3<0$.

Deci ecuația are o singură rădăcină reală.

Dacă $f(x)=x^3-2x^2+x-1$, atunci $f(1)f(2)<0 \Rightarrow x_1 \in (1,2)$.

2) Fie $x_2=\alpha+i\beta$ și $x_3=\alpha-i\beta$ atunci $\text{Re}\ x_i=\alpha$, $i=2,3$.

Din $x_1+x_2+x_3=x_1+2\alpha=2 \Rightarrow x_1=2-2\alpha \Rightarrow 1<2-2\alpha<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ și din $x_1x_2x_3=x_1|x_2|^2=1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{|x_2|^2} \in (1,2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}<$

$<|x_2|<1. \Rightarrow \frac{1}{2}<|x_2|<1 \Rightarrow \frac{1}{2}<|x_i|<1,\ i=2,3.$

166. Dacă $a>0$ ecuația are o singură rădăcină reală x_1.

2) Șirul lui Rolle, $f'(x)=x^2-x(a+1)+a$ cu rădăcinile 1 și a. Rezultă ușor că $x_1 \in (a, 2a)$ dacă $a \geqslant 1$ și $x_1 \in (1,2)$ dacă $0<a<1$. Procedînd ca în exercițiul precedent rezultă 2).

167. Evident se poate scoate factor comun $3x+1 \Rightarrow P\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X)=(3x+1)(X^{4n+7}+X^{4n+3}-X^6+6nX^3-9n^2)=(3X+1)S(X)$.

Arătăm că P nu mai are alte rădăcini negative.

Evident din $S(X)=0 \Rightarrow X^{4n+3}(X^4+1)=(X^3-3n)^2$

dar $x^4+1>0$ și $(x^3-3n)^2 \geqslant 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow x>0$ deci S, nu are rădăcini negative. Pentru $x_0=-\frac{1}{3}$, $Q(X)=0$ are rădăcini reale și distincte.

G.M. 4/1985

168. a) Se arată (şirul lui Rolle) că ecuaţia are o singură rădăcină reală $x_1 \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ şi $x_2 = \alpha + i\beta$, $x_3 = \alpha - i\beta$. Din prima relaţie a lui Viète rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - 2\alpha \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \left(\frac{5}{4}, -1\right)$ deci $0 < x_1 + 2\alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} x_k < 1$.

b) Din ultima relaţie a lui Viétte rezultă $x_1 r^2 = 3$ (unde $|x_2| = |x_3| = r$) şi din $x_1 \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow r \in \left(1, \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$, deci $x_1 + 2r \in (9/2, 3 + 2\sqrt{1{,}2})$.

G.M. 5/1987

169. Evident $f(0) = -17$, $f(1) = 1 > 0$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3} < 0$, $f(2) > 0$ deci $0 < x_1 < 1 < x_2 < x_3 < 2$ şi $x_2 + x_3 > x_1$, $x_3 + x_1 > x_2$ şi $x_1 + x_2 > x_3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} > x_3 \Leftrightarrow 2 > x_3$.

Aşadar x_1, x_2, x_3 pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi.

$$\cos \alpha = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}{2x_1x_2}, \text{ dar } x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} < x_3^2.$$

Evident $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$ şi ultima inegalitate este echivalentă cu

$$3 < x_3^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} < x_3 \text{ care este adevărată deoarece } f(\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

2) $S = \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)} = \frac{1}{3}\sqrt{9p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{pf(p)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

170. $S_1 = -p$, $S_2 = q \Rightarrow p^2 - 3q = S_1^2 - 3S_2 < 0 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 -$ $- 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_2) < 0 \Rightarrow x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 < 0$

deci ecuaţia nu poate avea toate rădăcinile reale, fiind de grad impar, rezultă că are o singură rădăcină reală.

171. Fie αi, $\alpha \in \mathbf{R}$ o rădăcină pur imaginară, ştiind că verifică ecuaţia rezultă $d - b\alpha^2 = 0$, $c\alpha + a\alpha^3 = 0$. Eliminînd α rezultă $ad = bc$ şi $ac > 0$. Reciproc: înmulţind ecuaţia cu $a \neq 0 \Rightarrow ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0$ utilizînd condiţia $ad = bc = 0 \Rightarrow ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ax^2 + c)(ax + b) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$.

172. Arătăm că ecuaţia nu are nici o soluţie raţională. Presupunem prin absurd că ecuaţia ar avea o răd. raţională $x_0 = \frac{p}{q} \Rightarrow ap^3 + bp^2q +$ $+ cp^2q^2 + dq^3 = 0$. Din $ad =$ impar $\Rightarrow a$ şi d impare, dar cum $p \mid d$ şi $q \mid a \Rightarrow p$ şi q impari. Prin urmare $ap^3 + dq^3$ par, deci $pq(bp + cq)$ par $\Rightarrow$ $\Rightarrow bp + cq$ par $\Rightarrow bp + cq - (b + c)$ impar adică $b(p - 1) + c(q - 1)$ impar, absurd, deoarece $p - 1$ şi $q - 1$ sînt numere pare. Prin urmare ecuaţia admite cel puţin o rădăcină iraţională.

173. Dreapta dată este de forma $y = mx + b$. Atunci numerele x_i sînt rădăcini ale ecuației $2x^4 + 7x^3 + (3 - m)x - (5 + b) = 0$ și suma lor, conform relațiilor lui Viéte este $-7/2$ iar media lor aritmetică $\Sigma x_i/4$ este $-7/8$. valoare independentă de dreapta dată.

174. Rădăcinile întregi ale unui polinom cu coeficienți întregi sînt printre divizorii termenului liber. Notînd x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației și ținînd cont de faptul că p este prim rezultă că sînt posibile numai următoarele cazuri:

a) $x_1 = x_2 = 1$ și $x_3 = p$;

b) $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = p$ și c) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -p$.

În cazul a) folosind relațiile lui Viéte obținem $0 = x_1 + x_2 + x_3 = p + 2$ de unde $p = -2$. Analog în cazul b) avem $p - 2 = 0$ și deci $p = 2$. Iar în cazul c) obținem $p = 0$. În toate cazurile $|p| \leqslant 2$, ceea ce contrazice condiția $|p| > 2$.

G.M. 2–3/1982

175. Fie ecuația $ax^2 + (c - b)x + c - d = 0$ cu rădăcina $x = t^2$ $(t > 1)$. Atunci $at^4 + ct^2 + e = bt^2 + d$. Punem $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Din egalitățile date rezultă că $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ și $f(-t) = (at^4 + ct^2 + e) - t(bt^2 + d)$ sînt de semne contrare $(t > 1)$, deci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-t, t]$.

176. a) Fie matricile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{pmatrix}$$

unde $\sigma_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2p$, $\sigma_3 = -3q$, $\sigma_4 = 2p^2$. Trecînd la determinanți $\Delta^2 = -4p^3 - 27q^2$.

b) Cum $\sigma_2 = x_1^2 + x_2^2 + x = -2p \leqslant 0 \Rightarrow$ ecuația are două rădăcini complexe și una reală.

c) Dacă $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$ (sau se elimină x din $f(x) = 0$ și $f'(x) = 0$).

d) Dacă ecuația are rădăcini reale atunci $\Delta^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$. Reciproc, dacă $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$ să presupunem că ecuația are rădăcinile $x_1 = a + ib$, $x_2 = a - ib$ și deoarece

$\Delta^2 = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = -4b^2(9a^2 + b^2) < 0 \Leftrightarrow$ $4p^3 + 27q^2 > 0$, contradicție.

177. Din $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = (-1)^n a^n \Rightarrow |x_k| = 1$, $k = 1, \ldots, n \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{x}_k = \frac{1}{x_k}$, $k = 1, \ldots n$.

Fie $f = (X - x_1) \ldots (X - x_n) \Rightarrow f(a) = (a - x_1) \ldots (a - x_n)$

dar $\overline{f(a)} = (\overline{a} - \overline{x}_1) \ldots (\overline{a} - \overline{x}_n) = (-1)^n \frac{(a - x_1) \ldots (a - x_n)}{a^n x_1 x_2 \ldots x_n} =$

$= \frac{(-1)^n (a - x_1) \ldots (a - x_n)}{a^n (-1)^n a^n} = f(a) \Rightarrow f(a) \in \mathbf{R}$.

178. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k \in \mathbf{N}$. Avem:

$S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = 2$. Relația de recurență pentru S_k este

$$S_{k+3} = S_{k+1} - S_k,\ k \in \mathbf{N}.$$ Rezultă:

$S_3 = S_1 - S_0 = -3$; $S_4 = S_2 - S_1 = 2$ $S_5 = S_3 - S_2 = -5$
$S_6 = S_4 - S_3 = 5$; $S_7 = S_5 - S_4 = -7$; $S_8 = S_6 - S_5 = 10$
$S_9 = S_7 - S_6 = -12$; $S_{10} = S_8 - S_7 = 17$; $S_{11} = S_9 - S_8 = -22$
$S_{12} = S_{10} - S_9 = 29$; $S_{13} = S_{11} - S_{10} = -39$; $S_{14} = S_{12} - S_{11} = 51$
$S_{15} = S_{13} - S_{12} = -68$; $S_{18} = S_{14} - S_{10} = 90$.

179. 1) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$.

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a^2 + 4a + 11}{2}$. Eliminînd pe a între cele două relații obținem $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 11$, sau $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 11 = 0$ sau

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 1.$$

2) $(x_k - 2)^2 \leqslant 1$ pentru $k = 1, 2, 3$.

Rezultă $1 \leqslant x_k \leqslant 3$ pentru $k = 1, 2, 3$.

180. Avem $a^3 - a - 1 = 0$ și $2a^2 - a - b = 0$. Înmulțind prima relație cu 2, iar pe a doua cu $-a$ și adunîndu-le obținem:

$$a^2 - 2a + ab - 2 = 0 \text{ cum } 2a^2 = a + b, \text{ rezultă}$$

$$a + b - 4a + 2ab - 4 = 0 \text{ sau } a(2b - 3) = 4 - b.$$

Dacă $b = \frac{3}{2}$, rezultă $b = 4$ ceea ce este imposibil, deci $b \neq \frac{3}{2}$, iar

$a = \frac{4 - b}{2b - 3}$. Obținem $b = 2\left(\frac{4 - b}{2b - 3}\right)^2 - \frac{4 - b}{2b - 3} \Leftrightarrow b^3 - 4b^2 + 9b - 11 = 0$.

În concluzie polinomul căutat este

$$g(x) = X^3 - 4X^2 + 9X - 11.$$

181. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației.

Rezultă $x_1 > x_2$, $x_3 < 0$, $a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $b = x_1x_2x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Avem $a - b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2(1 - x_3) = (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(1 - x_1 + x_2 + x_1x_2) = (x_1 + x_2)(1 - x_1)(1 - x_2)$. Din $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ rezultă.

$$x_1 + x_2 \geqslant 0,\ 1 - x_1 \geqslant 0,\ 1 - x_2 \geqslant 0.$$

Din inegalitatea mediilor $a - b = (x_1 + x_2)(1 - x_1)(1 - x_2) \leqslant$
$\leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + 1 - x_1 + 1 - x_2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. Deci $a - b \leqslant \frac{8}{27}$.

182. Fie ecuația $x^3 - ax^2 + b = 0$, cu răd. reale. Avem $x_k^3 - ax_k^2 + b = 0$, $k = 1,3$, rezultă $a - x_k = \frac{b}{x_k^2} > 0$ pentru $b = -x_1x_2x_3 > 0$, deci radicalii au sens. Rezultă $\sqrt{a - x_k} = \frac{\sqrt{b}}{|x_k|}$, $k = \overline{1,3}$ de unde:

$$\sqrt{a - x_1} = \frac{\sqrt{b}}{-x_1};\ \sqrt{a - x_2} = \frac{\sqrt{b}}{x_2};\ \sqrt{a - x_3} = \frac{\sqrt{b}}{x_3}.$$

Dar $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=0$. Rezultă că:

$$0=\frac{\sqrt{b}}{x_1}+\frac{\sqrt{b}}{x_2}+\frac{\sqrt{b}}{x_3}=-\sqrt{a-x_1}+\sqrt{a-x_2}+\sqrt{a-x_3}, \text{ adică:}$$

$$\sqrt{a-x_1}=\sqrt{a-x_2}+\sqrt{a-x_3}.$$

183. Cum $x_1x_2x_3=c\geqslant 0$ rezultă 1° $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$ sau

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=a\\ x_1(x_2+x_3)+x_2x_3&=b\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

2° $x_1<0$, $x_2\leqslant 0$, $x_3\geqslant 0$ dar $x_1(a-x_1)+x_2x_3=b$ sau $x_1^2-ax_1+b-x_2x_3=0$. (*).

Dar ecuația $x^2-ax+b-x_2x_3=0$ are rădăcinile x_1^1, x_2^1 nenegative deoarece $x_1^1+x_2^1=a\geqslant 0$ și $x_1^1x_2^1=b-x_2x_3\geqslant 0$. ($x_2x_3\leqslant 0$).
Rezultă că pentru $x_1<0$, $x-ax_1+b-x_2x_3\neq 0$ ceea ce contrazice relația (*). Deci ecuația nu poate avea rădăcini negative.

Altfel: $f=X^3-aX^2+bX-c$, $a, b, c\geqslant 0$.
$f'=3x^2-2ax+b$. Cum $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ rezultă că ecuația $f'(x)=0$ are rădăcinile nenegative. Cum f are toate rădăcinile reale, rezultă că una se va afla între rădăcinile ecuației $f'(x)=0$, iar una la dreapta acestor rădăcini deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin două rădăcini nenegative.

Din $c>0$ rezultă că și a treia rădăcină este nenegativă.

184. $S_1=x_1+x_2+x_3=a>0$
$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$
$S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2-$
$-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)=3c+a\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]>0.$

Dar pentru $n\geqslant 3$ $S_k=aS_{k-1}-bS_{k-2}+cS_{k-3}$.
Dacă $b<0$ se arată prin inducție că $S_k>0$ pentru $k\geqslant 1$.
Dacă $b\geqslant 0$, rezultă că toate rădăcinile sînt pozitive deci $S_k>0$.

185. Notăm $y=\frac{1}{1+x^2}\neq 0$, rezultă $x^2=\frac{1}{y}-1$, deci

$$x\left(\frac{1}{y}-1\right)+a\left(\frac{1}{y}-1\right)+bx+a=0, \text{ de unde } x=\frac{a}{(1-b)y-1}.$$

Înlocuind în ecuația din enunț obținem:

$$a^3+a^3[(1-b)y-1]+ab[(1-b)y-1]^2+a[(1-b)y-1]^3=0$$

sau

$$(1-b)^2y^3+(1-b)(b-3)y^2+(a^2-2b+3)y-1=0.$$

Rezultă că

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{1+x_k^2}=\sum_{k=1}^{3}y_k=\frac{-(1-b)(b-3)}{(1-b)^2}=\frac{b-3}{b-1}=1-\frac{2}{b-1}.$$

186. Dacă cele două ecuații au o rădăcină dublă comună $x=\alpha\neq 0$, rezultă

$$(x-\alpha)^2\left(x+\frac{c}{\alpha^2}\right)=0$$
$$(x-\alpha)^2\left(x+\frac{c'}{\alpha^2}\right)=0$$

Scăzînd cele două ecuații: $(x-\alpha)^2(c-c')=0$. Dacă $c=c'$ ecuațiile mai au o rădăcină comună, deci sînt identice și relația propusă este verificată.

Dacă $c \neq c'$, ecuația ce se obține scăzînd cele două ecuații are $x = \alpha$ rădăcină dublă, adică pentru ecuația $(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$, $\Delta = (b - b')^2 - 4(a - a')(c - c') = 0$ și relația este demonstrată.

Dacă cele două ecuații au $x = 0$ rădăcină dublă comună, rezultă

$a = a' = 0$ și $b = b' = 0$, deci relația este verificată.

187. Deosebim cazurile: 1° $x_1 = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 + ax + a + b) = (x - 1)[x^2 + (1 + a)x + 1 + a + b] = 0$, etc.

2° $x_1 = -1 \Rightarrow -1 + a - b + c = 0 \Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + 1 + a(x^2 - 1) + b(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 + ax - a + b) = (x + 1)(x^2 + (a - 1)x + 1 - a + b) = 0$ etc.

3°. $x_1 = \alpha + i\beta$ $\quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$

$x_2 = \alpha - i\beta$ $\quad a, b, c \in \mathbf{R}$

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = (x + c)(x^2 - 2\alpha x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + (c - 2\alpha c)x + 1.$$

Se elimină α din $\begin{cases} a = c - 2\alpha \\ b = 1 - 2\alpha c \end{cases} \Rightarrow ac - b = c^2 - 1 \Rightarrow ac + 1 = b + c^2$

$$\alpha = \frac{c - a}{2}, \quad |\alpha| \leqslant 1 \Rightarrow |c - a| \leqslant 2 \text{ etc.}$$

188. Se pune ecuația sub forma $(2x^2 + 3x + 2)^2 - 6(2x^2 + 3x + 2) - 7 = 0$.

Se notează $y = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y^2 - 6y - 7 = 1$ cu $y_1 = 1$, $y_2 = -7$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$; $\quad 2x^2 + 3x + 9 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 1$; $x_{3,4} = \frac{-3 \pm i3\sqrt{7}}{4}$.

189. Avem $x^2(x^3 - m^3) - 3mx^3(x - m) - (x - m) = 0 \Rightarrow x_1 = m$ și

$x^2(x^2 + mx + m^2) - 3mx^3 = 1 \Rightarrow x^2(x^2 - 2mx + m^2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x - m) = 1 \Rightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$ și

sau $x(x - m) = -1 \Rightarrow x^2 - mx + 1 = 0$

$$x_{4,5} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}.$$

G.M. 11/1984

190. Soluția I:

$x = 0$ nu este soluție. Împărțim prin x^2 și obținem.

$\sqrt{3}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6\sqrt{3} = 0$. Notăm $t = x - \frac{1}{x}$ rezultă

$\sqrt{3}(t^2 + 2) - 4t - 6\sqrt{3} = 0$ sau $\sqrt{3}t^2 - 4t - 4\sqrt{3} = 0$ cu

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{3}, \text{ adică } t_1 = \sqrt{3} \text{ și } t_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$x^2 - tx - 1 = 0$ rezultă $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$ și

$$x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}}.$$

Observăm că numai soluțiile $x_3 = -\sqrt{3}$ și $x_4 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ convine deoarece $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}[\sqrt{3}]$.

Soluția II:

Căutăm soluție de forma $\alpha\sqrt{3}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$

$$9\sqrt{3}\alpha^4 - 12\sqrt{3}\alpha^3 - 18\sqrt{3}\alpha^2 + 4\alpha\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9\alpha^4 - 12\alpha^3 - 18\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$. Se observă că $\alpha_1 = -1$ și $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ sînt soluții $\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

G.M. 6/1982

191. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuației. Notînd cu

$$S_1 = x_1 + x_2, \quad P_1 = x_1x_2$$
$$S_2 = x_3 + x_4, \quad P_2 = x_3x_4$$

din relațiile lui Viéte rezultă: $\begin{cases} S_1 + S_2 = -a \\ S_1S_2 + P_1 + P_2 = b \\ S_1P_2 + S_2P_1 = -a \\ P_1P_2 = 1 \end{cases}$

Presupunem că $P_1 = 3$, rezultă $P_2 = \frac{1}{3}$ și $\begin{cases} S_1 + S_2 = -a \\ S_1S_2 + \frac{10}{3} = b \quad (2) \\ 3S_1 + \frac{1}{3}S_2 = -a \quad (3). \end{cases}$

Din relațiile (1) și (3) rezultă $S_1 = -\frac{a}{4}$, $S_2 = -\frac{-3a}{4}$, iar din relația (2) $\frac{3a^2}{16} + \frac{10}{3} = b$ sau $9a^2 + 160 = 48b$. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$, cum $3(3a^2 - 16b) = 160$ rezultă că 3 divide 160 ceea ce este fals. Rezultă că produsul a două rădăcini nu poate fi 3. $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{Z}$.

192. Fie $f(X) = X^4 + 8X^3 + aX^2 + bX + 16$

$f(-X) = X^4 - 8X^3 + aX^2 - bX + 16$

Avem $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ rezultă deci

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ deci $f(-X) = (X - 2)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(X) = (X + 2)^4 \Rightarrow a = 24,\ b = 32.$

G.M. 1/1987

193. Fie x_1, x_2 cele două rădăcini. Dacă $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$, relaţiile sînt adevărate. Pentru $x_1 + x_2 \neq 0$ avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a_3}{2a_4} & (1) \\ (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = \frac{a_2}{a_4} & (2) \\ 2(x_1 + x_2)x_1x_2 = -\frac{a_1}{a_4} & (3) \\ x_1^2x_2^2 = \frac{a_0}{a_4} & (4) \end{cases}$$

Din (1) şi (3) $\Rightarrow x_1x_2 = \frac{a_1}{a_3}$ deci $\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 = \frac{a_0}{a_4} \Leftrightarrow a_1^2a_4 = a_0a_3^2.$

Arătăm că $4a_4(a_2a_3 - 2a_1a_4) = a_3^3 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_4} \cdot \frac{a_3}{2a_4} - \frac{a_1}{a_4} = \left(\frac{a_3}{2a_4}\right)^3 \Leftrightarrow$

$- [(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2](x_1 + x_2) + 2x_1x_2(x_1 + x_2) = -(x_1 + x_2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2] = (x_1 + x_2)^3$ relaţie evident adevărată.

G.M. 4–5/1984

194. Rădăcinile comune ale celor două ecuaţii vor fi printre rădăcinile ecuaţiei $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 - x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$ sau $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$. Observăm că $x = 1$ este o rădăcină a acestei ecuaţii şi în acelaşi timp o rădăcină comună a ecuaţiilor iniţiale. Rezultă că $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = (x - 1)(x^2 - 2x - 4)$. Efectuînd împărţirile rezultă că $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x - 1)$ şi

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = (x - 1)(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x + 2)$$

Aşadar prima ecuaţie are rădăcinile $1,\ 1 \pm \sqrt{5},\ 1 \pm \sqrt{2}$, iar a doua ecuaţie are rădăcinile $1,\ 1 \pm \sqrt{5},\ 1 \pm i$.

195. Fie $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ (evident $a, b \in \mathbf{N}$) rădăcinile ecuaţiei. Presupunem $m \leqslant n \leqslant p \leqslant q$. Avem (1) $mn + pq + (m + n)(p + q) = b$ şi

(2) $mn(p + q) + pq(m + n) = b.$

Dar pentru $m \geqslant 2$, (3) $mn(p + q) \geqslant (m + n)(p + q)$

(4) $mpq > pq$

(5) $npq > mn.$

Adunînd relaţiile (3), (4), (5) rezultă $b > b$, absurd, pentru $m \geqslant 2$. Pentru $m = 1$ înlocuind în relaţiile (1) şi (2) obţinem:

(6) $n + pq + (1 + n)(p + q) = b$ şi

(7) $n(p + q) + pq(\alpha + n) = b.$

Scăzînd relaţiile (6) şi (7) obţinem

$$(8)\ p+q=n(pq-1)\geqslant pq-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\geqslant (p-1)(q-1)\Rightarrow p=q=1;\ m=n=1$$

sau $p=1;\ q=2;\ m=n=1$ sau $p=q=2,\ m=1,\ n\in\{1,2\}$ sau $p=2,\ q=3,\ m=1,\ n\in\{1,2\}$. Dintre aceste soluţii convine numai soluţia: $m=1,\ n=1,\ p=2,\ q=3$. deoarece relaţia (8) nu este verificată de celelalte soluţii.

Pentru $n=0$, din relaţiile (1) şi (2) obţinem

(9) $pq+n(p+q)=b$

(10) $npq=b$ scăzînd relaţiile (9) şi (10) rezultă:

$(n-1)pq=n(p+q);\ m=0,\ n=0,\ p=0,\ q\in\mathbf{N}$ este soluţie

$n=1$ implică $p+q=0$ iar $p+q\geqslant 2n=2$

$$\text{pentru } n\geqslant 2\Rightarrow \frac{n}{n-1}\leqslant 2\Rightarrow \frac{pq}{p+q}\leqslant 2\Leftrightarrow pq\leqslant 2|p+q|\Leftrightarrow$$

$\Rightarrow (p-2)(q-2)\leqslant 4$. Cum $p,q\in\mathbf{N},\ n\leqslant p\leqslant q,\ n=\dfrac{pq}{pq-p-q}$.

a) $p=2\Rightarrow x=2\Rightarrow 2q=2(2+q)$, imposibil.

b) $p=3\Rightarrow 3\leqslant q\leqslant 6\Rightarrow p=3,\ q=3,\ n=3\ \ p=3,q=6,\ n=2.$

c) $p=4\Rightarrow q=4\Rightarrow n=2$. În concluzie, ecuaţia poate avea următoarele soluţii numere naturale $(0,0,0,n),\ n\in\mathbf{N}$; $(1,1,2,3)$

$(0,3,3,3)$; $(0,2,3,6)$; $(0,2,4,4)$.

196. a) Evident $P(1)=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}-\dfrac{n-1}{a_1a_n}=0.$

Vom arăta că $P'(1)\neq 0$; $P'(X)=\dfrac{(n-1)X^{n-2}}{a_1a_2}+\dfrac{(n-2)X^{n-3}}{a_2a_3}+\ldots+$

$$+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}\quad rP'(1)=\frac{(n-1)r}{a_1a_2}+\frac{(n-2)r}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=$$
$$=\frac{(n-1)(a_2-a_1)}{a_1a_2}+\frac{(n-2)(a_3-a_2)}{a_2a_3}+\ldots+\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}=$$
$$=(n-1)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+(n-2)\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=n\cdot\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\ldots-\frac{1}{a_n}>0.$$

Dar media armonică a unor numere pozitive este mai mare decît numărul cel mai mic.

Deci $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}>\dfrac{1}{a_1}$ adică $n\cdot\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}-\ldots-\dfrac{1}{a_n}>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow rP'(1)>0.$$

b) Fie $P(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n$.

Aplicăm inegalitatea lui Cauchy—Buniakowski şi obţinem:

$$\left[P^2\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+P^2\left(\frac{X_2}{X_3}\right)+\ldots+P^2\left(\frac{X_n}{X_1}\right)\right](1+1+\ldots+1)\geqslant$$

$$\geqslant\left[P\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+\ldots+P\left(\frac{X_n}{X_1}\right)\right]^2, \text{ dar}$$

$$P\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+P\left(\frac{X_2}{X_3}\right)+\ldots+P\left(\frac{X_n}{X_1}\right)=$$

$$=a_0\left[\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^n+\ldots+\left(\frac{X_n}{X_1}\right)^n\right]+a_1\left[\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{X_n}{X_1}\right)^{n-1}\right]+\ldots$$

$$+\ldots+a_{n-1}\left[\frac{X_1}{X_2}+\ldots+\frac{X_n}{X_1}\right]+na_n\geqslant na_0+na_1+\ldots+na_1=nP(1)$$

$\left(\text{s-a utilizat inegalitatea: } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^k+\ldots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^k\geqslant n\right)$.

$$(\forall)\ k=\overline{1,n}, \text{ etc.}$$

197. Dacă x_k este o rădăcină, observăm că $x_k\neq 1$ şi rezultă

$$x_k^n+2x_k^{n-1}+3x_k^{n-2}+\ldots+nx_k+n+1=$$
$$=x_k^n+x_k^{n-1}+x_k^{n-2}+\ldots+x_k+1+$$
$$+x_k^{n-1}+x_k^{n-2}+\ldots+x_k+1+$$
$$x_k^{n-2}+\ldots+x_k+1+$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$+x_k+1+1=0.$$

sau $\frac{x_k^{n+1}-1}{x_k-1}+\frac{x_k^n-1}{x_k-1}+\frac{x_k^{n-1}-1}{x_k-1}+\ldots+\frac{x_k^2-1}{x_k-1}+\frac{x_k-1}{x_k-1}=$

$$=\frac{x_k^{n+1}+x_k^n+\ldots+x_k-(n+1)}{x_k-1}=\frac{x_k\dfrac{x_k^{n+1}-1}{x_k-1}-(n+1)}{x_k-1}=0.$$

Rezultă $\frac{x_k^{n+1}-1}{x_k-1}=\frac{n+1}{x_k}$.

Rezultă $\sum_{n-1}^{n}\frac{x_k^{n+1}-1}{x_k-1}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=(n+1)\cdot\frac{-n}{n+1}=-n.$

198. Din relaţiile lui Viète avem

$$S_{m-n}=\sum X_1X_1\ldots X_{m-n}=(-1)^{m-n}\frac{b}{a}$$

$$S_n=\sum X_1X_2\ldots X_n=0\ (m-n\neq n)$$

$$S_{m-n}=X_1X_2\ldots X_m\cdot\sum\frac{1}{X_1X_2\ldots X_n}=$$

$$=X_1\cdot X_2\ldots X_m\cdot\sum\frac{\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2\ldots\overline{X}_n}{|X_1|^2\cdot|X_2|^2\ldots|X_n|^2}=$$

$$=\frac{X_1X_2\ldots X_m}{|X_1|^{2n}}\sum\overline{X}_1\overline{X}_2\ldots\overline{X}_n=\frac{X_1X_2\ldots X_m}{|X_1|^{2n}}\cdot S_n=0\Rightarrow\frac{b}{a}=0\Rightarrow b=0.$$

G.M. 4/1980

199. $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$; $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \frac{n-1}{2n} a^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1} x_i\right)^2 - 2 \cdot$

$\cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = a^2 - \frac{n-1}{n} a^2 = \frac{a^2}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{a^2}{n} = \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$. Dar $\frac{\sum x_i^2}{n} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$ egalitate pentru

$$x_1 = \ldots = x_n \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

G.M. 7/1986

200. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$. Dar $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 \Rightarrow a_k = C_n^k$, $k = \overline{1, n-2}$.

G.M. 1/1983

201. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{a}{a} = 1$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n} = \frac{n^2 b}{b} = n^2 \Rightarrow (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{}{x_n}\right) =$

$= n^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$.

202. Dacă ecuația are rădăcinile egale atunci rezultă:

$\left(\frac{-a_1}{na_0}\right)^3 = \left(\frac{-a_3}{c_n^2 a_0}\right)$ rezultă $\frac{a_1^3}{n^3 a_0^3} = \frac{a_3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} a_0}$ sau $\frac{a_1^3}{a_0^2 a_3} = \frac{6n^2}{(n-1)(n-2)}$.

G.M. 9–10/1982

203. $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$; $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} x_i x_j = -n$; $\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i} = 0$;

$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} \frac{1}{x_i x_j} = -n \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 = -2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} x_i x_j = 2n$

$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i^2} = -2 \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{x_i x_j} = 2n \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2i} \frac{1}{x_i^2} = 4n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_{2n}^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2n}|$

Ecuația are un număr par de rădăcini și suma rădăcinilor este zero, rezultă că putem considera.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -x_{n+1} = -x_{n+2} = \ldots = -x_{2n} > 0,$$

rezultă

$$x_1 x_2 \ldots x_{2n} = (-1)^n x_1^{2n} = (-1)^n \Rightarrow x_1^{2n} = 1 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Ecuația dată este deci:

$$(x-1)^n(x+1)^n = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^n = 0 \quad \text{sau}$$

$$x^{2n} - nx^{2n-2} + C_n^2 x^{2n-4} + \ldots + (-1)^{n-1} nx^2 + (-1)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2n-2k} = (-1)^k C_n^k \text{ pentru } k = \overline{0, n},$$

$$a_{2n-2k+1} = 0 \text{ pentru } k = \overline{0, n-1}.$$

204. Coeficienții ecuației fiind întregi rezultă că ecuația are rădăcini, întregi.

1) Presupunem că $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Rezultă $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n x_n$ sau $x_1 x_2 \ldots x_{n-1} = (-1)^n$ adică $x_i \in \{-1, 1\}$ pentru $i = \overline{1, n-1}$.

Dar $n - 1 + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 - 2x_2$. Cum $x_1^2 = 1 \Rightarrow n - 2 + x_n^2 =$

$$= -2x_2 \in \{-2, 2\} \Rightarrow n + x_n^2 \in \{0, 4\}.$$

$$\Rightarrow x_n^2 = 1 \ (n \neq 0) \Rightarrow |x_n| = 1, \ n = 3, \ x_2 = 1,$$

deci $x_1 = \pm 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \pm 1$. Dar $x_1 + x_2 + x_3 = -x_1$, adică

$$2x_1 + 1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_3 = 1,$$

rezultă ecuația $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

2) Dacă ecuația are $x_{n-k+1}, x_{n-k}, \ldots, x_n$, $k \in \mathbf{N}^*$ rădăcini egale cu zero simplificînd prin x^k se obține o ecuație care îndeplinește condițiile de la punctul 1).

Rezultă ecuația: $x^k(x^3 - x^2 - x + 1) = 0$ unde $n = k + 3$.

G.M. 2–3/1982

205. Putem scrie $x^{n-k}(x^k + \alpha) = -\alpha x^k - 1$. Din această relație dacă $x^k = -\alpha$, rezultă $\alpha^2 - 1 = 0$ rezultă $|\alpha| = 1$, rezultă $|x|^k = |\alpha| = 1$, rezultă că ecuația are rădăcini de modul unu. Pentru $x^2 + \alpha \neq 0$ avem: $|x|^{n-k} |x^k + \alpha| = |\alpha x^k + 1|$ iar dacă $x = \rho(\cos t + i \sin t)$, $\rho \geqslant 0$ este o rădăcină a ecuației, rezultă:

$$\rho^{n-k} \sqrt{\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + 1} \quad \text{sau}$$

$$\rho^{2n-2k} = \frac{\alpha^2\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + 1}{\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + \alpha^2} \qquad \rho^{2n-2k} - 1 = \frac{(1-\alpha^2)(1-\rho^{2k})}{\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + \alpha^2}$$

$$\text{sau } (\rho^2 - 1)(\rho^{2n-2k-2} + \rho^{2n-2k-4} + \ldots \rho^2 + 1) =$$

$$= \frac{(1-\alpha^2)(1-\rho^2)(1 + \rho^2 + \ldots + \rho^{2k-2})}{\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + \alpha^2}.$$

Rezultă $\rho^2 = 1$, deci $\rho = 1$, sau

$$\rho^{2n-2k-2} + \ldots + \rho^2 + 1 = \frac{-(1-\alpha^2)(1 + \rho^2 + \ldots + \rho^{2k-2})}{\rho^{2k} + 2\alpha\rho^k \cos kt + \alpha^2}.$$

Această egalitate este imposibilă pentru $|\alpha| \leqslant 1$, deoarece în membrul stîng al egalității avem o cantitate strict pozitivă, iar în membrul drept o cantitate negativă.

Rezultă $\rho = 1$, adică toate rădăcinile au modulul unu.

G.M. 2/1986

206. Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c$

$f' = 3X^2 + 2aX + b$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are rădăcini reale, deoarece $\Delta = a^2 - 3b < 0$, deci ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală. Dacă x_0 este rădăcină reală atunci

$$x_0(x_0^2 + ax_0 + b) + c = 0. \text{ Rezultă } |x_0|\,|x_0^2 + ax_0 + b| = |c|.$$

Minimul expresiei $|x^2 + ax_0 + b|$ este

$$\left|\frac{a^2 - 4b}{4}\right| = \frac{a^2 - 4b}{4} \text{ pentru } a^2 < 3b < 4b. \text{ Deci}$$

$$0 < |x_0|\frac{a^2 - 4b}{4} \leqslant |c| \text{ de unde } |x_0| \leqslant \frac{4|c|}{a^2 - 4b}.$$

207. $x^n + 1 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Rezultă că:

$$0 = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{(x^n + 1)^1}{x^n + 1}$$

sau $nx^{n-1} = 0$, $\Rightarrow x = 0$.

208. Observăm că ecuația nu admite rădăcina $x = 1$

Fie $f = X^n + X^{n+1} + \ldots + X + 1 = (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$

Pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avem:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}. \text{ Derivînd obținem:}$$

$$\frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{-1}{(x - x_1)^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{-1}{(x - x_n)^2}$$

Pentru $x = 1$ obținem:

$$\frac{-f''(1)f(1) + [f'(1)]^2}{[f(1)]^2} = \frac{1}{(1 - x_1)^2} + \frac{1}{(1 - x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(1 - x_n)^2}.$$

Dar $f(1) = n + 1$; $f'(1) = n + (n - 1) + \ldots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$

$$f''(1) = n(n - 1) + (n - 1)(n - 2) + \ldots + 2 \cdot 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(k + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} + \frac{(n - 1)n}{2} =$$

$$= \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3}. \text{ Rezultă: } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_k)^2} = \frac{\frac{n^2(n + 1)^2}{4} - \frac{(n - 1)n(n + 1)^2}{3}}{(n + 1)^2} =$$

$$= \frac{n^2}{4} - \frac{n(n - 1)}{3} = \frac{n(3n - 4n + 4)}{12} = \frac{n(4 - n)}{12}.$$

209. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rădăcinile ecuației $x_k = a + (k-1)r$.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 = na + \frac{n(n-1)}{2} r$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = na^2 + n(n-1)r + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} r^2 = a_1^2 - 2a_2.$$

Din aceste relații se pot calcula a și r.

210. Fie $x_i = k\alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, $|\alpha_i| = 1$, rădăcinile ecuației

$$-a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ; \quad -k^2 \frac{a_{n-1}}{a_n} = k^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} =$$

$$= k^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k\alpha_i} = k \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \quad \text{Rezultă } a_1 + k^2 \frac{a_{n-1}}{a_n} = -k \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \bar{\alpha}_i) \in \mathbf{R}.$$

211. Fie $f(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n}$; dacă $x_i \in (0, 1)$, $i = \overline{1,2n}$, sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, atunci

$$f(X) = a_0(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_{2n}).$$

Deoarece $a_0 > 0$, deducem $f(0) > 0$ și $f(1) > 0$. Avînd în vedere că $f(x) \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Z}$, găsim că

$$1 \leqslant f(0) \cdot f(1) = a_0^2\, x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2n}(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{2n}) =$$

$$= a_0^2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) x_2 (1 - x_2) \cdots x_{2n}(1 - x_{2n}).$$

Dar $\alpha(1 - \alpha) \leqslant \frac{1}{4}$ $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ cu egalitate pentru $\frac{1}{2}$, obținem

$$1 \leqslant a_0^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \quad \text{deci } a_0^2 > 4^{2n}, \text{ de unde } a_0 \geqslant 4^n + 1.$$

R.M.T. 1/1987

212. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f. Rezultă

$$(1)\ x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$(2)\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b.$$
$$(3)\ x_1x_2x_3 = -c.$$

Presupunem că f admite două rădăcini raționale. Cum $a, b, c \in \mathbf{Z}$ rezultă că și a treia rădăcină este rațională. Deoarece coeficientul lui x^3 este egal cu unitatea rezultă că polinomul are trei rădăcini întregi. Cele trei rădăcini întregi nu pot fi toate de aceeași paritate deoarece rezultă că a, b, c au aceeași paritate ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că f are cel puțin o rădăcină număr par, deci c este număr par. Dacă celelalte două rădăcini au aceeași paritate, rezultă că și a este par și se contrazice ipoteza.

Dacă celelalte două rădăcini sînt de parități diferite rezultă că b este număr par, deoarece f are două rădăcini pare și iar se contrazice ipoteza. Rezultă că f nu poate avea mai mult de o rădăcină rațională.

G.M. 11–12/1988

213. $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right| = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| = 1$. Presupunem $|x_i| > n$ pentru $i = \overline{1, n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_i|} < \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x_i|} < 1 = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right|.$$

Absurd. Rezultă că există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $|x_i| \leqslant n$.

G.M. 4–5/1984

214. Dacă rădăcinile sînt egale, atunci $f(X) = (X - c)^n$ și $a_1 = nc$, $a_2 = \frac{n(n-1)}{2}c^2$. Rezultă $(n-1)a_1^2 = n^2(n-1)c^2 = 2na_2$

Reciproc: dacă $(n-1)a^2 = 2na_2$, atunci $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 -$

$$- 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 - 2n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j =$$

$$= (n-1)a_1^2 - 2na_2 = 0. \text{ Rezultă } x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

215. Cum $a_n \neq 0$ rezultă că f are rădăcini diferite de zero.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului f. Cum

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = 0$ și $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{x_ix_j} = 0$ rezultă că: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = 0$ și că f nu are toate rădăcinile reale.

G.M. 4/1985

216. Fie $z \in \mathbf{C}$, $P(Z) = 0$ și $|Z| = r$. Din

$$Z^n = -(a_1Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n) \text{ rezultă}$$

$$|Z^n| \leqslant |a_1|\,|Z^{n-1}| + \ldots + |a_{n-1}|\,|Z| + |a_n| \leqslant$$

$$\leqslant |Z^{n-1}| + \ldots + |Z| + 1 \text{ sau } r^n \leqslant r^{n-1} + \ldots + r + 1.$$

Dacă $r \leqslant 1$, proprietatea din enunț este verificată. Dacă $r > 1$, cum

$$r^{n-1} + \ldots + r + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ avem } r^n \leqslant \frac{r^n - 1}{r - 1} \text{ sau}$$

$$r^{n+1} - 2r^n + 1 \leqslant 0, \text{ sau } r - 2 \leqslant -\frac{1}{r^n} < 0, \text{ deci } r < 2.$$

217. Fie $Z \in \mathbf{C}$. $P(Z) = 0$ și $|Z| = r$.

Din $Z^n = -a_1Z^{n-1} - \ldots - a_{n-1}Z - a_n$, rezultă

$$|Z^n| \leqslant |a_1|\,|Z^{n-1}| + \ldots + |a_{n-1}|\,|Z| + |a_n| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|Z^{n-1}| + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}|Z| + \frac{1}{2^n} \text{ sau}$$

$$r^n \leqslant \frac{1}{2}r^{n-1} + \frac{1}{4}r^{n-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}r + \frac{1}{2^n} \text{ sau încă}$$

$$(2r)^n \leqslant (2r)^{n-1} + (2r)^{n-2} + \ldots + (2r) + 1 \quad (*).$$

Dacă $r \leqslant \frac{1}{2}$, proprietatea din enunț este verificată.

Pentru $r > \frac{1}{2}$, inegalitatea $(*)$ se mai scrie $(2r)^n \leqslant \frac{(2r)^n - 1}{2r - 1}$ sau

$$(2r)^{n+1} - 2(2r)^n + 1 \leqslant 0 \text{ sau } (2r)^n(2r - 2) + 1 \leqslant 0 \Rightarrow r < 1.$$

218. Se observă că dacă z este o rădăcină a ecuației, atunci și $\frac{1}{\overline{z}}$ este rădăcină. Deci, dacă $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n+1}$ (1) sînt rădăcinile ecuației atunci $\frac{1}{\overline{Z_1}}, \frac{1}{\overline{Z_2}}, \ldots \frac{1}{\overline{Z_{2n+1}}}$ (2) sînt aceleași rădăcini, eventual în altă ordine. Deci pentru fiecare Z_i există Z_j astfel ca $Z_i = \frac{1}{\overline{Z_j}}$. Dacă $i = j$ demonstrația e terminată.

În caz contrar, cum din $Z_i\overline{Z_j} = 1$, prin conjugare avem $\overline{Z_i}Z_j = 1$, deci și $Z_j = \frac{1}{\overline{Z_i}}$, eliminăm din (1) perechea Z_i, Z_j și din (2) perechea egală $\frac{1}{\overline{Z_j}}, \frac{1}{\overline{Z_i}}$. Cele $2n - 1$ numere rămase în (1) trebuie să coincidă cu cele $2n - 1$ numere rămase în (2) și raționamentul de mai sus continuă. Putem elimina însă cel mult n perechi Z_i, Z_j, $I \neq j$. (deci $2n$ numere) din (1) și corespunzător din (2), rămînînd un Z_k în (1) și egalul său $\frac{1}{\overline{Z_k}}$ în (2). Deci $Z_k \cdot \overline{Z_k} = 1$, $|Z_k| = 1$, ceea ce încheie demonstrația.

219. $(n - 1)\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2n \cdot < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(\sum x_i)^2 - 2nS_2 = (n - 1)S_1^2 - 2nS_2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n[(\sum x_i)^2 - 2S_2] - S_1^2 < 0$$

$$n\sum x_i^2 - S_1^2 = (n - 1)\sum x_i^2 - 2S_2 < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n}{}' (x_i - x_k)^2 < 0.$$

220. Presupunem $n \geqslant 3$. Din formulele lui Viète rezultă

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1, \quad |x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n| = 1.$$

Prin urmare $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j = 1 - 2\varepsilon.$

unde $\varepsilon = \pm 1$. Dacă $\varepsilon = 1$ atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -1$, imposibil.

Fie $\varepsilon = -1 \Rightarrow \sum_{=1}^{n} x_i^2 = 3$. Evident, polinomul $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + 1 = g$ satisface condiția, rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ satisfac condiția $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 3$. Dar $9 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \geqslant n^2 \Leftrightarrow n \leqslant 3$, deci $n = 3$. Pentru $n = 3$ $x^3 + x^2 - x - 1$, $x^3 - x^2 - x + 1$. Pentru $n = 2$ $x^2 - x - 1$, $x^2 + x - 1$, și pentru $n = 1$, $x - 1$, $x + 1$.

221. Considerăm funcția polinomială $f_n(x)$.

Evident $f_n(x) \geqslant 1$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$.

Fie $x \in (-\infty, 0)$, atunci $f_n'(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \frac{X^n - 1}{X - 1}$.

1) Dacă n impar, atunci $f_n'(x) > 0$ și f_n este crescătoare și deoarece $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) < 0$ și $f_n(0) > 0$, rezultă că $f_n(x) = 0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $(-\infty, 0)$.

2) Fie n par, atunci $f_n'(x) > 0$ pentru orice $x > -1$, iar $f_n'(x) < 0$ pentru $x < -1$.

Cea mai mică valoare se obține pentru $x = -1$.

Arătăm că $f_n(-1) > 0{,}3 \Rightarrow f_n(x) > 0{,}3$.

Se demonstrează prin inducție că $f_n(-1) \geqslant 0{,}3 + \frac{1}{2n}$ pentru orice $n \geqslant 6$

$f_6(-1) = 0{,}3 + \frac{1}{12}$.

$$f_n(-1) = f_{n-2}(-1) - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \geqslant 0{,}3 + \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)} \geqslant 0{,}3 + \frac{1}{2n}$$

pentru orice n par.

(pentru $n = 2$ și $n = 4$ se verifică)

222. Dacă $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, atunci

$$S = \sum_{k=1}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_k \frac{\bar{x}_k}{x_k} x_{k+1} \ldots x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \frac{\bar{x}_k}{x_k} =$$

$$= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{x}_k}{x_k} \in \mathbf{R}, \text{ deoarece dacă } x_k \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{\bar{x}_k}{x_k} = 1 \text{ iar dacă}$$

$x_k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, atunci în suma dată se grupează termenii doi câte doi în forma:

$$\frac{\bar{x}_i}{x_i} + \frac{\bar{x}_j}{x_j}, \text{ unde } x_i = \bar{x}_j \text{ și deci ultima sumă are forma}$$

$$\frac{\bar{x}_i}{x_i} + \frac{x_i}{\bar{x}_i} = \frac{x_i^2 + \bar{x}_i^2}{x_i \bar{x}_i} \in \mathbf{R}.$$

223. Deoarece $f(0) \neq 0$, ecuația dată va avea aceleași rădăcini cu ecuația $g(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k} = 0$. Deoarece $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ și $\lim_{x \to \infty} g(x) = 1$, rezultă că ecuația $g(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină pozitivă, dar cum $g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k a_k}{x^{k+1}} > 0$ $(\forall)$ $x \in (0, \infty) \Rightarrow g$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și deci ecuația are o singură rădăcină pozitivă x_1. Fie $x_i \neq x_1$, $i = 2, 3, \ldots, n$, altă rădăcină a ecuației.

Atunci:

$$1 = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_i^k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|x_i|^k}, \text{ iar } 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_1^k}$$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{1}{|x_i|^k} - \frac{1}{x_1^k} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{x_1^k - |x_i|^k}{x_1^k \cdot |x_i|^k} =$$

$$= \frac{(x_1 - |x_i|)A}{(x_1 |x_i|)^k} \Rightarrow |x_i| \leqslant x_1 \text{ (evident } A > 0).$$

Dacă $|x_i| = x_1$ rezultă suma modulelor egală cu modulul sumei, deci $x_i > 0 \Rightarrow x_i = 0$, absurd.

224. Din $f(x_0) = 0 \Rightarrow -a_0 x_0^n = a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_0|\,|x_0|^n \leqslant |a_1|\,|x_0|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|\,|x_0| + |a_n| < |a_0| \dfrac{|x_0|^n - 1}{|x_0| - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow |x_0|^{n+1} - 2|x_0|^n + 1 < 0 \Rightarrow |x_0| < 2.$

225. Din formulele lui Viète, rezultă:

$$\sum x_1 x_2 \ldots x_k = (-1)^k a_k \Rightarrow |a_k| \leqslant \left|\sum x_1 x_2 \ldots x_k\right| \leqslant$$

$$\sum |x_1|\,|x_2| \ldots |x_k| \leqslant C_n^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1 < 2^n.$$

226. Fie $x_0 = t$ o rădăcină a ecuației, atunci:

$$0 = (t-1)\,P(t) = a_0 t^{n+1} + (a_1 - a_0)t^n + \ldots + (a_n - a_{n-1})t - a_n$$

deci $a_n = a_0 t^{n+1} + (a_1 - a_0)t^n + \ldots + (a_n - a_{n-1})t$.
Trecînd la module, rezultă:

$$a_n \leqslant a_0 |t|^{n+1} + (a_1 - a_0)\,|t|^n + \ldots + (a_n - a_{n-1})\,|t|$$

adică $P(|t|)(|t| - 1) \geqslant 0$ și cum $P(|t|) > 0 \Rightarrow |t| \geqslant 1$.

227. Din $a^2 = 2b + 2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, dar

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{2 - x_3^2}{2} \Rightarrow -2\sqrt{1 - \frac{x_3^2}{2}} < x_1 + x_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{1 - \frac{x_3^2}{2}} \quad (1) \text{ și } x_1x_2 \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = 1 - \frac{x_3^2}{2}.$$

Presupunînd $x_3 \geqslant 0 \Rightarrow x_1x_2x_3 \leqslant x_3 - \dfrac{x_3^3}{2} \Rightarrow x_1x_2x_3 - x_3 \leqslant -\dfrac{x_3^3}{2}$; (2)

Din (1) și (2) obținem $x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 < -\dfrac{x_3^3}{2} + 2\sqrt{1 - \dfrac{x_3^2}{2}} \leqslant 2$
și la fel $x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3 \leqslant 2$, deci
$|x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3| = |a - c| \leqslant 2$. Dacă $x_3 < 0$ se procedează în mod analog, sau se face substituția $y_i = -x_i$, cu $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$.

228. Evident $a_n \neq 1$ și verifică ecuația: $y_n = x^{n+2} - x^{n+1} - x^n + 1 = 0$
Șirul lui Rolle pentru y_n arată că acest polinom are pe $(0, \infty)$ două rădăcini 1 și a_n deci $a_n^{n+2} - a_n^{n+1} - a_n^n + 1 = 0$.
Se remarcă că $a_n > 1$ și a_n este un șir descrescător. Într-adevăr, trebuie să avem:

$$a_{n+1}^{n+1}(a_{n+1}^2 - a_{n+1} - 1) = a_n^n(a_n^2 - a_n - 1) \Rightarrow a_{n+1} < a_n,$$

deci (a_n) convergent. Notînd cu l limita șirului a_n avem $l = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

229. Conform graficului funcției $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 10)$ rezultă că pentru $m = 0$ ecuația are numai trei soluții întregi $x \in \{0, 1, -1\}$. Pentru $m \neq 0$

ecuația $f(x) = m$ nu are mai mult de trei rădăcini în afara intervalului $[-1, 1]$, iar pe intervalul $[-1, 1]$ nu are rădăcini întregi.

230. Notînd $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \ldots$, $\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n$ și $S_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$.

Pentru $m \leqslant n - 1$, folosim relațiile lui Newton care leagă sumele S_m de σ_m și inducția $(S_m - \sigma_1 S_{m-1} + \sigma_2 S_{m-2} - \ldots (-1)^m \sigma_m S_0 = (-1)^m \sigma_m)$. Pentru $m = n$ se scrie că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică ecuația și se adună relațiile.

NUMERE COMPLEXE
ŞI INEGALITĂŢI

§ 1. IDENTITĂŢI

1. La toate identităţile se utilizează relaţia $z\bar{z} = |z|^2$ şi se fac calculele.

2. Ţinînd seama că $\mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, identitatea se mai scrie

$z_1 \frac{\bar{z}_2 z_3 - z_3\bar{z}_2}{2i} + z_2 \frac{\bar{z}_3 z_1 - z_3\bar{z}_1}{2i} + z_3 \frac{\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2}{2i} = 0$ care este evident verificată

b) rezultă din a)

3. Dacă există $\lambda \in [0, +\infty)$ astfel încît $z' = \lambda z$, atunci
$|z + z'| = |z + \lambda z| = |z(1 + \lambda)| = |z|(1 + \lambda) = |z| + \lambda|z| = |z| + |z'|$
— Reciproc, dacă $|z + z'| = |z| + |z'|$ şi cel puţin unul din numere este nul, atunci există pentru λ valoarea zero.

Presupunem că numerele z şi z' sînt nenule, atunci egalitatea se poate împărţi cu $|z|$ şi obţinem $\left|1 + \frac{z'}{z}\right| = 1 + \left|\frac{z'}{z}\right|$. Notînd cu $u = \frac{z'}{z}$ avem:

$$|1 + u| = 1 + |u| \Rightarrow |1 + u|^2 = (1 + |u|)^2$$
$$\Rightarrow (1 + u)(1 + \bar{u}) = 1 + |u|^2 + 2|u| \Rightarrow u + \bar{u} = 2|u|.$$

Dacă $u = x + iy$, atunci ultima egalitate devine $x = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y = 0$ şi $x > 0$ deci $u = x = \frac{z'}{z} \Rightarrow z' = ux$ şi luînd $\lambda = u \Rightarrow z' = \lambda z$.

* Observaţie: se arată la fel că $|z - z'| = |z| + |z'|$, dacă şi numai dacă există $\lambda \in (-\infty, 0]$ astfel încît $z' = \lambda z$.

4. 1) Membrul întîi al egalităţii (1) se scrie

$$(n - 2)\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + (z_1 + \ldots + z_n)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n) =$$
$$= (n - 1)\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n} (z_k\bar{z}_s + \bar{z}_k z_s)$$

Membrul al doilea se scrie

$$\sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n}^{n} (z_k + z_s)(\bar{z}_k + \bar{z}_s) = (n - 1)\sum_{k=1}^{n} (z_k)^2 + \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n}^{n} (z_k\bar{z}_s + \bar{z}_k z_s)$$

2) Egalitatea se mai scrie

$$n\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n}^{n} (z_k - z_s)(\bar{z}_k - \bar{z}_s) \Leftrightarrow (n - 1)\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n}^{n} (z_k\bar{z}_s + \bar{z}_k z_s) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n}^{n} |z_k|^2 + |z_s|^2 - \sum_{1 \leqslant k < s \leqslant n} (z_k\bar{z}_s + \bar{z}_k z_s)$$

5. a) Dacă notez cu $E(z)$ oricare din expresiile de la punctul a) rezultă $\overline{E(z)} = E(z)$, deci $E(z) \in \mathbf{R}$

b) Dacă notez cu $E(z)$ oricare din expresiile de la punctul b) rezultă că $\overline{E(z)} = -E(z)$, deci $E(z)$ este imaginar.

c) în mod analog.

6. Din $z\bar{z} = z'\bar{z}' = r^2$ rezultă

$$\frac{\overline{z+z'}}{r^2+zz'} = \frac{\bar{z}+\bar{z}'}{r^2+\bar{z}\bar{z}'} = \frac{\frac{r^2}{z}+\frac{r^2}{z'}}{r^2+\frac{r^4}{zz'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+r^2}{zz'}} = \frac{z+z'}{z^2+zz'}$$

deci $\frac{z+z'}{r^2+zz'} \in \mathbf{R}$. Se poate utiliza şi forma trigonometrică a numerelor complexe.

7. Din $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$,

atunci $\left(\overline{\frac{z^n}{1+z^{2n}}}\right) = \frac{\bar{z}^n}{1+\bar{z}^{2n}} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{z^n}}{1+\frac{1}{z^{2n}}} = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$,

deci $\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbf{R}$.

8. Se ştie că $E(z)$ este pur imaginară dacă şi numai dacă $\overline{E(z)} = -E(z)$

Fie deci $\left(\overline{\frac{z-1}{z+1}}\right) + \frac{z-1}{z+1} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} + \frac{z-1}{z+1} = \frac{2(z\bar{z}-1)}{z\bar{z}+z+\bar{z}+1} =$

$$= \frac{2(|z|^2-1)}{|z|^2+z+\bar{z}+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

9. Evident

$$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = \frac{1+\bar{z}+\bar{z}^2}{1-\bar{z}+\bar{z}^2} \Leftrightarrow (1+z+z^2)(1-\bar{z}+\bar{z}^2) =$$

$$= (1-z+z^2)(1+\bar{z}+\bar{z}^2) \Leftrightarrow (z-\bar{z})(|z|^2-1) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

(deoarece $z - \bar{z} \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$)

10. $$\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right|^2 = \frac{z-z'}{1-\bar{z}z'} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{z}'}{1-z\cdot\bar{z}'} = \frac{z\bar{z}+z'\bar{z}'-\bar{z}z'-\bar{z}'z}{1+z\bar{z}z'\bar{z}'-\bar{z}z'-z\bar{z}'} =$$

$$= \frac{1+z'\bar{z}'-z\bar{z}'-\bar{z}z'}{1+z'\bar{z}'-\bar{z}z'-z\bar{z}'} = 1 \Rightarrow \frac{z-z'}{1-\bar{z}z'} = 1$$

La fel se arată că $\left|\frac{z-z'}{1-z\bar{z}'}\right| = 1$ care este echivalentă cu prima egalitate după dubla substituţie $z \leftrightarrow z'$.

11. Fie $|z| = 1$, atunci $\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2 = \left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right) \cdot \left(\overline{\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}}\right) = \left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right) \cdot \left(\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{b\bar{z}+a}\right) =$

$$= \frac{a\bar{a}z\bar{z}+b\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z+b\bar{b}}{b\bar{b}z\bar{z}+b\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z+a\bar{a}} = \frac{a\bar{a}+b\bar{b}+b\bar{a}\bar{z}+\bar{a}bz}{b\bar{b}+a\bar{a}+b\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z} = 1$$

* Reciproc, fie

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1 \Rightarrow \left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)\cdot\overline{\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{a\bar{a}z\bar{z}+b\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z+b\bar{b}}{b\bar{b}z\bar{z}+b\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z+a\bar{a}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a|^2|z|^2 + b\bar{a}\bar{z} + a\bar{b}z + |b|^2 = |b|^2\cdot|z|^2 + b\bar{a}\bar{z} + a\bar{b}z + |a|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|z|^2-1)(|a|^2-|b|^2) = 0 \text{ şi deoarece } |a| \neq |b| \Rightarrow |z| = 1$$

12. Se utilizează echivalenţa $E(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \overline{E(z)} = E(z)$ şi se ţine seama de $z_i \cdot \bar{z}_i = |z_i|^2 = 1$

a) $$\overline{\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbf{R}$$

b) $$\overline{\left(\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{1+z_1z_2z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_2+\bar{z}_3\bar{z}_2+\bar{z}_3\bar{z}_1}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}}{1+\frac{1}{z_1z_2z_3}} = \frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{1+z_1z_2z_3}$$

deci expresia dată este reală.

13. $|w| \leqslant 1 \Leftrightarrow ||w^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow w\bar{w} \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$$v\frac{z-u}{1-\bar{u}z}\cdot v\frac{\bar{z}-\bar{u}}{1-u\bar{z}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(z-u)(\bar{z}-\bar{u})}{(1-\bar{u}z)(1-u\bar{z})} \leqslant 1$$

şi deoarece numitorul este $(1-\bar{u}z)^2 > 0$ ultima inegalitate este echivalentă cu $z\bar{z} + u\bar{u} - u\bar{z} - \bar{u}z \leqslant 1 - \bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{u}z\bar{z} \Leftrightarrow |z|^2 + |u|^2 - 1 - |u|^2|z|^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (|z|^2-1)(1-|u|^2) \leqslant 0$ şi cum $|u| < 1$ ultima inegalitate este echivalentă cu $|z| \leqslant 1$.

14. a) Fie $$\overline{\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|}+\frac{|\bar{z}|}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|}+\frac{|z|}{\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{|z|z}+\frac{|z|z}{z\cdot\bar{z}} =$$

$$= \frac{|z|^2}{|z|z}+\frac{|z|z}{|z|^2} = \frac{|z|}{z}+\frac{z}{|z|}, \text{ deci } \frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z} \in \mathbf{R}.$$

Dacă punem $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z} = \frac{a}{|z|}$ cu $a \in \mathbf{R}$, obţinem

$$z^2 = az - |z|^2 \Rightarrow z^2 = az + b$$

b) Se demonstrează prin inducţie.

Pentru $n = 1$, $z = 1\cdot z + 0$ iar pentru $n = 2$, $z^2 = az + b$ presupunînd relaţia adevărată pentru n, adică $z^n = a_nz + b_n$, trebuie să demonstrăm că $z^{n+1} = a_{n+1}z + b_{n+1}$. Într-adevăr $z^{n+1} = z\cdot z^n = z(a_nz+b_n) = a_nz^2 + b_nz =$ $= a_n(az+b) + b_nz = a_naz + b_nz + a_nb = (a_na + b_n)z + a_nb = a_{n+1}z + b_{n+1}$ unde $a_na + b_n = a_{n+1}$ şi $a_nb = b_{n+1}$ (evident din $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ rezultă uşor că $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbf{R}$)

15. Din $|z_i| = 1 \Leftrightarrow z_i \cdot \overline{z_i} = 1$, $i = \overline{1, 2, 3, \ldots, n}$, obținem

$$\left(\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}\right) = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) \cdots (\bar{z}_n + \bar{z}_1)}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \cdots \left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdots \frac{1}{z_n}} = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$$

deci expresia dată este reală.

16. Dacă numerele au același modul, atunci

$$z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = \ldots = z_n \bar{z}_n = r^2 \Rightarrow \bar{z}_k = \frac{r^2}{z_k}\ ;\ k = \overline{1, \ldots, n}$$

$$\overline{E} = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n)(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_{n-1} + \ldots + \bar{z}_2 \bar{z}_3 \cdots \bar{z}_n)}{(\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_2 \bar{z}_3 + \ldots + \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n)(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_{n-2} + \ldots + \bar{z}_3 \bar{z} \cdots \bar{z}_n)} =$$

$$= \frac{r^2\left(\frac{1}{z_1} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right) \cdot (r^2)^{n-1}\left(\frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{z_2 z_3 \cdots z_n}\right)}{r^4\left(\frac{1}{z_1 z_2} + \ldots + \frac{1}{z_{n-1} z_n}\right) \cdot (r^2)^{n-2}\left(\frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{z_3 z_4 \cdots z_n}\right)} =$$

$$= \frac{(z_1 z_2 \cdots z_{n-2} + \ldots + z_2 z_3 \cdots z_n)(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}{(z_1 z_2 \cdots z_{n-1} + \ldots + z_3 z_4 \cdots z_n)(z_1 z_2 + \ldots + z_{n-1} z_n)} = E \Rightarrow E \in \mathbf{R}$$

G.M. 7–8/1987

17. Din $|z_i| = r$, $i = \overline{1, n} \Rightarrow z_i \bar{z}_i = r^2$, $i = \overline{1, n}$ rezultă $(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3) \ldots (z_{n-1} + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_1) =$

$$= \left(\frac{r^2}{\bar{z}_1} + \frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{\bar{z}_2} + \frac{r^2}{z_3}\right) \cdots \left(\frac{r^2}{\bar{z}_{n-1}} + \frac{r^2}{z_n}\right)\left(\frac{r^2}{\bar{z}_n} + \frac{r^2}{z_1}\right) =$$

$$= r^{2n} \frac{(z_2 + \bar{z}_1)(z_3 + \bar{z}_2) \cdots (z_n + \bar{z}_{n-1})(z_1 + \bar{z}_n)}{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 \cdots z_n \bar{z}_n} =$$

$$= \frac{r^{2n}(z_1 + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_{n-1}) \cdots (z_3 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_1)}{r^{2n}} = (z_1 + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_{n-1}) \cdots$$

$$\ldots (z_3 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_1).$$

G.M. 4/1987

18. $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{1}{z\bar{z}} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = 4 \Leftrightarrow (z\bar{z})^2 + 2z\bar{z} + 1 = 4z\bar{z} \Leftrightarrow (z\bar{z})^2 - 2z\bar{z} + 1 = 0$

de unde rezultă $z\bar{z} = 1$ deci $|z| = 1$.

19. Vom da o soluție fără a utiliza forma trigonometrică a nr. complexe. Deoarece $\overline{\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}} = \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbf{R}$ deci $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \pm 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = \pm z\bar{z} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = \pm 1$ (1) (deoarece $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, adică

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \pm 1 \Rightarrow z^4 \pm z^2 + 1 = 0,$$

dar $z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$ și $z^4 - z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 - 2z^2 =$

$= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$ de unde rezultă prin rezolvarea celor patru ecuații de gr. II, opt numere complexe care satisfac egalitatea din enunț (sau din relația (1) punînd $z = x + iy$ și $\bar{z} = x - iy$ rezultă $2(x^2 - y^2) = \pm 1$ care împreună cu $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$ conduce la rezolvarea a două sisteme în x și y)

20. *Soluția I*

Fie $z = x + iy$ cu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$|z^2 + \bar{z}^2| = 2 \Leftrightarrow |2x^2 - 2y^2| = 2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \pm 1$ de unde obținem sistemele $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$ din care rezultă soluțiile: (1, 0) (−1, 0), (0, 1), (0, −1), deci $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$.

Soluția II Observăm că $z^2 + \bar{z}^2 \in \mathbf{R} \Rightarrow z^2 + \bar{z}^2 = \pm 2$, dar din

$$|z| = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ și ecuația devine } z^2 + \frac{1}{z^2} \pm 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^4 \pm 2z^2 + 1 = 0 \Rightarrow (z^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1 \text{ sau}$$

$$(z^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow z_{3,4} = \pm i$$

21. Din $|z| = 2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$

Observăm ușor că: $z^2 + \bar{z}^2 + 6 \in \mathbf{R} \Rightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 6 = \pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 + \frac{16}{z^2} + 4 = 0$ și $z^2 + \frac{16}{z^2} + 8 = 0 \Rightarrow z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ și $z^4 + 8z^2 + 16 = 0$

$$(z^2 + 4)^2 - 4z^2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z^2 + 2z + 4 = 0 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \\ z^2 + 4 = 0 \end{matrix}$$

de unde rezultă $\pm 2i$; $\pm (1 - i\sqrt{3})$; $\pm(-1 - i\sqrt{3})$

22. 1) Notînd $\frac{a}{\bar{a}} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow \frac{\bar{a}}{a} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ de unde rezultă $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ și rezolvînd ecuația obținem

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{a}{\bar{a}}$$

$$z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{\bar{a}}{a}.$$

Calculînd valoarea lui $z^n + \frac{1}{z^n}$ pentru $\frac{a}{\bar{a}}$ și $\frac{\bar{a}}{a}$ se obține aceeași cantitate $\frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n}$, deci $z^n + \frac{1}{z^n} = \frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n}$

2) $z - \frac{1}{z} = 2i\sin\alpha \Rightarrow z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{a}{\bar{a}}$

$$z_2 = -(\cos\alpha - i\sin\alpha) = -\frac{\bar{a}}{a},$$

deci $z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = \frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n}$ și $z_2^n + \frac{1}{z_2^n} = (-1)^n\left[\frac{\bar{a}^n}{a^n} + \frac{a^n}{\bar{a}^n}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} \in \left\{\frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n},\ (-1)^n\left[\frac{a^n}{\bar{a}^n} + \frac{\bar{a}^n}{a^n}\right]\right\}$$

$z_1^n - \frac{1}{z_1^n} = \frac{a^n}{\bar{a}^n} - \frac{\bar{a}^n}{a^n}$ și $z_2^n - \frac{1}{z_2^n} = \left(-\frac{\bar{a}}{a}\right)^n - \left(-\frac{a}{\bar{a}}\right)^n = (-1)^{n+1}\left[\frac{a^n}{\bar{a}^n} - \frac{\bar{a}^n}{a^n}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^n - \frac{1}{z^n} \in \left\{\frac{a^n}{\bar{a}^n} - \frac{\bar{a}^n}{a^n},\ (-1)^{n+1}\left[\frac{a^n}{\bar{a}^n} - \frac{\bar{a}^n}{a^n}\right]\right\}$$

3) vezi punctul 1)

23. Dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, atunci produsul de mai sus este nul și afirmația este evidentă.

* Reciproc, dacă partea reală a produsului este nulă, adică

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3}{r^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\frac{(z_1 + z_2 + z_3)\overline{(z_1 + z_2 + z_3)}}{r^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\frac{|z_1 + z_2 + z_3|^2}{r^2} = 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

24. $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = 0 \Leftrightarrow$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n = 0 \Leftrightarrow \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2} + \ldots + \frac{r^2}{z_n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = 0$$

25. Suma dată se mai scrie $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right) = S$

și din $z_k\bar{z}_k = r^2$, $k = \overline{1, \ldots, n} \Rightarrow \bar{z}_k = \frac{r^2}{z_k}$, $k = \overline{1, \ldots n}$.

Arătăm că suma dată este reală; într-adevăr:

$$\bar{S} = \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z}_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2}{z_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{r^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} z_k = S, \text{ deci } S \in \mathbf{R} \text{ și } \operatorname{Re} S = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \text{ sau } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

(Pentru ultima echivalență se utilizează ex. 23.)

26. Membrul din dreapta al egalității se mai scrie

$$z_1z_2z_3(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_3\bar{z}_1 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = z_1z_2z_3(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1z_2} + \frac{1}{z_2z_3} + \frac{1}{z_3z_1} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3)^2.$$

27. Dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, atunci evident se verifică egalitățile.

$*$ Reciproc: dacă au loc egalitățile (1) atunci ridicînd la pătrat fiecare egalitate și adunîndu-le obținem:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 + |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 = (z_2 + z_3)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) + (z_3 + z_1)(\bar{z}_3 + \bar{z}_1) +$$
$$+ (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

care, după reduceri de termeni, devine

$$(z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0$$
$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

28. Din $|z_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$ rezultă că $\bar{z}_i = \frac{1}{z_i}$, $i = 1, 2, 3$.

deci $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$

dar $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \frac{|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|} = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| =$

$$= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \overline{|z_1 + z_2 + z_3|} = |z_1 + z_2 + z_3|,$$

prin urmare aplicînd modulul în egalitatea

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$$

avem: $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 2|z_1 + z_2 + z_3| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2.$$

29. Demonstrăm prin reducere la absurd.

Presupunem că $|z_k| > \frac{3b}{a}$ $(\forall)\, k \in \{1,2,3\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z_k|} < \frac{a}{3b} \Rightarrow \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|} < \frac{a}{b} \quad (1)$$

Pe de altă parte $a = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| \leqslant |z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_3||z_1|$

deci $\frac{a}{b} = \frac{|z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_3||z_1|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|}$ (2)

Inegalitățile (1) și (2) sînt contradictorii; prin urmare există

$$k \in \{1,2,3\} \text{ astfel încît } |z_k| \leqslant \frac{3b}{a}.$$

30. Observăm că $a = \bar{a} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = a^2\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) =$

$= a^2 \cdot \frac{(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)}{a^3}$ de unde rezultă că $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = a^2$. Formăm ecuația care are ca rădăcini numerele z_1, z_2, z_3

$$z^3 - az^2 - a^2z - a^3 = 0 \Rightarrow (z - a)(z^2 + a^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 = a,\ z_2 = ai,\ z_3 = -ai.$$

31. a) Folosind identitatea $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, obținem

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Leftrightarrow r^2\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0.$$

b) Din primele egalităţi avem $z_2 + z_3 = -z_1$ şi $z_1(z_2 + z_3) = -z_2z_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow |z_2 + z_3| = |z_1|$ şi $|z_1| \cdot |z_2 + z_3| = |z_2|\,|z_3|$ de unde rezultă

$$|z_1|^2 = |z_2|\,|z_3| \text{ şi în mod analog avem } |z_2|^2 = |z_1| \cdot |z_3|$$
$$|z_3|^2 = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Adunînd membru cu membru obţinem

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1| \cdot |z_2| + |z_2| \cdot |z_3| + |z_3| \cdot |z_1| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|z_1| - |z_2|)^2 + (|z_2| - |z_3|)^2 + (|z_3| - |z_1|)^2 = 0 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3|$$

(se ştie că $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$ $(\forall)$ $a, b, c \in \mathbf{R}$, este egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$).

32. $|z + z' \pm r|^2 \Leftrightarrow (z + z' \pm r)(\bar{z} + \bar{z'} \pm r) = r^2 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 2r^2 + \bar{z}z' \, z\bar{z'} \pm r(z + z') \pm r(\bar{z} + \bar{z'}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2(z + z')^2 \pm r(z + z')\, zz' \pm r^3(z + \bar{z'}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z + z')(rz + rz' \pm zz' \pm r^2) = 0, \text{ de unde obţinem}$$
$$(z + z')(r + z)(r + z') = 0 \text{ sau } (z + z')(r - z)(r - z') = 0,$$

dar cum $z, z' \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ rezultă că $z + z' = 0$

(se poate da şi o soluţie geometrică)

33. Numerele fiind distincte, $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ şi împărţind egalitatea dată cu $|z_1|$ avem $\left|\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} - 1\right| = 1$, unde, dacă notăm

$\frac{z_2}{z_1} = u$ şi $\frac{z_3}{z_1} = v$ rezultă $|u| = |v| = 1$ şi relaţia se scrie $|u + v - 1| = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (u + v - 1)(\bar{u} + \bar{v} - 1) = 1 \Rightarrow u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u} - u - v - \bar{v} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 + u\bar{v} + \bar{u}v - (u + \bar{u}) - (v + \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} - (u + v) -$
$-\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + 2uv - (u + v)\, uv - (u + v) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (u + v)^2 - (u + v)(uv + 1) = 0 \Leftrightarrow (u + v)(u + v - uv - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (u + v)(1 - v)(u - 1) = 0$

dar $u \neq 1$ şi $v \neq 1$; deoarece $z_1 \neq z_2$
$z_1 \neq z_3$, deci $u + v = 0 \Rightarrow z_2 + z_3 = 0$.

G.M. 4/1988

34. a) Ţinînd seama de identitatea (1c) obţinem

$$0 = z_1 \cdot \operatorname{Im}(\bar{z}_2z_3) + z_2 \operatorname{Im}(\bar{z}_3z_1) + z_3 \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2) = \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2)(z_1 + z_2 + z_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

b) Numărătorul din membrul stîng al egalităţii se mai scrie

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) =$$
$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1).$$

Ţinînd seama de a), ultima paranteză devine

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_1(-z_1 - z_3) + \bar{z}_2(-z_1 - z_2) + \bar{z}_3(-z_2 - z_3) =$$
$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2). \text{ Prin urmare numărătorul este egal cu}$$
$$3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2), \text{ de unde rezultă b).}$$

35. Observăm că $0 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = r^2\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) =$
$= r^2\left(\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right) \Rightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$. Demonstrăm prin metoda inducției:
Pentru $n = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0$, presupunem că $z_1^{2^n} + z_2^{2^n} + z_3^{2^n} = 0$ și să demonstrăm că

$$z_1^{2^{n+1}} + z_2^{2^{n+1}} + z_3^{2^{n+1}} = 0.$$

Într-adevăr

$$z_1^{2^{n+1}} + z_2^{2^{n+1}} + z_3^{2^{n+1}} = \left(z_1^{2^n}\right)^2 + \left(z_2^{2^n}\right)^2 + \left(z_3^{2^n}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

unde s-a notat cu $u_i = z_i^{2^n}$, $i = 1, 2, 3$, dar din ipoteza de inducție $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ și $|u_1| = |u_2| = |u_3| = r^{2^n}$ ori din prima parte a demonstrației rezultă că

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \text{ adică } z_1^{2^{n+1}} + z_2^{2^{n+1}} + z_3^{2^{n+1}} = 0,$$

prin urmare avem

$$z_1^{2^n} + z_2^{2^n} + z_3^{2^n} = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

36. Observăm că există $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încît:

$$\bar{z}_1 = z_2z_3 + a, \ \bar{z}_2 = z_1z_3 + b, \ \bar{z}_3 = z_1z_2 + c$$

Într-adevăr din $z_1 + z_2z_3 \in \mathbf{R}$ și $z_1 + \bar{z}_1 \in \mathbf{R}$ rezultă că diferența lor este reală, deci $\bar{z}_1 - z_2z_3 \in \mathbf{R}$.

Fie deci $\bar{z}_1 - z_2z_3 = a \Rightarrow \bar{z}_1 = z_2z_3 + a$;
În mod analog se scriu și celelalte relații. Înmulțind fiecare egalitate cu z_1, z_2, z_3, respectiv, obținem:

$$|z_1|^2 = z_1z_2z_3 + az_1, \ |z_2|^2 = z_1z_2z_3 + bz_2, \ |z_3|^2 = z_1z_2z_3 + cz_3 \qquad (1)$$

dar cum

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \Rightarrow az_1 = bz_2 = cz_3 \Rightarrow |az_1| = |bz_2| = |cz_3| \Rightarrow |a| = |b| = |c|.$$

Dacă $|a| = |b| = |c| \neq 0$, atunci cel puțin două dintre numerele a, b, c sînt egale și deci cel puțin două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sînt egale, contradicție cu ipoteza;
așadar $a = b = c = 0$ și din egalitățile (1) rezultă $z_1z_2z_3 = r^2$, rezultă $|z_1z_2z_3| = r^2 \Rightarrow r^3 = r^2 \Rightarrow r = 1$, deci $z_1z_2z_3 = 1$.

b) Fie $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = \rho \neq 0$ și să observăm că există a, b, c reale, a.î.

$$\bar{z}_i = z_1z_2 \ldots z_{i-1}z_{i+1} \ldots z_n + a$$
$$\bar{z}_j = z_1z_2 \ldots z_{j-1}z_{j+1} \ldots z_n + b$$
$$\bar{z}_k = z_1z_2 \ldots z_{k-1}z_{k+1} \ldots z_n + c$$

Înmulțind cu z_i, z_j, z_k avem:

$$\rho^2 = z_1z_2 \ldots z_n + az_i$$
$$\rho^2 = z_1z_2 \ldots z_n + bz_j$$
$$\rho^2 = z_1z_2 \ldots z_n + cz_k, \text{ de unde } az_i = bz_j = cz_k \Rightarrow |a| = |b| = |c|$$

Dacă $|a| = |b| = |c| \neq 0$, atunci cel puțin două dintre numerele a, b, c sînt egale, de exemplu $a = b \neq 0$ și din $az_i = az_j \Rightarrow z_i = z_j$ ceea ce nu se poate, deci $a = b = c = 0$, deci $z_1z_2 \ldots z_n = \rho^2$ și egalînd modulele celor două numere, obținem $\rho^n = \rho^2 \Rightarrow \rho = 1$

37. Fie $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$

Im $z^5 = 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5$ și, prin urmare

$\frac{\text{Im}z^5}{\text{Im}^5z} = 5\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1$. Dacă notăm $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ care are minim pentru $x = 1$, $f_{\min} = f(1) = -4$, deci $\min\limits_{z \in \mathbf{C}-\mathbf{R}} \frac{\text{Im}z^5}{\text{Im}^5z} = -4$ și acest minim se atinge pentru

$$x = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow b = \pm a \Rightarrow z = a(1 \pm i),\ a \in \mathbf{R}^*.$$

R.M.T. 1/1984

38. Fie $z = x + iy$. Se observă că elementele mulțimii sînt numere reale

$$\frac{z^3 - \bar{z}^3}{(z - \bar{z})^3} = \frac{(z - \bar{z})(z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2)}{(z - \bar{z})^3} = \frac{z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \frac{(x + iy)^2 + (x - iy)^2 + x^2 + y^2}{(x + iy)^2 + (x - iy)^2 - 2(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2}{2x^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2y^2} = \frac{3x^2 - y^2}{-4y^2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$ deci cel mai mare element al mulțimii A este $\frac{1}{4}$ și se obține ptr. $\forall z = iy$.

39. *Soluția I.* Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ Avem $\left|\frac{z^2 + 2}{|z}\right| = 2$

$\Rightarrow |z^2 + 2| = 2|z|$, dar $|z^2 + 2| = \sqrt{r^4 + 4r^2 \cos 2t + 4}$, de unde obținem ecuația $r^4 + 4r^2(\cos 2t - 1) + 4 = 0$ cu

$r^2 = 2(1 - \cos 2t) + 2\sqrt{\cos^2 2t - 2\cos 2t}$ maxim dacă $\cos 2t = -1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1$ și $r = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow z_1 = (1 + \sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= (1 + \sqrt{3})i \text{ și } z_2 = -(1 + \sqrt{3})i$$

Soluția II. Fie $z = x + iy$ și $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$2 = \left|x + iy + x - iy\frac{2}{x + iy}\right| = \left|x + iy + \frac{2x - 2iy}{r^2}\right| = \frac{|x(r^2 + 2) + iy(r^2 - 2)|}{r^2}$$

$$2r^2 = \sqrt{x^2(r^2 + 2)^2 + y^2(r^2 - 2)^2} \Rightarrow 4r^4 = x^2(r^2 + 2)^2 + y^2(r^2 - 2)^2$$

$$4r^4 = r^4(x^2 + y^2) + 4r^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$4r^4 = r^6 + 4r^2 + 4r^2(2x^2 - r^2);\quad 4r^4 = r^6 + 4r^2 - 4r^4 + 8r^2x^2$$

$$r^6 - 8r^4 + 4r^2 + 8r^2x^2 = 0 \mid : r^2$$

$$r^4 - 8r^2 + 4 + 8x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 = -r^4 + 8r^2 - 4 = -(r^2 - 2)^2 + 4r^2$$

$$= (2r + r^2 - 2)(2r - r^2 + 2) \geqslant 0$$

$$-(r^2 + 2r - 2)(r^2 - 2r - 2) \geqslant 0$$

$$(r^2 + 2r - 2)(r^2 - 2r - 2) \leqslant 0$$

r	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	0	$-1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
r^2+2r-2	+	+	+	0	−	−	+
r^2-2r-2	+	+	+	+	−	−	−
$(r^2+2r-2)(r^2-2r-2)$	+	+	+	0	−	0	−

$$r \in [\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1]$$

40. Fie $z = x + iy$ şi $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$a = \left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|x + iy + \frac{1}{x+iy}\right| = \left|\frac{x(r^2+1) + iy(r^2-1)}{r^2}\right| = a \Rightarrow$$

$$x^2(r^2+1)^2 + y^2(r^2-1)^2 = r^2a^2 \Rightarrow x^2(r^2+1)^2 + (r^2-x^2)(r^2-1)^2 = a^2r^2$$

$$x^2[(r^2+1)^2 - (r^2-1)^2] = r^4a^2 - r^2(r^2-1)^2 \Rightarrow 4r^2x^2 = r^2[r^2a^2 - (r^2-1)^2] \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{r^2a^2 - r^4 + 2r^2 - 1}{4} \geqslant 0 \Rightarrow r^4 - r^2(a^2+2) + 1 \leqslant 0$$

notînd $r^2 = t \Rightarrow t^2 - t(a^2+2) + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}\right)^2 \leqslant t \leqslant \left(\frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+4}-v}{2}\right)^2 \leqslant r^2 \leqslant \left(\frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2}\right)^2 \Rightarrow r_{\max} = \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2}$$

şi din $r^2 \geqslant \left(\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}\right)^2 \Rightarrow r_{\min} = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$

41. În relaţia $(\cos\alpha + z\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + z\sin 5\alpha$

$$\text{punem } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z^5 = z \Rightarrow z \in \{0, 1, -1, i, -i\}$$

dintre care numai $z = i$ şi $z = -i$ satisface relaţia dată.

Generalizare: plecăm de la egalitatea:

$$(\cos\alpha + z\sin\alpha)^{n+1} = (\cos\alpha + z\sin\alpha)^n(\cos\alpha + z\sin\alpha)$$

cf. enunţ. $\cos(n+1)\alpha + z\sin(n+1)\alpha = (\cos n\alpha + z\sin n\alpha)(\cos\alpha + z\sin\alpha)$

$$\cos(n\alpha+\alpha) + z\sin(n\alpha+\alpha) = (- - - \,,,- - - \,,,- - -)$$

$$\cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha + z(\sin n\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos n\alpha) =$$
$$= \cos n\alpha\cos\alpha + z\sin n\alpha\cos\alpha + z\cos\alpha\sin\alpha + z^2\sin n\alpha\sin\alpha -$$
$$- \sin n\alpha\sin\alpha = z^2\sin n\alpha\sin\alpha \Rightarrow -1 = z^2 \Rightarrow z = \pm i.$$

42. Fie $z_k = \cos t_k + i\sin t_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Condiţia $2(z_1+z_2+z_3) - 3z_1z_2z_3 \in \mathbf{R}$ se scrie

$$2(\sin t_1 + \sin t_2 + \sin t_3) = 3\sin(t_1+t_2+t_3) \quad (1)$$

Să presupunem că $\max(t_1, t_2, t_3) < \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1, t_2, t_3 < \frac{\pi}{6}$

şi fie $t = \frac{t_1+t_2+t_3}{3} \Rightarrow 0 < t < \frac{\pi}{6}$, iar cum funcţia „sin" este concavă pe

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}(\sin t_1 + \sin t_2 + \sin t_3) \leqslant \sin\frac{t_1+t_2+t_3}{3} \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{\sin(t_1+t_2+t_3)}{2} \leqslant \sin\frac{t_1+t_2+t_3}{3} \Rightarrow \sin 3t \leqslant 2\sin t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t \leqslant 2\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t - \sin t \geqslant 0 \Leftrightarrow 4\sin t\left(\sin^2 t - \frac{1}{4}\right) \geqslant 0.$ (3)

Deoarece $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin t > 0$ şi $\sin^2 t - \frac{1}{4} < 0$

adică $\sin t\left(\sin^2 t - \frac{1}{4}\right) < 0$ în contradicţie cu (3).

Rezultă deci $\max\{t_1, t_2, t_3\} \geqslant \frac{\pi}{6}$.

43. Fie $z_k = \cos x_k + i \sin x_k$. Relaţia dată devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 3x_k + i\sum_{k=1}^{n} \sin 3x_k = 4[a + (a-n)i] - 3\sum_{k=1}^{n} \cos x_k + 3i\sum_{k=1}^{n} \sin x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \cos 3x_k &= 4a - 3\sum_{k=1}^{n} \cos x_k \\ \sum_{k=1}^{n} \sin 3x_k &= 4(a-n) + 3\sum_{k=1}^{n} \sin x_k \end{aligned}\right\} *$$

dar $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

şi egalităţile $(*)$ se mai scriu

$$4\sum_{k=1}^{n} \cos^3 x_k - 3\sum_{k=1}^{n} \cos x_k = 4a - 3\sum_{k=1}^{n} \cos x_k$$

$$3\sum_{k=1}^{n} \sin x_k - 4\sum_{k=1}^{n} \sin^3 x_k = 4(a-n) + 3\sum_{k=1}^{n} \sin x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos^3 x_k = a \text{ şi } \sum_{k=1}^{n} \sin^3 x_k = n - a \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos^3 x_k + \sin^3 x_k) = n = \sum_{k=1}^{n} (\cos^2 x_k + \sin^2 x_k)$$

dar $\sin^3 x_k \leqslant \sin^2 x_k$ şi $\cos^3 x_k \leqslant \cos^2 x_k$, dacă o inegalitate apare strictă, egalitatea de mai sus nu se poate realiza.

$$\Rightarrow \sin^3 x_k = \sin^2 x_k \text{ şi } \cos^3 x_k = \cos^2 x_k$$

$$\Rightarrow \sin x_k = 0 \text{ şi } \cos x_k = 1$$

sau $\sin x_k = 1$ şi $\cos x_k = 0$, de unde rezultă

$$z_i \in \{1, i\}\ (\forall)\ k \text{ şi } a = \sum_{k=1}^{n} \cos^3 x_k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

44. Să presupunem că ar exista numerele complexe $z_k = \cos t_k + i \sin t_k$ $k = 1, 2, 3$ care să verifice egalitatea din enunț. **Deci**

$$\sum_{k=1}^{3} z_k^3 + 3\sum_{k=1}^{3} \bar{z}_k = 6(1 - i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} \cos 3t_k + i \sin 3t_k + 3\sum_{k=1}^{3} (\cos t_k - i \sin t_k) = 6 - 6i$$

dar ținînd seama că $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ și $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ obținem

$$4\sum_{k=1}^{3} \cos^3 t_k - i \sin^3 t_k = 6 - 6i \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} \cos^3 t_k = \frac{3}{2} \text{ și } \sum_{k=1}^{3} \sin^3 t_k = \frac{3}{2}$$

iar prin adunarea ultimelor două egalități rezultă:

$$(1) \sum_{k=1}^{3} \cos^3 t_k + \sin^3 t_k = 3 \text{ dar } \sin^3 t,\ \cos^3 t \in [-1, 1]\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$$

și deci $\sin^3 t + \cos^3 t = 1 \leqslant \sin^2 t + \cos^2 t = 1\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$

Observăm că $\sin^3 t + \cos^3 t = 1 \Leftrightarrow \sin t = 1$ sau $\cos t = 1$ iar din faptul că $\sin^3 t + \cos^3 t \leqslant 1\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$ rezultă că egalitatea (1) nu poate avea loc decît dacă $\sin^3 t_k + \cos^3 t_k = 1\ (\forall)\ k = \overline{1, 2, 3}$, adică $z_k \in \{1, i\}\ (\forall)\ k = \overline{1, 3}$. În acest caz $z_k^3 = \bar{z}_k (\forall)\ k = \overline{1, 3}$ și deci relația din enunț devine

$4\sum_{k=1}^{3} \bar{z}_k = 6 - 6i \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} \bar{z}_k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} i$ iar ultima relație nu este posibilă deoarece din $z_k \in \{1, i\}$ rezultă

$$\sum_{k=1}^{3} z_k = a + bi, \text{ unde } a, b \in \mathbf{Z}.$$

Deci presupunerea inițială a condus la contradicție, așadar nu există trei numere complexe care să satisfacă relația dată.

45. a) Considerăm $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 1$ în egalitatea dată și obținem $4n = n + n^2 \Rightarrow n = 3$ deci egalitatea se scrie

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 \text{ (vezi 1h)}$$

b) Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $M(z)$ și $G\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$, atunci identitatea de demonstrat se scrie:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 + 9\left|z - \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right|^2 =$$

$$= 4\left(\left|z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|z - \frac{z_2 + z_3}{2}\right|^2 + \left|z - \frac{z_1 + z_3}{2}\right|^2\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) + (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2) + (z - z_3)(\bar{z} - \bar{z}_3) + (3z - (z_1 + z_2 + z_3))(3\bar{z} - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)) = [2z - (z_1 + z_2)][2\bar{z} - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)] + [2z - (z_2 + z_3)][2\bar{z} - (\bar{z}_2 + \bar{z}_3)] + [2z - (z_1 + z_3)][2\bar{z} - (\bar{z}_1 + \bar{z}_3)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 - (\bar{z}z_1 + z\bar{z}_1 + \bar{z}z_2 + z\bar{z}_2 + z_3 +$

$+ z\bar{z}_2) - 3z(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) - 3\bar{z}(z_1 + z_2 + z_3) = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 +$
$+ |z_3 + z_1|^2 - 2z(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - 2\bar{z}(z_1 + z_2) - 2z(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) - 2\bar{z}(z_2 + z_3) -$
$- 2z(\bar{z}_1 + \bar{z}_3) - 2\bar{z}(z_1 + z_3) \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 =$
$= |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ care nu este altceva decît identitatea de la punctul a).

G.M. 5/1987

46. Fie $z_1 + z_2 = 0$ şi $z_3 = z_4 = \ldots = z_n = 0$.

atunci relaţia dată devine $|z_1 - z_2|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 = n(|z_1|^2 + |z_2|^2$ **(1)**
dar $z_2 = -z_1$ şi din egalitatea (1) rezultă

$$4|z_1|^2 + 2|z_1|^2 = 2n\ |z_1|^2 \Rightarrow n = 3.$$

Pentru $n = 3$ egalitatea se scrie:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) \qquad (2)$$

cu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$;
Dacă se consideră triunghiul cu afixele z_1, z_2, z_3 şi un sistem de axe de coordonate cu originea în centrul de greutate al triunghiului atunci egalitatea (2) se scrie.

$$b^2 + c^2 + a^2 = 3 \cdot \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \text{ unde}$$

$$|z_2 - z_1| = c, \quad |z_2 - z_3| = a, \quad |z_3 - z_1| = b.$$

G.M. 2/1988

47. Din $|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 = 0$ şi deci
$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$
Reciproc, în mod analog.

48. Ţinînd seama că $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = r > 0$.
Din relaţia dată rezultă:

$$\bar{z}_3\bar{z}_4 \ldots \bar{z}_n + \bar{z}_1\bar{z}_4 \ldots \bar{z}_{n-1}\bar{z}_n + \ldots \bar{z}_1\bar{z}_2 \ldots \bar{z}_{n-2} = 0 \Rightarrow$$

$$r^{2(n-2)}\left[\frac{1}{z_3z_4 \ldots z_{n-1}z_n} + \frac{1}{z_1z_4 \ldots z_{n-1}z_n} + \ldots + \frac{1}{z_1z_2 \ldots z_{n-2}}\right] = 0$$

şi aducînd la acelaşi numitor, obţinem

$$z_1z_2 + z_2z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = 0.$$

G.M. 5–6/1988

49. Se constată că numerele $z = r$, $r \in \mathbb{Q}$ sînt soluţii ale problemei.
Fie $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ astfel încît $\text{Re}\, z \in \mathbb{Q}$, $\text{Im}\, z \in \mathbb{Q}^*$ şi $|z| \in \mathbb{Q}^*$ şi

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (1)$$

Condiţiile (1) se mai scriu $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r\cos\alpha \in \mathbb{Q}$, $r\sin\alpha \in \mathbb{Q}^*$ cu $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ sau $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$, $\sin\alpha \in \mathbb{Q}^*$ cu $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ sau

$$r \in \mathbb{Q}_+^*, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \in \mathbb{Q}, \frac{2t}{1 + t^2} \in \mathbb{Q}^* \text{ cu } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t. \qquad (2)$$

Dacă $t \in \mathbf{Q}^*$, atunci evident că (2) este adevărată

Reciproc, dacă (2) este adevărată, adică $a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \in \mathbf{Q}^*$, $b = \frac{2t}{1+t^2} \in \mathbf{Q}^*$, atunci din prima relație rezultă $t^2 = \frac{1-a}{1+a}$, care introdusă în a doua relație dă $t = \frac{b}{1+a} \in \mathbf{Q}$

Prin urmare numerele căutate sînt de forma:

$z = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2} + \mathrm{i}\,\frac{2rt}{1+t^2}$, $r \in \mathbf{Q}_+^*$ și $t \in \mathbf{Q}^*$ sau de forma $z = r$, $r \in \mathbf{Q}$.

G.M. 6/1987

50. Fie $|z_i| = r_i$ și $\mathrm{E}_i = \frac{z_i}{r_i} + \frac{r_i}{\bar{z}_i}$

$$\overline{\mathrm{E}_i} = \frac{\bar{z}_i}{r_i} + \frac{r_i}{z_i} = \frac{r_i^2}{r_i z_i} + \frac{r_i \bar{z}_i}{r_i^2} = \frac{r_i}{z_i} + \frac{\bar{z}_i}{r_i} = \mathrm{E}_i \in \mathbf{R}$$

dar $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \Rightarrow \mathrm{E} \in \mathbf{R}$; aplicînd rezultatul problemei nr. (14) obținem că există $a_{in}, b_{in} \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$z_i^n = a_{in} z_i + b_{in} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i^n = \sum_{i=1}^{n} a_{in} z_i + \sum_{i=1}^{n} b_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + b,$$

unde $\sum_{i=1}^{n} b_{in} = b \in \mathbf{R}$ și $a_{in} = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

51. Fie $a = u + \mathrm{i}v \Rightarrow \mathrm{Re}\, a = u$, $\mathrm{Im} a = v$

Pentru $z = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a \geqslant 0$

$z = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,(-a) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a \leqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a = u = 0$
$\Rightarrow a = u + v\mathrm{i}$
$\Rightarrow u = 0$
$\Big\rangle \Rightarrow a = 0$

$z = \mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{Re}\, a\,\mathrm{i} \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, a \leqslant 0$

$z = -i \Rightarrow \mathrm{Re}\,(-a\mathrm{i})_1 \geqslant 0$ $\mathrm{Im}\, a \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, a = 0$

b) pentru

$z = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}\, a \geqslant 0$
$z = -1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,(-a) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, a \leqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, a = 0$
$z = \mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{Im}\,(a\mathrm{i}) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a \geqslant 0$
$z = -\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{Im}\,(-a\mathrm{i}) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a \leqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, a = 0$
$\Big\} \Rightarrow a = 0$

52. Evident dacă $|z| \in \mathbf{Q} \Rightarrow |z|^n \in \mathbf{Q}$

Fie $z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ unde $\cos\alpha, \sin\alpha \in \mathbf{Q}$. Procedăm prin inducție: Presupunem că $\mathrm{Re}\, z^n = \cos n\alpha$ și $\mathrm{Im}\, z^n = \sin n\alpha$ sînt raționale, atunci

$$\mathrm{Re}\, z^{n+1} = \cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha \in \mathbf{Q} \text{ și}$$
$$\mathrm{Im}\, z^{n+1} = \sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha \in \mathbf{Q}$$

sau $z^n = (x + \mathrm{i}y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}\mathrm{i}y + C_n^2 x^{n-2}\mathrm{i}^2 y^2 + C_n^3 x^{n-3}\mathrm{i}^3 y^3 + \ldots =$
$= x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 + \ldots + \mathrm{i}\,(C_n^1 x^{n-1} y - C_n^3 x^{n-3} y^3 \ldots =$
$= \mathrm{A} + \mathrm{i}\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{Q}.$

53. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$ (răspuns).

54. Se scrie $(a + ib)^4 = a^4 + b^4 - 6a^2b^2 + 4ab(a^2 - b^2)i$ şi analoagele. Reciproca nu este adevărată.

55. Fie $z_1 + z_2 + z_3 = z_0$, $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_0}$.

Formă ecuaţiei de gradul al treilea care are rădăcinile z_1, z_2, z_3

$z_3 - S_1z^2 + S_2z - S_3 = 0$ (1) unde $S_1 = z_0$, $S_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ şi $S_3 = z_1z_2z_3$. Ecuaţia (1) se mai scrie $z^3 - z_0z^2 + \frac{S_3}{z_0}z - S_3 = 0$

Observăm z_0 verifică ecuaţia, deci $z_0 \in \{z_1, z_2, z_3\}$ şi din egalitatea $z_1 + z_2 + z_3 = z_0$ rezultă că suma a două numere este zero, deci ele au acelaşi modul.

56. Din condiţia dată rezultă:

$$\frac{1 + z_1z_2z_3}{z_1 + z_2 + z_3} = \frac{1 + \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}{z_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3} \Leftrightarrow \frac{1 + z_1z_2z_3}{z_1 + z_2 + z_3} = \frac{1 + z_1z_2z_3}{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}$$

de unde avem $z_1z_2z_3 = -1$ sau $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

G.M. 8/1989

57. a) $|(1 + i)z^3 + iz| \leq |(1 + i)z^3| + |iz| = |1 + i|\,|z|^3 + |i|\,|z| =$

$$= \sqrt{2}\,|z|^3 + |z| < \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

b) $|(\sqrt{2} - i)z^3 - iz| \leq |\sqrt{2} - i|\,|z|^2 + |-i|\,|z| = \sqrt{3}\,|z|^3 + |z| < \frac{\sqrt{3}}{27} +$

$$+ \frac{1}{3} < \frac{3}{4}$$

c) $|\alpha z^m + \beta z^n| \leq |\alpha z^m| + |\beta z^n| = |\alpha|\,|z|^m + |\beta|\,|z|^n < |\alpha|\,a^m +$

$$+ |\beta|\,a^m < a\,(|\alpha| + |\beta|).$$

58. Se constată uşor că $\bar{a}b + a\bar{b}$ şi $i(\bar{a}b - a\bar{b})$ sînt numere reale. Ţinînd seama că $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ şi $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, obţinem:

1) $\operatorname{Re}\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{2} = \frac{a\bar{b} + \bar{a}b}{2|b|^2}$, de unde rezultă (1)

2) $\operatorname{Im}\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{2i} = \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{2i|b|^2} = \frac{i(\bar{a}b - a\bar{b})}{2|b|^2}$, de unde rezultă (2)

3) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ care este evidentă.

59. $\left|\frac{2z - i}{2 + iz}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |2z - i|^2 \leq |2 + iz|^2 \Leftrightarrow (2\bar{z} + i)(2z - i) \leq$

$$\leq |2 + iz|\,(2 - iz) \Leftrightarrow |z| \leq 1.$$

60. $|z+r|^2 \leqslant r^2$ şi $|z-r|^2 \leqslant r^2 \Leftrightarrow (z+r)(\bar{z}+r) \leqslant r^2$ şi $(z-r)(\bar{z}-r) \leqslant r^2$ de unde prin adunarea celor două inegalităţi rezultă $|z|^2 \leqslant 0 \Rightarrow z = 0$. Evident, din punct de vedere geometric, cele două discuri circulare au un singur punct comun, originea sistemului de axe.

61. Din condiţia $\frac{az+b}{a'z+b'} \leqslant 0$ rezultă că $\frac{az+b}{a'z+b'} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{az+b}{a'z+b'} = \frac{a\bar{z}+b}{a'\bar{z}+b'}$ de unde rezultă $(z-\bar{z})(ab'-a'b) \Rightarrow z = \bar{z}$, deci z trebuie să fie real, aşadar nu există numere complexe care să verifice inecuaţia dată.

62. Împărţind ambii membrii ai inecuaţiei cu $|a|$, obţinem $\left|z+\frac{b}{a}\right| \leqslant \frac{r}{|a|}$, de unde rezultă mulţimea punctelor din interiorul şi de pe cercul cu raza $\frac{r}{|a|}$ şi al cărui centru are afixul $-\frac{b}{a}$.

63. Observăm că $E = \bar{z}z_0 + z\bar{z}_0 \in \mathbf{R}$, deoarece $\bar{E} = E$, deci $\bar{z}z_0 + z\bar{z}_0 \leqslant |\bar{z}z_0 + z\bar{z}_0| \leqslant |\bar{z}z_0| + |z\bar{z}_0| = |\bar{z}|\,|z_0| + |z|\,|\bar{z}_0| = 2|z|^2$

64. Din relaţia dată rezultă $z = \frac{z_1|z_2| + z_2|z_1|}{|z_1| + |z_2|} \Rightarrow |z| \leqslant \frac{2|z_1|\,|z_2|}{|z_1| + |z_2|}$

65. $|az_1 + bz_2|^2 < |ab + z_1z_2|^2 \Leftrightarrow (az_1 + bz_2)(a\bar{z}_1 + b\bar{z}_2) < (ab + z_1z_2)(ab + \bar{z}_1\bar{z}_2) \Leftrightarrow (|z_1|^2 - b^2)(a^2 - |z_2|^2) < 0 \Leftrightarrow (|z_1| - b)(|z_2| - a) < 0$ deci $|z_1| < b \Leftrightarrow |z_2| < a$ sau $|z_1| < a \Leftrightarrow |z_2| < a$

G.M. 7/1988

66. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $(\exists)\, z_0 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|zz_0 + 1| < 1$ şi $|z_0^2 + z_0 + 1| > 1 \Leftrightarrow |(2z_0+1)^2| < 1$ şi $|4z_0^2 + 4z_0 + 4| < 4$. Dar din ultima inegalitate rezultă $|(2z_0+1)^2| + 3 \geqslant |(2z_0+1)^2 + 3| > 4 \Rightarrow |2z_0+1|^2 > 1 \Rightarrow |2z_0+1| > 1$ contradicţie.

67. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $(\exists)\, z_0 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z_0^3 - 1| < 1$ şi $|z_0 - 1| \geqslant 1$ şi $|z_0 - \varepsilon| \geqslant 1$ şi $|z_0 - \varepsilon^2| \geqslant 1$. Înmulţind ultimele trei inegalităţi obţinem $|z_0^3 - 1| \geqslant 1$ contradicţie.

68. Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $z_0 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|1 + z_0| < \frac{1}{2}$ şi $|1 + z_0^2| < 1$. Din prima inegalitate rezultă că z_0 se află în interiorul cercului de rază $\frac{1}{2}$ şi de centru $C(-1,0)$, deci dacă $z_0 = x_0 + iy_0$, avem $-\frac{3}{2} < x_0 < -\frac{1}{2}$ şi $-\frac{1}{2} < y_0 < \frac{1}{2}$ iar din a doua inegalitate avem:

$|1 + z_0^2|^2 < 1 \Leftrightarrow (z_0^2 + 1)(\bar{z}_0^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow |z_0|^4 + z_0^2 + \bar{z}_0^2 < 0$, deci $z_0^2 + \bar{z}_0^2 < 0 \Leftrightarrow x_0^2 - y_0^2 < 0$ de unde rezultă $x_0^2 < y_0^2$. Din $-\frac{3}{2} < x_0 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2 > \frac{1}{4} \text{ deci } \frac{1}{4} < x_0^2 < y_0^2 \text{ de unde avem}$$

$$y_0 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \text{ contradicţie.}$$

69. Demonstrăm numai ultimele trei inegalităţi

c) $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \geqslant |z_1 + z_2 + z_1 - z_2| = 2|z_1|$

$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \geqslant |z_1 + z_2 - z_1 + z_2| = 2|z_2|$

de unde adunînd membru cu membru rezultă inegalitatea c)

d) Dacă $|z_1| \geqslant |z_2|$ inegalitatea d) devine prima inegalitate din c) iar dacă $|z_1| \leqslant |z_2|$ d) devine a doua inegalitate din c), e) se ridică la pătrat ambii membri şi se ţine seama de b) şi d).

70. Putem presupune că $|z_1| \leqslant |z_2|$, atunci $2|z_2| \geqslant |z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2| = |z_1 z_2| = |z_1||z_0|$, deci $|z_1| \leqslant 2$. (Dacă unul din cele două numere este nul, atunci în baza proprietăţii date şi celălalt număr e nul şi concluzia este în mod banal verificată).

71. $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) \Rightarrow$

$|z_1 + z_2|^3 \leqslant |z_1^3 + z_2^3| + 3|z_1z_2||z_1 + z_2|$. Notînd cu $r = |z_1 + z_2|$ inegalitatea devine $r^3 \leqslant 16 + 12r \Leftrightarrow r^3 - 12r - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$(r + 2)^2(r - 4) \leqslant 0 \Rightarrow r \leqslant 4$ deci $|z_1 + z_2| \leqslant 4$.

72. 1) $\left|\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right|^2 = |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right)\left(\frac{|z_2|}{|z_1|}\bar{z}_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\bar{z}_2\right) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_2|^2 + |z_1|^2 + z_1z_2 + z_1z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2$

2) $\left|\frac{|z_2|}{|z_1|}z_2 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_1\right|^2 \geqslant |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow \left(\frac{|z_2|}{|z_1|}z_2 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_1\right)\left(\frac{|z_2|}{|z_2|}\bar{z}_2 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\bar{z}_1\right) \geqslant (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow \frac{|z_2|^4}{|z_1|^2} + \frac{|z_1|^4}{|z_2|^2} + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geqslant$

$\geqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \Leftrightarrow |z_1|^6 + |z_2|^6 \geqslant |z_1|^2|z_2|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 \geqslant 0$

3) $\left|\frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_2|}z_2\right| \leqslant 2|z_1 + z_2| \Leftrightarrow \left|z_1 + z_2 + \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right| \leqslant 2|z_1 + z_2|$ care este evidentă, deoarece

$$|z_1 + z_2| + \left|\frac{|z_1|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_1\right| \leqslant |z_1 + z_2| + \left|\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right| = 2|z_1 + z_2|.$$

73. Ridicînd ambii membri la pătrat obţinem o inegalitate echivalentă cu cea dată, deci $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 + 2|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_2^2| + 2|z_3z_2 + z_2z_1 + z_3z_1 + z_3^2| + 2|z_1z_3 + z_2z_3 + z_2z_1 + z_1^2| \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 + 2|z_1z_2| + 2|z_2z_3| + 2|z_3z_1| + 2|z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_3| + 2|z_2z_1 + z_2z_3 + z_2^2| + 2|z_3z_1 + z_3z_2 + z_3^2|$, dar cum $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$ (vezi ex. 1h § 1), şi $2|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_2^2| \leqslant 2|z_1z_2 + z_2z_3 + z_2^2| + 2|z_1z_3|$; $2|z_3z_2 + z_2z_1 + z_3z_1 + z_3^2| \leqslant 2|z_2z_3 + z_3z_1 + z_3^2| + 2|z_1z_2|$; $2|z_1z_3 + z_2z_3 + z_2z_1 + z_1^2| \leqslant 2|z_1z_3 + z_2z_1 + z_1^2| + 2|z_2z_3|$.

74. Amintim proprietăţile evidente:

a) $\mathrm{Re}\, z > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, \frac{1}{z} > 0$.

b) $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \frac{1}{z} < 0.$

c) $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k.$

d) $\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k.$

Considerăm partea reală a inversei expresiei date. Fie deci

$$\operatorname{Re}\frac{z_1z_2z_3 + z_1 + z_2 + z_3}{z_2z_3 + 1} = \operatorname{Re}\left(z_1 + \frac{z_2 + z_3}{z_2z_3 + 1}\right) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re}\frac{z_2}{z_2z_3 + 1} + \operatorname{Re}\frac{z_3}{z_2z_3 + 1} =$$

$$= \operatorname{Re} z_1 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{z_2}} + \operatorname{Re}\frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3}} > 0, \text{ deoarece}$$

$\operatorname{Re}\left(z_3 + \frac{1}{z_2}\right) = \operatorname{Re} z_3 + \operatorname{Re}\frac{1}{z_2} > 0$ și $\operatorname{Re}\left(z_2 + \frac{1}{z_3}\right) = \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re}\frac{1}{z_3} > 0$ deci și inversele lor au partea reală pozitivă.

Observație: se poate utiliza și relația $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

75. $z_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_1 - z_2}{2}$, $z_2 = \frac{z_1 + z_2 + z_2 - z_1}{2}$ deci $|z_1| \leqslant \frac{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|}{2}$, $|z_2| \leqslant \frac{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{|z_1|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}\right)$$

$$\sqrt{|z_2|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}\right)$$

$$\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}}$$

$$\frac{\sqrt{|z_1 + z_2|} + \sqrt{|z_1 - z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}} \leqslant \frac{2\sqrt{|z_1| + |z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}} \leqslant 2.$$

76. Fie $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1}{a_2}$, atunci

$$\frac{2|a_1z_1 + a_2z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2\left|\frac{a_1}{a_2}z_1 + z_2\right|^2}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + 1} = \frac{2|\operatorname{tg}\alpha z_1 + z_2|^2}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{2(\operatorname{tg}\alpha z_1 + z_2)(\operatorname{tg}\alpha\bar{z}_1 + \bar{z}_2)}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\left[\operatorname{tg}^2\alpha|z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)\operatorname{tg}\alpha\right] =$$

$$= 2\cos^2\alpha\left[\frac{\sin^2\alpha|z_1|^2 + \cos^2\alpha|z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}|z_1|^2 + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}|z_2|^2 + \frac{(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)\sin 2\alpha}{2}\right] =$$

$= (B - A)\cos 2\alpha + C \sin 2\alpha + B + A$ unde $A = |z_1|^2$, $B = |z_2|^2$ şi $C = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$. Ultima expresie este cuprinsă între

$$A + B - \sqrt{(B-A)^2 + C^2} \text{ şi } A + B + \sqrt{(B-A)^2 + C^2}$$

$$A + B \pm \sqrt{(A-B)^2 + C^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{(|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{|z_1|^4 + |z_2|^4 + z_1^2\bar{z}_2^2 + \bar{z}_1^2 z_2^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{z_1^2\bar{z}_1^2 + z_2^2\bar{z}_2^2 + z_1^2\bar{z}_2^2 + \bar{z}_1^2 z_2^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \sqrt{(z_1^2 + z_2^2)(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2)} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \sqrt{|z_1^2 + z_2^2|^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_1^2 + z_2^2|$$

77. Fie $z = x + iy$

$$\left|\frac{z-2}{2z}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{x-2+iy}{x+iy}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-2+iy| < |x+iy| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-4x+4} < \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 4(1-x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z > 1.$$

78. $2z = (1+z)^2 - (1+z^2) \Rightarrow 2|z| = |(1+z)^2 - (1+z^2)| \leqslant$

$$\leqslant |(1+z)^2| + |1+z^2| = |1+z|^2 + |1+z^2| \leqslant 2 \Rightarrow |z| \leqslant 1$$

G.M. 5/1986

79. $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geqslant |z^2+1| + |z^3+1-z-1| =$

$= |z^2+1| + |z(z^2-1)| = |z^2+1| + |z|\,|z^2-1| = |z^2+1| +$

$+ |z^2-1| \geqslant |z^2+1-z^2+1| = 2.$

80. Inegalitatea se mai scrie:

$$\left|\frac{z^3-1}{z-1}\right| + \left|\frac{z^3+1}{z+1}\right| = |z^2+z+1| + |z^2-z+1| \geqslant$$

$$\geqslant |z^2+z+1-z^2+z-1| = 2|z| = 2.$$

81. Notăm cu $r = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z+\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3\right| = \left|z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z+\frac{1}{z}\right| \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^3 \leqslant \left|z^3+\frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z+\frac{1}{z}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 \leqslant 2 + 3r \Rightarrow r^3 - 3r - 2 \leqslant 0 \Rightarrow (r+1)^2(r-2) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$r \leqslant 2, \text{ deci } \left|z+\frac{1}{z}\right| \leqslant 2$$

R.M.T. 1/1987

82. Considerăm un triunghi care are afixele z_1, z_2, z_3 şi fie originea axelor de coordonate în centrul cercului circumscris triunghiului, atunci inegalitatea se mai scrie: $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \geqslant \frac{1}{R^2}$ (1)

unde $|z_1 - z_2| = c$, $|z_2 - z_3| = a$, $|z_1 - z_3| = b$ şi $r = |z_k| = R$, $k = \overline{1,2,3}$.

Inegalitatea (1) este echivalentă cu $a + b + c \geqslant \frac{abc}{R^2} \Leftrightarrow 2p \geqslant \frac{4RS}{R^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Rp \geqslant 2S \Leftrightarrow Rp \geqslant 2rp \Leftrightarrow R \geqslant 2r$ evident.

G.M. 8/1985

83. Se constată ușor că $\text{Re}z > 0 \Leftrightarrow \text{Re}\,\frac{1}{z} > 0$, deci

$$\text{Re}\,\frac{(tb+(1-t)a)^2}{ab} = \text{Re}\,\frac{t^2b^2+(1-t)^2a^2+2t(1-t)ab}{ab} = \text{Re}\left[(1-t)^2\frac{a}{b} + \text{Re}\,\frac{t^2}{\frac{a}{b}} + \right.$$

$$\left. + 2t(1-t)\right] = (1-t)^2\,\text{Re}\,\frac{a}{b} + t^2\text{Re}\,\frac{b}{a} + 2\text{Re}t(1-t) > 0$$

(Observăm că $\text{Re}\,\alpha z = \alpha\text{Re}z$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ și că $t(1-t) > 0\ (\forall)\ t \in (0,1)$ deci $\text{Re}t(1-t) = t(1-t) > 0$)

84. Oricare ar fi $z_i \in M$, $i = \overline{1,n}$, suma $z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2$ este negativă, numerele fiind distincte, cea mai mare valoare se obține dacă numerele $z_0, z_1, \ldots, z_n$ iau valorile $0, \pm i, \pm 2i, \ldots \pm \frac{n}{2}i$ deci $z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2 \leqslant$

$$\leqslant 0 + i^2 + (-i)^2 + (2i)^2 + (-2i)^2 + \ldots + \left(\frac{ni}{2}\right)^2 + \left(-\frac{ni}{2}\right)^2 =$$

$$= -2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] = -2\,\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(2\frac{n}{2}+1\right)}{6} =$$

$$= -\frac{n(n+1)(n+2)}{12}$$

85. Deoarece $x, y \in \mathbf{Z}$ și $xy = 0$, mulțimea A va cuprinde numerele întregi din $\mathbf{Z}$ și numerele de forma $z = iy$, $y \in \mathbf{Z}$ și n fiind multiplu de 4, suma $S_{n+1} = z_0^4 + z_1^4 + \ldots + z_n^4$ va fi reală și va lua valoarea minimă, dacă $z_k \in \{\pm a, \pm ai\}$ cu $a \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{4}\right\}$, așadar valoarea minimă va fi

$$4\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + \left(\frac{n}{4}\right)^4\right] \text{ dar cum } 1^2 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 =$$

$$= 4\,\frac{\frac{n}{4}\,\frac{n}{4}+1\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(3\frac{n^2}{16}+3\frac{n}{4}-1\right)}{30} = \frac{n(n+4)(n+2)(3n^2+12n-16)}{30\cdot 8\cdot 16} =$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)(3n^2+12n-16)}{3840}$$

și inegalitatea este evidentă.

G.M. 3/1984

86. a) Considerăm propozițiile: p: „$z_1, z_2 \in \mathbf{C},\ |z_1| = |z_2|$"
q: „$z_1, z_2 \in \mathbf{C},\ z_1 + z_2 > 0$"
r: „$z_1, z_2 \in \mathbf{C},\ z_1 z_2 > 0$"

$p \wedge q \to r$ este adevărată, într-adevăr, vom da două soluții pentru această implicație.

S_1 — Din $z_1 + z_2 > 0 \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \Rightarrow z_1 - \bar{z}_1 =$
$= z_2 - \bar{z}_2 \Rightarrow \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2} = -\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2} \Rightarrow \text{Im}z_1 = -\text{Im}z_2$ și cum $|z_1|^2 = |z_2|^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Re}^2 z_1 = \text{Re}^2 z_2$ (deoarece $\text{Im}^2 z_1 = \text{Im}^2 z_2$) deci $\text{Re}\,z_1 = \pm\text{Re}\,z_2$ dar cum $z_1 + z_2 > 0 \Rightarrow \text{Re}z_1 = \text{Re}z_2 > 0$ așadar $z_2 = \bar{z}_1$ și deci $z_1 z_2 = z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2 > 0$

S_2 — Fie $\begin{matrix} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{matrix}$ și din $z_1 + z_2 = a + c + i(b+d) > 0 \Rightarrow$
$b = -d$ și $a + c > 0$, deci $z_1 = a + ib$ și $z_2 = c - ib$ și din $|z_1|^2 = |z_2|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a = \pm c$, dar cum $a + c > 0 \Rightarrow a = c$ aşadar $z_1 = a + ib$ şi $z_2 = a - ib \Rightarrow z_1 z_2 = a^2 + b^2 > 0$.

Implicaţia $p \wedge r \to q$ este falsă, într-adevăr, dacă $z_1 = z_2 = -1$, $|z_1| = |z_2| = 1$, dar $z_1 + z_2 = -2 < 0$. Implicaţia $q \wedge r \to p$ este falsă, $z_1 z_2 > 0$ considerăm contraexemplul $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

b) S_1 — Fie $z = x + iy \Rightarrow z^2 + z \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + iy(2x+1) \leqslant 0$

$$\begin{cases} y(2x+1) = 0 \\ x^2 - y^2 + x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ şi } x^2 + x \leqslant 0 \Rightarrow x \in [-1, 0] \Rightarrow z = x,$$

$x \in [-1, 0]$ sau $x = -\frac{1}{2}$ şi $-\frac{1}{4} - y^2 \leqslant 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + yi$.

Deci soluţia inecuaţiei este $\{z \mid z = x \mid x \in [-1, 0]\} \cup \left\{z = -\frac{1}{2} + iy, y \in \mathbf{R}\right\}$

S_2 — Din $z^2 + z \leqslant 0 \Rightarrow z^2 + z \in \mathbf{R} \Rightarrow z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \Rightarrow$
$(z - \bar{z})(z + \bar{z}) + z - \bar{z} = 0 \Rightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$ de unde rezultă
$z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbf{R} \Rightarrow z = x \Rightarrow z^2 + z = x^2 + x \leqslant 0 \Rightarrow x \in [-1, 0]$ sau
$z + \bar{z} = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbf{R}$ care verifică inecuaţia pentru orice $y \in \mathbf{R}$ şi se obţine soluţia de mai sus.

87. Din condiţia $az^2 + bz + c \leqslant 0$ rezultă $az^2 + bz + c \in \mathbf{R} \Leftrightarrow az^2 + bz + c = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c \Leftrightarrow (z - \bar{z})(az + a\bar{z} + b) = 0$, deci $z = \bar{z}$ sau $az + a\bar{z} + b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$ sau $z = -\frac{b}{2a} + iy$, $y \in \mathbf{R}$.

Impunînd ca $z = -\frac{b}{2a} + iy$ să verifice inecuaţia dată, obţinem

$$a\left(-\frac{b}{2a} + iy\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + iy\right) + c \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-\Delta - 4a^2y^2}{4a} \leqslant 0 \qquad (1)$$

Considerăm cazurile:

I. Dacă $a > 0$, atunci din (1) rezultă $y^2 \geqslant \frac{-\Delta}{4a^2}$ (2) şi deci considerăm situaţiile:

α — dacă $\Delta > 0$, atunci inecuaţia este verificată de numerele reale $z \in [z_1, z_2]$, unde z_1, z_2 sînt rădăcinile reale ale ecuaţiei $az^2 + bz + c = 0$ şi din (2) rezultă şi soluţiile complexe $z = -\frac{b}{2a} + iy$, ca $y \in \mathbf{R}$.

β — dacă $\Delta = 0$, atunci inecuaţia este verificată de numerele complexe $z = -\frac{b}{2a} + iy$, cu $y \in \mathbf{R}$

γ — dacă $\Delta < 0$, atunci inecuaţia este verificată de numerele complexe $z = -\frac{b}{2a} + iy$, unde $y \in \left(-\infty, \frac{-\sqrt{-\Delta}}{2a}\right] \left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, +\infty\right)$

II. Cazul $a < 0$, atunci din (1) avem $y^2 \leqslant -\frac{\Delta}{4a^2}$ (3) şi deci considerăm situaţiile:

α $\Delta > 0$, atunci inecuaţia este verificată la numerele reale $z \in (-\infty, z_1] \cup [z_2, \infty)$

β $\Delta = 0$, atunci inecuaţia este verificată de orice număr real ($z \in \mathbf{R}$)

γ $\Delta < 0$, atunci inecuaţia este verificată de toate numerele reale ($z \in \mathbf{R}$) şi de numerele complexe $z = -\frac{b}{2a} + iy$, cu $y \in \left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$

88. Avem $z_1^2 + (z_2 + z_3 + \ldots + z_6)^2 = 2z_2z_3 + 2z_2z_4 + \ldots + 2z_5z_6$, dar $z_2 + z_3 + \ldots + z_6 = -z_1 \Rightarrow 2z_1^2 = 2(z_2z_3 + z_2z_4 + \ldots + z_5z_6) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z_1^2 = z_2z_3 + z_2z_4 + \ldots + z_5z_6$. Rezultă că:

$|z_1^2| \leqslant |z_2z_3| + |z_2z_4| + \ldots + |z_5z_6|$. La fel se obține

$|z_2|^2 \leqslant |z_1z_2| + |z_1z_4| + \ldots + |z_5z_6|$

. . . . . .

$|z_6|^2 \leqslant |z_1z_2| + |z_1z_3| + \ldots + |z_4z_5|$.

Însumînd membru cu membru, găsim

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_6|^2 \leqslant 4(|z_1z_2| + |z_1z_6| + \ldots + |z_5z_6|)$$

Adunînd în ambii membri ai unei egalități $2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_6|^2)$ obținem: $3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_6|^2) \leqslant 2(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_6|)^2$

R.M.T. 2/1983

89. a) Notînd cu $P_k = z_kz_{k+1} \ldots z_n$ membrul din stînga se mai scrie $|z_2z_3 \ldots z_n - z_1z_2 \ldots z_n| + |z_3z_4 \ldots z_n - z_2z_3 \ldots z_n| + \ldots + |z_n - z_{n-1}z_n| + |1 - z_n| + |1 + z_1z_2 \ldots z_n| = |P_2 - P_1| + |P_3 - P_2| + |P_4 - P_3| + \ldots + |P_{n-1} - P_{n-2}| + |P_n - P_{n-1}| + |1 - P_n| + |1 + P_1| \geqslant |P_2 - P_1 + P_3 - P_2 + P_4 - P_3 + \ldots + P_{n-1} - P_{n-2} + P_n - P_{n-1} + 1 - P_n + 1 + P_1| = |2| = 2$

b) Notînd cu $P_k = z_kz_{k+1} \ldots z_n$ membrul stîng al inegalității se mai poate scrie: $|z_2z_3 \ldots z_n + z_1z_2 \ldots z_n| + |z_3z_4 \ldots z_n + z_2z_3 \ldots z_n| + |z_4z_5 \ldots z_n + z_3z_4 \ldots z_n| + |z_{n-1} + z_{n-1}z_n| + |1 + z_n)| + |1 + (-1)^n z_1z_2 \ldots z_n| = |P_2 + P_1| + |P_3 + P_2| + |P_4 + P_3| + |P_5 + P_4| + \ldots + |P_n + P_{n-1}| + |1 + P_n + |1 + (-1)^n P_1| = |P_2 + P_1| + |-P_3 - P_2| + |P_4 + P_3| + |-P_5 - P_4| + \ldots + |(-1)^n P_n + (-1)^n P_{n-1}| + |(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}P_n| + |(-1)^{n+1}(1 + (-1)^n P_1)| \geqslant |P_2 + P_1 - P_3 - P_2 + P_4 + P_3 - P_5 - P_4 + \ldots + (-1)^n P_n + (-1)^n P_{n-1} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}P_n + (-1)^{n+1} - P_1| = |(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}| = 2.$

Egalitatea se realizează pentru $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = -1$.

90. $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_0 - z_k|^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) \geqslant$

$\geqslant \sum_{k=1}^{n} (z_0 - z_k)(\bar{z}_0 - \bar{z}_k) \Leftrightarrow n|z|^2 - \bar{z}\sum_{k=1}^{n} z_k - z\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \geqslant -$

$-z_0\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k + n|z_0|^2 - \bar{z}_0\sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \Leftrightarrow n(|z|^2 - |z_0|^2) \geqslant$

$\geqslant \sum_{k=1}^{n} z_k(\bar{z} - \bar{z}_0) + \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k(z - z_0)$

$|z|^2 - |z_0|^2 \geqslant z_0(\bar{z} - \bar{z}_0) + \bar{z}_0(z - z_0) \Leftrightarrow |z|^2 + |z_0|^2 \geqslant$

$\geqslant \bar{z}z_0 + z\bar{z}_0 \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \geqslant 0 \Leftrightarrow |z - z_0|^2 \geqslant 0$

Interpretare geometrică: dacă $z_1z_2, \cdots, z_n$ sînt afixele vîrfurilor unui poligon complex, atunci z_0 este afixul centrului de greutate al poligonului. Inegalitatea demonstrată afirmă: oricare ar fi punctul din plan, M, suma pătratelor distanțelor de la M la vîrfuri este minimă, dacă M este centrul de greutate al poligonului.

91. Se poate demonstra prin inducție. Într-adevăr pentru $n = 1$, avem

$$|z - z_1|^2 \geqslant (|z| - 1)^2 \Leftrightarrow (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) \geqslant (|z| - 1)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |z_1|^2 - (z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1) \geqslant (|z| - 1)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 1 - (z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1) \geqslant (|z| - 1)^2$$

care este evidentă, deoarece $z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1 \leqslant 2|z|$ (vezi exercițiul precedent). Presupunînd inegalitatea adevărată pentru n și rezultă pentru $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 + |z - z_{k+1}|^2 \geqslant n(|z| - 1)^2 + |z|^2 + 1 - (z\bar{z}_{k+1} + \bar{z}z_{k+1}) \geqslant n(|z| - 1)^2 + (|z| - 1)^2 = (n + 1)(|z| - 1)^2$$

(unde s-a folosit $z\bar{z}_{k+1} + \bar{z}z_{k+1} \leqslant 2|z|$).

R.M.T. 2/1986

92. $-z_p = z_1 + z_2 + \ldots + z_{p-1} + z_{p+1} + \ldots + z_{2n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_p^2 = (z_1 + z_2 + \ldots + z_{p-1} + z_{p+1} + \ldots + z_{2n})^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} z_k^2 + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j \neq p}}^{n} z_i z_j$$

Adunînd z_p^2 în ambii membri și ținînd seama de egalitatea a doua din ipoteză, rezultă $z_p^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j\,;\,i,j\neq p}}^{n} z_i z_j \Rightarrow |z_p|^2 \leqslant \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j\,;\,i,j\neq p}}^{n} |z_i|\,|z_j|$.

Însumînd după p, avem

$$\sum_{p=1}^{2n} |z_p|^2 \leqslant (2n - 2) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{2n} |z_i|\,|z_j|.$$

Adunînd în ambii membri ai inegalității $(n - 1) \sum_{p=1}^{n} |z_p|^2$, obținem

$$n \cdot \sum_{p=1}^{2n} |z_p|^2 \leqslant (n - 1) \left(\sum_{p=1}^{2n} |z_p| \right)^2$$

93. Arătăm că produsul dat este real, într-adevăr:

a) $$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z}_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2}{z_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{r^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} \text{ deci } \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z}_k}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2}{r^2} \leqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^2}{r^2} = \frac{n^2 r^2}{r^2} = n^2$$

inegalitatea din stînga este evidentă. În stînga se realizează egalitate, dacă unul din factori este zero, iar în dreapta dacă $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \pm r$ sau $\pm ri$.

b) Fie $z_k = r(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, $k = \overline{1, n}$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = r\left(\sum_{k=1}^{n} \cos \alpha_k\right) + ir \sum_{k=1}^{n} \sin \alpha_k = nr \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos \alpha_k = n \Rightarrow \alpha_k = 0,$$

$$k = \overline{1, n} \Rightarrow z_1 = z_2 = \ldots = z_n = r$$

c) $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} |z_k - z| \, |\bar{z}_k| = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} |z_k \bar{z}_k - z\bar{z}_k| =$

$$= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} |r^2 - z\bar{z}_k| \geqslant \frac{\left| \sum r^2 - z\bar{z}_k \right|}{r} = \frac{\left| nr^2 - z \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \right|}{r} = nr$$

94. Demonstrăm mai întîi inegalitatea:

$|z_k| \leqslant |z_1| + \ldots |z_{k-1}| + |z_{k+1}| + \ldots + |z_n| + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|$.

Într-adevăr $|z_k| = |z_1 + z_2 + \ldots z_{k-1} + z_k + z_{k+1} + \ldots + z_n -$
$- (z_1 + \ldots z_{k-1} + z_{k+1} + \ldots + z_n)| \leqslant |z_1 + \ldots + z_n| + |z_1| + \ldots$
$\ldots |z_{k-1}| + |z_{k+1}| + \ldots + |z_n|$. Înmulțind cu $|z_k|$ și respectiv cu $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|$ inegalitățile (1) și (2)

$$(1) \quad |z_k| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_{k-1}| + |z_{k+1}| + \ldots + |z_n| + |z_1 + \ldots z_n| \quad \forall \; k = \overline{1, n}$$

$$(2) \quad |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

obținem dacă notăm cu $S_k = |z_1| + \ldots + |z_{k-1}| + |z_{k+1}| + \ldots + |z_n|$
După însumare $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2 \leqslant$
$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| \, |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| + \sum_{k=1}^{n} |z_k| \, S_k$

Dacă se adună în ambii membri ai inegalității expresia:

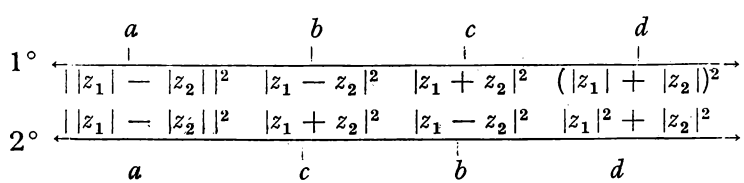
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + z_n|^2 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2$$

rezultă $2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2) \leqslant$
$\leqslant (|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|)^2$

95. Fie $z = r(\cos t + i \sin t) \Rightarrow \bar{z}^{2^n} + \bar{z}^{2^n} = r^{2^n} 2 \cos 2^n t \geqslant 0 \; (\forall) \; n \in \mathbf{N}^*$
Observăm că pentru $\cos x \geqslant 0$ și $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos 2x \geqslant \cos \alpha \Rightarrow \cos x \geqslant$
$\geqslant \cos \frac{\alpha}{2}$. Deci $\cos 2^n t \geqslant \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2^{n-1} t \geqslant \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos 2^{n-2} t \geqslant \cos \frac{\pi}{8}$
și din aproape în aproape $\Rightarrow \cos t \geqslant \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow -\frac{\pi}{2^{n+1}} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Singurul număr real care verifică inegalitățile de mai sus pentru orice $n \in \mathbf{N}$ este $t = 0$, deci $z \in \mathbf{R}_+$.

96. Pentru $p = 2$ se obține egalitate $(\forall) \; z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Într-adevăr $(*) \; |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + (|z_1| - |z_2|)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$
(am considerat $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R}$). Numerele reale pozitive $|z_1 + z_2|^2$, $|z_1 - z_2|^2$, $(|z_1| + |z_2|)^2$, $(|z_1| - |z_2|)^2$ pot fi așezate pe axa numerelor reale astfel:



1° Considerînd funcția $f(x) = x^{p/2}$, $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ și aplicînd Teorema lui Lagrange obținem: $\exists\, \theta_1 \in (a, b)$ și $\theta_2 \in (c, d)$ astfel încît $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\theta_1)$ și $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(\theta_2)$.

Dar $\theta_1 < \theta_2$ și $f'(x) = \frac{p}{2} x^{\frac{p-2}{2}}$ este pentru $p \geqslant 2$ funcție crescătoare; rezultă $f'(\theta_1) \leqslant f'(\theta_2)$. și deci

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Însă $b - a = d - c$ $(*) \Rightarrow f(b) - f(a) \leqslant f(d) - f(c) \Leftrightarrow f(b) + f(c) \leqslant f(a) + f(d) \Rightarrow |z_1 - z_2|^p + |z_1 + z_2|^p \leqslant ||z_1| - |z_2||^p + (|z_1| + |z_2|)^p$.

2) Pentru $p \in (0, 2)$, $f'(x) = \frac{p}{2} x^{\frac{p-2}{2}}$ devine descrescătoare și deci $f'(\theta_1) \geqslant f'(\theta_2) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \Rightarrow f(b) - f(a) \geqslant f(d) - f(c) \Rightarrow f(b) + f(c) \geqslant f(a) + f(d)$ de unde rezultă a doua inegalitate.

G.M. 5/1987

97. Fie $M_1, M_2, \ldots, M_n$ imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Semidreptele $0M_1$, $0M_2$, $\ldots 0M_n$ determină n unghiuri care împreună fac 2π. Cel puțin unul din ele $\alpha < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ $(n \geqslant 4)$.

Fie $m(\widehat{M_kOM_e}) = \alpha$. Atunci $|z_k + z_e|^2 = OM_k^2 + OM_e^2 + 2OM_k \cdot OM_e \cos\alpha = |z_k|^2 + |z_e|^2 + 2|z_k|\,|z_e| \cos\alpha \geqslant |z_k|^2 + |z_e|^2 + 2|z_k|\,|z_e| \cos\frac{2\pi}{n} \geqslant 2 \min_i |z_i|^2 + 2 \min_i |z_i|^2 \cos\frac{2\pi}{n} = 4 \min_i |z_i|^2 \cos^2\frac{\pi}{n} \Rightarrow \max_{k \neq e} |z_k + z_e| \geqslant 2 \min_i |z_i| \cos\frac{\pi}{n}$

G.M. 12/1985

98. Inegalitatea se mai scrie:

$|a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 + |a|^2 + |d|^2 + 1 + b\bar{c} + \bar{b}c - ad\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{d}bc \geqslant |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 + |a|^2 + |d|^2 + 1 - 2|b|\,|c| - 2|a|\,|b|\,|c|\,|d| = (|a|\,|d| - |b|\,|c| + 1)^2 + (|a| - |d|)^2 \geqslant 0$

99. 1) $ab + \bar{a}\bar{b} \leqslant a\bar{a} + b\bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a} - b)(a - \bar{b}) = (\bar{a} - b)\overline{(\bar{a} - b)} = |\bar{a} - b|^2 \geqslant 0$

2) după calcul obținem inegalitatea din (1).

100. 1) Se verifică prin calcul

2) Aplicînd modulul în inegalitatea din (1) și folosind inegalitatea triunghiului $\Rightarrow$

$$|a - b|\,(1 + |c|^2) \leqslant |a - c|\,|1 + b\bar{c}| + |c - b|\,|1 + a\bar{c}| \qquad (*)$$

și ținînd seama de inegalitatea $(1 + uv)(1 + \bar{u}\bar{v}) \leqslant (1 + |u|^2)(1 + |v|)^2$ obținem

$$|1 + b\bar{c}|^2 = (1 + b\bar{c})(1 + \bar{b}c) \leqslant (1 + |b|^2)(1 + |c|^2) \qquad (**)$$
$$|1 + a\bar{c}|^2 = (1 + a\bar{c})(1 + \bar{a}c) \leqslant (1 + |a|^2)(1 + |c|^2)$$

Ținînd seama de $(**)$ în $(*)$ rezultă inegalitatea din (2).

101. $||a| - |b|| \leqslant |a + b|$ şi $||c| + |d|| \geqslant |c| + |d| \geqslant |c + d| \Rightarrow$

$$\frac{1}{|c| + |d|} \leqslant \frac{1}{|c + d|} \Rightarrow \left|\frac{|a| - |b|}{|c| + |d|}\right| = \frac{||a| - |b||}{|c| + |d|} \leqslant \frac{|a + b|}{|c| + |d|} \leqslant \left|\frac{a + b}{c + d}\right|$$

dar $||c| - |d|| \leqslant |c + d| \Rightarrow \frac{1}{|c + d|} \leqslant \frac{1}{||c| - |d||}$ şi din

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \Rightarrow \left|\frac{a + b}{c + d}\right| = \frac{|a + b|}{||c| - |d||} \leqslant \frac{|a| + |b|}{||c| - |d||} = \left|\frac{|a| + |b|}{|c| - |d|}\right|$$

102. Evident egalitate pentru $z = 1$. Fie $z \neq 1$, atunci inegalitatea devine

$$4\sqrt{2} + |1 + z||z^2 + 1| \geqslant 4|1 + z|. \tag{1}$$

Dacă $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$, atunci din (1) rezultă

$4\sqrt{2} + 4\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\cos\alpha| \geqslant 8\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ (2). Notînd $t = \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| \in [0, 1]$

$\sqrt{2} + t|2t^2 - 1| \geqslant 2t$. Care este adevărată pentru orice $t \in [0, 1]$.

G.M. 8/1988

103. Evident z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi înscris în cercul de rază 1, cu centrul în originea unui sistem de axe şi unde lungimile laturilor sînt $a = |z_1 - z_2|$, $b = |z_2 - z_3|$, $c = |z_3 - z_1|$.

Relaţia din enunţ capătă forma $a + b + c \geqslant abc \Leftrightarrow$

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant 4 \sin A \sin B \sin C \quad (R = 1)$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \geqslant 4 \sin A \sin B \sin C \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

inegalitate cunoscută.

Egalitate cînd $z_1 = z_2 = z_3$ sau cînd triunghiul este echilateral cu laturile

$$a = b = c = \sqrt{3};\ a + b + c \geqslant abc \Leftrightarrow 2p \geqslant 4RS \Leftrightarrow$$

$$p \geqslant 2S \Leftrightarrow p \geqslant 2rp \Rightarrow 2r \leqslant 1 \Leftrightarrow 2r \leqslant R \Leftrightarrow (R = 1)$$

G.M. 6/1989

104. Fie $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2} = a + bi$. Prin ridicare la pătrat obţinem:

$$\Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 + 2\Sigma x_i y_i = a^2 - b^2 + 2abi \tag{1}$$

$$a^2 - b^2 = \Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 \tag{2}$$

$$ab = \Sigma x_i y_i \tag{3}$$

Aplicînd Cauchy—Buniakovski avem: $(\Sigma x_i y_i)^2 \leqslant (\Sigma x_i^2)(\Sigma y_i^2)$ sau

$$|\Sigma x_i y_i| \leqslant (\Sigma x_i^2)^{1/2} (\Sigma y_i^2)^{1/2} \tag{4}$$

Din (3) şi (4) obţinem:

$$|a| \cdot |b| \leqslant (\Sigma x_i^2)^{1/2} (\Sigma y_i^2)^{1/2} \tag{5}$$

Dacă $|a| < (\Sigma x_i^2)^{1/2}$ atunci cu (5) avem $|b| < (\Sigma y_i^2)^{1/2}$ (6)

Cu (2), $a^2 = \Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 + b^2$ şi aplicînd (6) ultima relaţie arată că $a^2 < \Sigma x_i^2$ care contrazice $|a| < (\Sigma x_i^2)^{1/2}$. Deci $|a| \leqslant (\Sigma x_i^2)^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

1. *Soluția I.* Se observă că $z_1^3 = z_2^3 = 1$ și $z_3^3 = z_4^3 = -1$.
Dacă $n = 6k + r$, $r \in \{0, 1, 2 \ldots 5\}$, atunci $z_1^n + z_2^n = z_1^r + z_2^r$ și
$z_3^n + z_4^n = z_3^r + z_4^r$.
Egalitatea $z_1^r + z_2^r = z_3^r + z_4^r$ este satisfăcută pentru $r \in \{0, 2, 4\}$.
Deci numerele căutate sînt de forma $6k$, $6k + 2$, $6k + 4$, $k \in \mathbf{Z}$ deci orice număr par satisface proprietatea cerută.

Soluția II. Soluțiile ecuației $z^2 + z + 1 = 0$ sînt ε și $\bar{\varepsilon}$ iar ale ecuației:

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ sînt } \omega \text{ și } \bar{\omega}.$$

Se observă că $\varepsilon = -\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon} = -\omega$

$$\omega^n + \bar{\omega}^n = (-\varepsilon)^n + (-\bar{\varepsilon}) = (-1)^n[\varepsilon^n + \bar{\varepsilon}^n] \Rightarrow n = \text{par}.$$

2. 1) Din $|a| + |c| < |b|$, prin împărțire cu $|a|$ rezultă $1 + \left|\frac{c}{a}\right| < \left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow$

$$1 + |z_1 z_2| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$
$$1 + |z_1||z_2| - |z_1| - |z_2| < 0 \Rightarrow (1 - z_1)(1 - |z_2|) < 0.$$

2) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, prin ridicare la pătrat a inegalității obținem:

$$a^2 + c^2 + 2|a||c| < b^2.$$

Deci dacă $ac > 0 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac < b^2$

$a^2 + c^2 - 2ac < b^2 - 4ac \Rightarrow (a - c)^2 < b^2 - 4ac$ deci $b^2 - 4ac > 0$, iar dacă $ac < 0$, atunci evident $b^2 - 4ac > 0$ ș.a.m.d.

3. Fie $z_1 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ și $z_2 = r_1(\cos \beta + i \sin \beta)$.
Din $z_1 z_2 = 1 \Rightarrow |z_1|\,|z_2| = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{r}$, deci $z_2 = \frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$.
Dar $|z_1 + z_2| = |a| = 1 \Rightarrow \left|\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos \alpha + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin \alpha\right| = 1$,
deci $r^2 + \frac{1}{r^2} = 3 - 4\cos^2\alpha \geqslant 2 \Rightarrow |\cos \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ și $|\sin \alpha| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} |\mathrm{Re}\, z_i| = |\cos \alpha|\,|z_i| \leqslant \frac{|z_i|}{2} \\ |\mathrm{Im}\, z_i| = |\sin \alpha|\,|z_i| \geqslant \frac{\sqrt{3}|z_i|}{2}. \end{matrix}$$

4. Fie z_1 și z_2 soluțiile ecuației $az^2 + bz + c = 0$ atunci $\bar{z}_1$ și $\bar{z}_2$ sînt soluțiile ecuației $\bar{a}z^2 + \bar{b}z + \bar{c} = 0$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \frac{c}{\bar{a}} \end{cases}$$

relația dată se mai scrie $\left|\frac{c}{a}\right| b = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} c \Leftrightarrow \left|\frac{c}{a}\right| \frac{b}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \frac{c}{a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -|z_1 \cdot z_2|(z_1 + z_2) = -z_1 z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1 \text{ căci } |z_1| = |z_2|$$

și deci ultima egalitate se mai scrie $z_1\bar{z}_1(z_1 + z_2) = z_1 z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1^2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{z}_1 z_2 + z_1 z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1|z_1|^2 = z_1|z_2|^2$$

R.M.T. 2/1987

5. *Soluția I.* Se calculează rădăcinile ecuației

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \frac{4}{3}(\alpha^2 + a\alpha + a^2)}}{2} = \frac{-a\sqrt{3} \pm i(2\alpha + a)}{2\sqrt{3}}$$

și se calculează $|z_2 - z_1| = \frac{|2\alpha + a|}{\sqrt{3}} = |z_1 - \alpha| = |z_2 - \alpha|$.

Soluția II.

$$z_1 = z_\alpha + (z_2 - z_\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 - z_\alpha = (z_2 - z_\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

se verifică că

$$|z_1 - z_\alpha| = |z_2 - z_\alpha| \text{ și } m(\widehat{z_1 z_\alpha z_2}) = \frac{\pi}{3}$$

deci triunghiul este echilateral

$$\frac{-a\sqrt{3} + i(2\alpha + a)}{2\sqrt{3}} - \alpha = \left(\frac{-a\sqrt{3} - i(2\alpha + a)}{2\sqrt{3}} - \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{(2\alpha + a)(-\sqrt{3} + i)}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\alpha + a)(-\sqrt{3} - i)}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

care se verifică ușor.

G.M. 3/1988

6. Din $|c| = |d| \Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right| = 1 \Rightarrow \frac{d}{c} = \cos t + i \sin t,\ t \in [0, 2\pi)$

Atunci $\frac{bz_k + a\alpha}{az_k + b\bar{\alpha}} = u_k$ (1) unde $u_k = \cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t + 2k\pi}{n}$

$$k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$$

Din (1) $\Rightarrow z_k = \frac{b\bar{\alpha}u_k - a\alpha}{b - au_k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$

$$\bar{z}_k = \frac{\overline{b\bar{\alpha}u_k - a\alpha}}{\overline{b - au_k}} = \frac{\bar{b}\alpha\bar{u}_k - \bar{a}\bar{\alpha}}{\bar{b} - \bar{a}\bar{u}_k} = \frac{\frac{r^2}{b}\alpha\frac{1}{u_k} - \frac{r^2}{a}\bar{\alpha}}{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{a}\frac{1}{u_k}} =$$

$$= -\frac{\alpha a - b\bar{\alpha}u_k}{au_k - b} = \frac{b\bar{\alpha}u_k - \alpha a}{b - au_k} = z_k \Rightarrow z_k \in \mathbf{R}$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}.$$

G.M. 4/1988

7. Din inegalitatea dată rezultă

$|a(b-c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab| \geqslant |b^2 - ac - c^2 + ab| =$
$= |b-c| \cdot |a+b+c| \Rightarrow |a|\,|b-c| > |b-c|\,|a+b+c|$. Evident $b \neq c$, altfel inegalitatea din enunț nu poate avea loc, deci rezultă că

$$|a| > |a+b+c| \Rightarrow \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| < 1 \Rightarrow |1 + z_1 z_2 - z_1 - z_2| < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |1-z_1| \cdot |1-z_2| < 1$, prin urmare $|1-z_1| < 1$ sau $|1-z_2| < 1$.

Dacă $|1-z_1| < 1 \Rightarrow (1-z_1)(1-\bar{z}_1) < 1 \Rightarrow |z_1|^2 < z_1 + \bar{z}_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow r_1^2 < 2r_1 \cos\alpha_1 < 2r_1 \Rightarrow r_1 < 2$, unde $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$
deci ecuația are cel puțin o rădăcină în modul mai mică decît 2.

G.M. 1/1988

8. Împărțind egalitatea din enunț cu $|a| \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right| = 2\left|\frac{c}{a}\right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2|z_1|\,|z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z_1|(1 - |z_2|) + |z_2|(1 - |z_1|) \geqslant 0 \text{ de unde rezultă fie}$$
$$1 - |z_1| \geqslant 0 \Leftrightarrow |z_1| \leqslant 1 \text{ sau } |z_2| \leqslant 1.$$

9. Se împarte cu $|a|$ inegalitatea din enunț și obținem

$$|u|^2 + \left|\frac{c}{a}\right| < |u|\left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow |u|^2 + |z_1 z_2| \leqslant |u|\,|z_1 + z_2| \leqslant$$
$$\leqslant |u|(|z_1| + |z_2|) \Leftrightarrow (|u| - |z_1|)(|u| - |z_2|) < 0 \Leftrightarrow$$
$|u| - |z_1| > 0$ și $|u| - |z_2| < 0$, deci $|z_1| < |u|$.

10. Fie $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, unde $\alpha = \arg a$ și $\gamma = \arg c$, iar

$$c = |c|(\cos\gamma + i\sin\gamma) \quad \arg b = \frac{\alpha+\gamma}{2}, \text{ atunci}$$

$$|b| = |b|\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} + i\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = (|a| + |c|)\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} + i\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (|a| + |c|)^2(\cos(\alpha+\gamma) + i\sin(\alpha+\gamma)) - 4|a|\,|c|\,[\cos(\alpha+\gamma) +$
$+ i\sin(\alpha+\gamma)] = (|a| - |c|)^2\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} + i\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2$. Deci $z_{1,2} =$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-(|a| + |c|)\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} + i\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \pm (|a| - |c|)\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} + i\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{2|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

$$z_1 = -\left|\frac{c}{a}\right|\left(\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} + i\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \Rightarrow |z_1| = \left|\frac{c}{a}\right|$$

$$z_2 = -\left(\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} + i\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \Rightarrow |z_2| = 1$$

Dacă $|c| = |a|$, atunci și $|z_1| = 1$

11. $1 = x + y + z = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz} \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + xz + yz = 1$; Formez ecuația de gradul trei:

$$t^3 - S_1 t^2 + S_2 t - S_3 = 0$$

$$t^3 - t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_{2,3} = \pm i$$

deci soluțiile sistemului sînt $(1, i, -i)$; $(1, -i, i)$; $(i, 1, -i)$; $(i, -i, 1)$

$(-i, i, 1)$; $(-i, 1, i)$.

12. Evident, sistemul este simetric, deci dacă (a, b, c) este o soluție, atunci orice permutare a acesteia este o altă soluție.

Observăm că $x = y = z = 0$ este o soluție.

Trecînd la module, obținem prin adunarea celor trei egalități

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = |x|\,|y| + |y|\,|z| + |z|\,|x| \Rightarrow$$

$\Rightarrow |x| = |y| = |z| = r > 0$ și deci sistemul devine:

$$\begin{cases} xr = z^2 \\ yr = x^2 \\ zr = y^2 \end{cases} \quad \text{de unde}$$

$$x = \frac{z^2}{r},\ y = \frac{x^2}{r} = \frac{z^4}{r^3} \Rightarrow z = \frac{y^2}{r} = \frac{z^8}{r^7} \Rightarrow z^7 = r^7 \Rightarrow z = r\varepsilon$$

unde ε este o rădăcină de ordinul 7 a unității, deci $x = r\varepsilon^2$, $y = r\varepsilon^4$, $r \in (0, \infty)$ și deci $(x, y, z) = (r\varepsilon^2, r\varepsilon^4, r\varepsilon)$ și permutările acesteia.

G.M. 3/1988

13. 1) Adunînd cele trei ecuații și ținînd seama că $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{a + b + c}{3}$; Înmulțind ecuația a doua cu ε^2 și pe a treia cu $\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon}{3}$; la fel se obține $z = \frac{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2}{3}$.

2) Dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ rezultă din prima ecuație că $a \in \mathbf{R}$ iar din ecuația a doua și a treia $\Rightarrow b$ și c sînt complex conjugate. Reciproc, dacă $a \in \mathbf{R}$ și b și c sînt complex conjugate atunci $b + c \in \mathbf{R}$, deci $x \in \mathbf{R}$

$$\bar{y} = \frac{\bar{a} + \bar{b}\varepsilon^2 + \bar{c}\bar{\varepsilon}}{3} = \frac{a + c\varepsilon + b\varepsilon^2}{3} = y \text{ (deoarece } \bar{b} = c \text{ și } \bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$$

la fel $\bar{z} = z$, deci $y, z \in \mathbf{R}$.

3) Ținînd seama că $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$, $\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ avem:

$$|a|^2 = a \cdot \bar{a} = (x + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \bar{x}(y + z) + \bar{y}(z + x) + \bar{z}(x + y)$$

$$|b|^2 = b \cdot \bar{b} = (x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(\bar{x} + \bar{\varepsilon}\bar{y} + \bar{\varepsilon}^2 y) = (x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(\bar{x} + \varepsilon^2 \bar{y} + \varepsilon \bar{z}) = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \bar{x}(y\varepsilon + z\varepsilon^2) + \bar{y}(x\varepsilon^2 + z\varepsilon) + \bar{z}(x\varepsilon + y\varepsilon^2)$$

$$|c|^2 = (x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon)(\bar{x} + \bar{y}\varepsilon + \bar{z}\varepsilon)^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \bar{x}(y\varepsilon^2 + z\varepsilon) + \bar{y}(x\varepsilon + z\varepsilon^2) + \bar{z}(x\varepsilon^2 + y\varepsilon).$$

Adunînd și ținînd seama de $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ rezultă egalitatea cerută.

14. Evident, sistemul admite soluția $x_k = y_k = 0\ (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots n\}$ Arătăm că aceasta este unica soluție. Într-adevăr, să presupunem că ar mai avea și altă soluție, diferită de aceasta, adică

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ soluție diferită de cea nulă.}$$

Notăm $z_k = x_k - iy_k;\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Evident că $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$; (1)

și $|z_1| = 2^2|z_2| = 3^2|z_3| = \ldots = n^2|z_n|$; (2)

Din (1) și (2) deducem $z_1 = -z_2 - z_3 - \ldots - z_n$ și

$$|z_1| \leqslant |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| \Rightarrow |z_1| \leqslant |z_1|\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right); \quad (3)$$

Dacă $|z_1| \neq 0 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$; (4)

Dar $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} <$

$< 1 - \frac{1}{n} < 1$; (5)

Relațiile (4) și (5) sînt contradictorii; așadar presupunerea $|z_1| \neq 0$, echivalentă cu faptul că sistemul ar avea și o altă soluție diferită de cea banală, este absurdă.

15. Se observă că dacă z_i este rădăcină a ecuației, atunci și $\frac{1}{\bar{z}_i}$ este rădăcină a ecuației.

Deci, z_1, z_2, z_3 trebuie să coincidă (eventual într-o altă ordine) cu $\frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}, \frac{1}{\bar{z}_3}$ de unde rezultă afirmația cerută.

16. Fie $z = r(\cos t + i \sin t) \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ o rădăcină a ecuației.

Deci $r \neq 0$ și $\sin t \neq 0$. Impunînd că z verifică ecuația rezultă:

$$r^n(\cos nt + i \sin nt) + nr\,(\cos t + i \sin t) + a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^n \sin nt + nr \sin t = 0 \Rightarrow r^n \sin nt = -nr \sin t \Rightarrow r^n |\sin nt| =$$

$= nr\,|\sin t|$. (1) Se demonstrează prin inducție că $|\sin nt| < n\,|\sin t|$. Ținînd seama de (1) avem:

$$nr\,|\sin t| < nr^n |\sin t| \Rightarrow r > 1 \Rightarrow |z_0| > 1$$

Soluția a II-a: Fie $z_0 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ soluție; atunci și $\bar{z}_0$ este soluție, deci $z_0^n + nz_0 + a = 0$ și $\bar{z}_0^n + n\bar{z}_0 + a = 0 \Rightarrow z_0^n - \bar{z}_0^n + n(z_0 - \bar{z}_0) = 0$.

Întrucît $z_0 \in \mathbf{C} - \mathbf{R} \Rightarrow z - \bar{z}_0 \neq 0$, deci

$$z_0^{n-1} + z_0^{n-2}\bar{z}_0 + z_0^{n-3} \cdot \bar{z}_0^2 + \ldots + \bar{z}_0^{n-1} = -n \quad (2) \text{ dar}$$

$$|z^{n-k}\bar{z}^{k-1}| = |z|^{n-k}|\bar{z}|^{k-1} = |z|^{n-1} \quad (\forall) \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Din (2) rezultă

$$n = \left|\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}\bar{z}^{k-1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z|^{n-k}\,|\bar{z}|^{k-1} =$$

$$= n|z|^{n-1} \Rightarrow |z| \geqslant 1 \text{ și deoarece } |z| \neq 1 \Rightarrow |z| > 1.$$

17. *Soluția I.* Să presupunem că ecuațiile ar mai avea o altă soluție comună (în afară de răd. $z_0 = 1$). Există deci $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ și $p \in \{1,2, \ldots, m-1\}$ astfel încît $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m} \Leftrightarrow \cos\frac{2k\pi}{n} - \cos\frac{2p\pi}{m} = 0$ și $\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2p\pi}{m} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi \cdot \sin\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \text{ și}$$

$$2\sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi \cos\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \text{ sau}$$

$$\sin\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \text{ și } \cos\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0.$$

și cum ultimele egalități nu pot avea loc simultan rezultă:

$$\sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \Rightarrow km - pn = Smn \Rightarrow km = n(Sm + p) \Rightarrow n/km$$

și cum $(n, m) = 1 \Rightarrow n/k$ absurd, deoarece $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Soluția II. Fie $z_0 \neq 1 \begin{cases} z_0^m = 1 \\ z_0^n = 1 \end{cases}$ dar din $(m, n) = 1 \Rightarrow (\exists)\ u, v \in \mathbf{Z}$ a.î. $mu + nv = 1$ $z_0^{mu} = 1$ și $z_0^{nv} = 1 \Rightarrow z_0^{mu} \cdot z_0^{nv} = 1 \Rightarrow z_0^{mu+nv} = 1 \Rightarrow z_0 = 1$ absurd.

18. Dacă $d = (m, n) \Rightarrow (\exists)\ m, n \in \mathbf{Z}$, a.î. $m = dm_1$ și $n = dn_1$; și $(\exists)\ u, v \in \mathbf{Z}$, a.î. $d = mu + nv$

Dacă z_0 este rădăcină a ecuației $z^d - 1 = 0 \Rightarrow z_0^d = 1 \Rightarrow$

$$z_0^{dm_1} = 1 \Rightarrow z_0^m = 1 \text{ și}$$

$$z_0^{dn_1} = 1 \Rightarrow z_0^n = 1$$

deci z_0 este rădăcină comună a celor două ecuații.

Reciproc: fie z_0 o rădăcină comună a celor două ecuații $z_0^m = 1$ și $z_0^n = 1 \Rightarrow z_0^{mu} = 1$ și $z_0^{nv} = 1 \Rightarrow z_0^{mu+nv} = 1 \Rightarrow z_0^d = 1 \Rightarrow z_0$ verifică ecuația $z^d = 1$.

19. Observăm că z_0 verifică ecuația:

Fie $z \neq 0$ și $m \neq n$, putem presupune $n > m$ (cazul $n < m$ se tratează la fel). Din $z^n = \bar{z}^m \Rightarrow |z^n| = |\bar{z}^m| \Rightarrow r^n = r^m \Rightarrow r^{n-m} = 1 \Rightarrow r = 1$

Înmulțind ambii membri ai ecuației cu $z^m \Rightarrow$

$$z^{n+m} = (z \cdot \bar{z})^m = |z|^m = 1 \Rightarrow z^{n+m} = 1$$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+m} + i\sin\frac{2k\pi}{n+m} \quad k = \overline{0, 1, \ldots n+m-1}$$

Dacă $n = m$, considerăm cazul $n = m = 1 \Rightarrow z = \bar{z}$ deci orice număr real verifică ecuația; iar dacă $n = m = 2$ atunci orice număr de pe cele două axe de coordonate verifică ecuația, adică

$$z \in \mathbf{R} \text{ și } z = ai,\ a \in k$$

Fie $m = n \geqslant 3$ atunci din $z^n = \bar{z}^n \Rightarrow z^m = |z|^m \Rightarrow$

$\left(\frac{z}{|z|}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow z = |z|\,\varepsilon_k$ unde $\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}$ $k = \overline{0, 1, \ldots 2n-1}$

sau $z = r\varepsilon_k, k = \overline{0, 1, \ldots 2n-1}$, unde $r \in (0, +\infty)$ arbitrar.

Dacă imaginile geometrice ale soluțiilor ecuației $z^n = \bar{z}^n$ sînt vîrfurile unui poligon cu $2n$ laturi înscris în cercul de rază r arbitrară; astfel spus intersectînd cele $2n$ semidrepte cu originea în „0", care împart planul în $2n$ sectoare unghiulare de măsură $\frac{\pi}{n}$, cu un cerc de rază r, arbitrară, se obțin $2n$ soluții ale ecuației $z^n = \bar{z}^n$ (vezi figura alăturată)

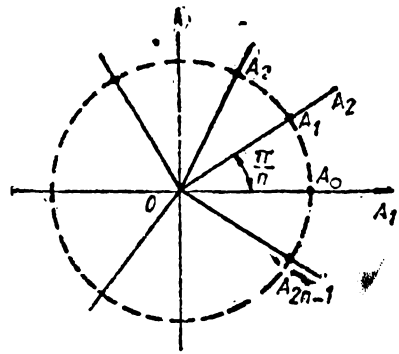


Fig. 23

20. Observăm că $z = 0$ verifică ecuația; fie deci $z \neq 0$, atunci

$$z^{2n} + \bar{z}^{2n} - 2(z \cdot \bar{z})^n = 0 \Rightarrow (z^n - z^n)^2 = 0 \Rightarrow z^n = \bar{z}^n$$

Dacă $n = 1 \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbf{R}$

Dacă $n = 2 \Rightarrow z^2 = \bar{z}^2 \Rightarrow (x + iy)^2 = (x + iy)^2 = (x - iy)^2 \Rightarrow 2xy = 0$

deci $z = x \in \mathbf{R}$ și $z = iy$; $(y \in \mathbf{R})$

Deci orice punct de pe cele două axe de coordonate verifică ecuația.

Fie $n \geqslant 3$, atunci $z^n = \bar{z}^n / \cdot z^n \Rightarrow z^{2n} = (z \cdot \bar{z})^n = \rho^{2n}$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{\rho}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow \frac{z}{\rho} = \varepsilon_k \quad k = \overline{0, 1, \ldots 2n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \rho\varepsilon_k \; k = \overline{1, 2, \ldots 2n-1} \text{ și } \rho \in (0, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \rho\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i \sin\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$k = \overline{0, 1, \ldots 2n-1}$$

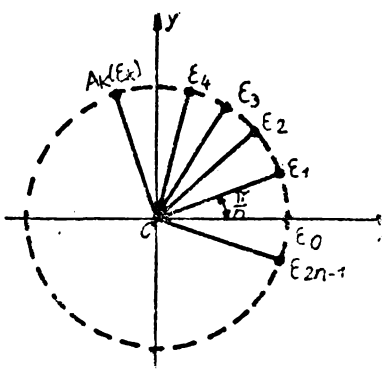


Fig. 24

Pentru un k dat și $\rho \in (0, \infty)$, arbitrar obținem orice punct de pe semidreapta $|0A_k$, deci soluțiile ecuației se obțin intersectînd cele $2n$ semidrepte ce fac între ele unghiuri de măsură $\frac{\pi}{n}$, cu un cerc de centru „0" și rază ρ, arbitrară. (vezi figura alăturată).

21. Observăm că $z = 0$ verifică ecuația

Presupunem $z \neq 0$ și vom considera două cazuri

I. $m \neq n \quad z^m = -|z|^n \Rightarrow |z|^m = |z|^n \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z^m = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \; ; \; k = \overline{0, \ldots m-1}$$

II. $m = n \cdot z^n + |z|^n = 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{|z|}\right)^n = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow \frac{z}{|z|} =$

$$= \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \; k = \overline{0, 1, 2, \ldots n-1}$$

deci

$$z = |z|\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] \quad k = \overline{0, 1, 2, \ldots n-1}$$

de unde rezultă că ecuația are o infinitate de soluții, pentru fiecare $r > 0$, $r = |z|$ ecuația are n soluții ale căror imagini geometrice sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază arbitrară r.

R.M.T. 1/1981

22. Evident $\omega^{2n+1} = 1 \Rightarrow 0 = 1 - \omega^{2n+1} = (1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \ldots + \omega^n + \omega^{n+1} + \ldots \omega^{2n}) \Rightarrow 1 + \omega + \omega^2 + \ldots \omega^{2n} = 0 \Rightarrow 1 + \omega + \ldots + \ldots \omega^n + \omega^n(\omega + \ldots + \omega^n) = 0 \Rightarrow \omega + \omega^2 \ldots + \omega^n = \frac{-1}{1+\omega^n} \Rightarrow z =$

$$= \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\omega^n} = \frac{1+\omega^n-2}{2(1+\omega^n)} = \frac{\omega^n - 1}{2(\omega^n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{2\pi n}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi n}{2n+1} - 1}{\cos\frac{2\pi n}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi n}{2n+1} + 1} = \frac{1}{2}\frac{\cos 2\alpha - 1 + i\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1 + i\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}\frac{2i\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi n}{2n+1}$$

unde $\alpha = \frac{\pi n}{2n+1}$.

a) $z^{2k} = \frac{i^{2k}}{2^{2k}}\,\mathrm{tg}^{2k}\frac{\pi n}{2n+1} \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\, z^{2k} = 0$

$z^{2k+1} = \frac{i^{2k+1}}{2^{2k+1}}\,\mathrm{tg}^{2k+1}\frac{\pi n}{2n+1}$ este pur imaginar, deci $\mathrm{Re}\, z^{2k+1} = 0$

b) $(2z+1)^{2n+1} + (2z-1)^{2n+1} = \left(i\,\mathrm{tg}\frac{\pi n}{2n+1} + 1\right)^{2n+1} +$

$$+ \left(i\,\mathrm{tg}\frac{\pi n}{2n+1} - 1\right)^{2n+1} = 0 = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1} - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^{2n+1}}{\cos^{2n+1}\alpha} =$$

$$\frac{2i\sin(2n+1)\alpha}{\cos^{2n+1}\alpha} = 0. \text{ unde } \alpha = \frac{\pi n}{2n+1}.$$

G.M. 8/1985

23. Suma dată este suma unei progresii geometrice cu rația $\frac{z+i}{z-i}$ deci este egală cu $\frac{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} - 1}{\frac{z+i}{z-i} - 1}$, iar ecuația este echivalentă cu

$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \varepsilon_k$ unde ε_k sînt rădăcinile de ordinul $n+1$ ale unității diferite de 1, deci

$$z_k = \frac{-i(1+\varepsilon_k)}{1-\varepsilon_k} = \mathrm{ctg}\,\frac{k\pi}{n+1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

24. Fie $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{2} + z\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + z\sin\frac{n\pi}{2}$.

Să considerăm pe rînd $n = 4k+1$ și $n = 4k+3$.

Dacă $n = 4k + 1 \Rightarrow z^n = z \Rightarrow z^{4k+1} = z \Rightarrow z^{4k} = 1$ (1) (Evident $z \neq 0$)

$n = 4k + 3 \Rightarrow z^n = -z \Rightarrow z^{4k+3} = -z \Rightarrow z^{4k+2} = -1$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$ pentru care se verifică egalitatea $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ şi $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

25. Evident $z = 0$ verifică ecuaţia.

Presupunem $z \neq 0$, atunci $\bar{z}^5 = \bar{z} - z \Rightarrow z^5 + \bar{z}^5 = 0 \Leftrightarrow$
$(z + \bar{z})(z^4 - z^3 + z^2\bar{z}^2 - zz^3 + \bar{z}^4) = 0$ de unde rezultă $\bar{z} = -z$ deci $z = iy$ şi impunînd să verifice ecuaţia $z^5 = z - \bar{z}$ obţinem $iy^5 = 2iy \Rightarrow y^4 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2} \Rightarrow z_1 = i\sqrt[4]{2},\ z_2 = -i\sqrt[4]{2}$.

Dacă cel de-al doilea factor este nul, împărţind cu $\bar{z}^4$, obţinem, dacă notăm cu $u = \frac{z}{\bar{z}}$, ecuaţia: $u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 = 0$ de unde rezultă soluţiile $u_k = \omega_k,\ k = 1, 2, 3, 4.$; ω_k fiind rădăcinile complexe de ordinul 5 ale lui „-1".

Înlocuind $u = \frac{z}{\bar{z}} \Rightarrow z = \bar{z}\omega_k,\ k = \overline{1,4}$ şi impunînd ca $\bar{z}\omega_k$ să verifice ecuaţi

$z^5 = z - \bar{z}$ obţinem: $\bar{z}^5\omega_k^5 = \bar{z}\omega_k - \bar{z} \Rightarrow -\bar{z}^4 = \omega_k - 1 \Rightarrow z^4 = 1 - \bar{\omega}_k$

echivalentă cu $z^4 = 1 - \omega$ de unde se mai obţin cîte 4 soluţii, deci încă 16 sol.

26. Se consideră descompunerea $z^n - 1 = (z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_1) \ldots$
$\ldots (z - \varepsilon_{n-1})$ unde se pune $z = -\frac{a}{b}$ deci $\left(-\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(-\frac{a}{b} - \varepsilon_0\right) \cdot$
$\cdot \left(-\frac{a}{b} - \varepsilon_1\right) \ldots \left(-\frac{a}{b} - \varepsilon_{n-1}\right) \Rightarrow (-a)^n - b^n = (-1)^n(a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \ldots$
$\ldots (a + b\varepsilon_{n-1}) \Rightarrow a^n - (-1)^n b^n = (a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \ldots (a + b\varepsilon_{n-1})$.

27. Observăm că $\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k \cos\alpha + 1 = (\varepsilon_k - z_0)(\varepsilon_k - \bar{z}_0)$ unde
$z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, deci $\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k\cos\alpha + 1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k - z_0)(\varepsilon_k - \bar{z}_0) =$

$= \prod_{k=0}^{n-1}(z_0 - \varepsilon_k)(\bar{z}_0 - \varepsilon_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(z_0 - \varepsilon_k)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(\bar{z}_0 - \varepsilon_k) = (z_0^n - 1)(\bar{z}_0^n - 1) =$

$= (z\bar{z}_0)^n + 1 - (z_0^n + \bar{z}_0^n) = 2 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n =$

$= 2(1 - \cos n\alpha).$

28. $z^{n+1} - 1 = (z - 1)(z - \varepsilon_1) \ldots (z - \varepsilon_n) \Rightarrow 1 + z + z^2 + \ldots + z^n =$
$(z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \ldots (z - \varepsilon_n)$ şi punînd $z = 1 \Rightarrow (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \ldots$
$\ldots (1 - \varepsilon_n) = n + 1.$

29. Fie ecuaţia $z^n - 1 = 0$ cu rădăcinile $z_0, z_1, \ldots, z^{n-1}$. Făcînd substituţia $u = \frac{1+z}{1-z}$ pentru $z \neq 1 \Rightarrow z = \frac{u-1}{u+1}$ şi ecuaţia se scrie

$$(u + 1)^n - (u - 1)^n = 0 \Rightarrow 2C_n^1 u^{n-1} + 2C_n^3 u^{n-3} + \ldots + 2 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$u_k = \frac{1 + z_k}{1 - z_k},\ k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

și scriind ultima relație a lui Viète rezultă:

$$\prod_{k=1}^{n-1} u_k = (-1)^{n-1}\frac{2}{2C_n'} = \frac{1}{n} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+z_k}{1-z_k}.$$

30. Fie P produsul, atunci

Evident $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3) = 2(1+\varepsilon)(-\varepsilon) = 2.$

Dacă $n = 3k \Rightarrow P = 2^k = 2^{\frac{n}{3}}$.

Dacă $n = 3k+1 \Rightarrow P = 2^{\frac{n-1}{3}}(1+\varepsilon)$.

Dacă $n = 3k+2 \Rightarrow P = 2^{\frac{n-2}{3}}$.

31. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sînt rădăcinile diferite de 1 ale ecuației $z^n - 1 = 0$, atunci prin schimbarea de variabilă

$$u = \frac{z}{1-z} \Rightarrow u_p = \frac{z_p}{1-z_p},\ p = 1, 2, \ldots, n-1$$

sînt rădăcini ale ecuației $(u+1)^n - u^n = 0$, care se mai scrie

$$C_n^1 u^{n-1} + C_n^2 u^{n-2} + \ldots + 1 = 0.$$

Deci $\sum\limits_{\substack{l=1,2,\ldots,n-2\\ k=2,3\ldots,n-1\\ l<k}} \frac{z_e z_k}{(1-z_e)(1-z_k)} = \sum\limits_{\substack{l=1,2,\ldots,n-2\\ k=2,3,\ldots,n-1\\ l<k}} u_e u_k = \frac{C_n^3}{C_n^1} = \frac{C_n^3}{n}$.

G.M. 1/1979

32. Fie $x_\alpha = \frac{z_\alpha}{1-z_\alpha}$, $\alpha = \overline{k_1, k_e}$, de unde x_α vor fi rădăcini ale ecuației $(x+1)^n - x^n = 0$, care se mai scrie:

$$C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + 1 = 0 \text{ de unde}$$

$$S = \frac{C_n^{l+1}}{C_n^1} = \frac{C_n^{l+1}}{n}.$$

33. $P(\varepsilon_0) = P(1) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pentru $x \neq 1$, avem $P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, deci

$$P(\varepsilon i) = \frac{n\varepsilon_i^{n+1} - (n+1)\varepsilon_i^n + 1}{(1-\varepsilon_i)^2},\ i = \overline{1, 2, \ldots, n},\ \text{dar cum } \varepsilon_i^n = 1$$

obținem

$$P(\varepsilon i) = \frac{n\varepsilon_i - n}{(\varepsilon_i - 1)^2} = \frac{n}{\varepsilon_i - 1},\ \text{prin urmare}$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} P(\varepsilon_i) = \frac{n(n+1)}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{n}{\varepsilon_i - 1} = (-1)^{n-1}\frac{n^n(n+1)}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-\varepsilon_i} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}n^n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\varepsilon_i)} = \frac{(-n)^{n-1}(n+1)}{2}$$

deoarece din descompunerea $1 + x + \ldots + x^{n-1} = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \ldots$

pentru $x = 1$ obţinem $n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_i) \ldots (x - \varepsilon_{n-1})$.

34. Evident $z^p = 1$ şi $z \neq 1$ deci z satisface ecuaţia:

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{p-1} - 1 + z^{p-2} - 1 + \ldots + (z - 1) + 1 - 1 = -p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z - 1)\,[z^{p-2} + 2z^{p-3} + 3z^{p-4} + \ldots + (p - 2)\,z + (p - 1)] = -p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - z} = \frac{z^{p-2}}{p} + \frac{2}{p} z^{p-3} + \frac{3}{p} z^{p-4} + \ldots + \frac{p - 2}{p} z + \frac{p - 1}{p} \Rightarrow$$

$$q_k = \frac{p - k - 1}{p},\ k = \overline{0, 1, \ldots p - 2}.$$

35. 1) $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0$ deci z satisface ecuaţia

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$$

$$z^{n-1} - 1 + z^{n-2} - 1 + \ldots + z - 1 = -n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z - 1)\,[z^{n-2} + 2z^{n-3} + \ldots + (n - 1)] = -n$$

şi trecînd la module obţinem:

$$n = |z - 1|\,|z^{n-2} + 2z^{n-3} + 3z^{n-4} + \ldots + n - 1| \leqslant$$

$$\leqslant |1 - z|\,(|z|^{n-2} + 2|z|^{n-3} + \ldots (n - 1)$$

$$n \leqslant |1 - z|(1 + 2 + \ldots + n - 1) = |1 - z| \cdot \frac{n(n - 1)}{2} \Rightarrow |1 - z| > \frac{2}{n - 1}$$

(egalitate numai dacă imaginile geometrice ale numerelor ar fi colineare)

2) $1 - z = 1 - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) = 2i \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |1 - z| = 2\left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| \Rightarrow 2\left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| = |1 - z| > \frac{2}{n - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n - 1}.$$

36. Membrii din stînga reprezintă sumele unor progresii geometrice cu raţia z, respectiv $-z$

Deci $1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, $z \neq 1$ şi

$$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n = \frac{1 - (-z)^{n+1}}{1 + z},\ z \neq -1.$$

Prin urmare rezultă ecuaţiile $z^{n+1} = 1$ şi respectiv $(-z)^{n+1} = 1$ cu soluţiile: $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n + 1} + i \sin \frac{2k\pi}{n + 1}$, $k = \overline{1, 2, \ldots n}$ şi respectiv

$$z'_k = -\left(\cos \frac{2k\pi}{n + 1} + i \sin \frac{2k\pi}{n + 1}\right),\ k = \overline{1, 2, \ldots, n}.$$

37. Pentru $n = 0 \to \frac{1}{z} = \bar{z} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ soluțiile sînt toate punctele de pe cercul de rază 1.
Dacă $n = 1$, $\bar{z} = 1 \Rightarrow z = 1$
Dacă $n = 2$, $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbf{R}$
Dacă $n \geqslant 3$, $z = 0$ este soluție;
fie $z \neq 0$, atunci $|\bar{z}|^{n-1} = |\bar{z}| = |z| \Rightarrow |z|^{n-2} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ și înmulțind ambii membri ai ecuației cu z, obținem $z^n = z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_k = \varepsilon_k$, $k = \overline{0, \ldots n-1} \Rightarrow z \in \{0\} \cup \{\varepsilon_k\}$.

38. $z^{n+m} \cdot \bar{z}^n = 1 \Rightarrow z^n \cdot \bar{z}^n \cdot z^m = 1 \Rightarrow |z|^{2n} z^m = 1$
Aplicînd modulul obținem $|z|^{2n+m} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z^m = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m},\ k = 0, \ldots, m-1.$$

39. $z = 0$ verifică ecuația; considerăm $z \neq 0$ și aplicăm modulul $|z|^n = |z|^m$. Dacă $n \neq m \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Dacă $n = m$, atunci $\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = 1 \Rightarrow z = r \cdot \varepsilon_k$, $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$
$k = 0, \ldots, n-1$ și $r \in (0, +\infty)$ arbitrar.

40. Ecuația $(z+u)^n - (z+\bar{u})^n = 0$, $u \in \mathbf{C}$, se mai scrie

$$\left(\frac{z+u}{z+\bar{u}}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{z+u}{z+\bar{u}} = \varepsilon_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$\Rightarrow z_k = \frac{\bar{u}\varepsilon_k - u}{1-\varepsilon_k}\ ;\ \text{evident}\ \bar{z}_k = \frac{u\bar{\varepsilon}_k - \bar{u}}{1-\bar{\varepsilon}_k} = \frac{\frac{u}{\varepsilon_k} - \bar{u}}{1-\frac{1}{\varepsilon_k}} = \frac{u\varepsilon_k - u}{1-\varepsilon_k} = z_k \text{ deci}$$

$z_k \in \mathbf{R}$. Dacă $u = a + ib$

$$\Rightarrow z_k = \frac{(a-ib)\varepsilon_k - (a+ib)}{1-\varepsilon_k} = -a - ib\frac{(1+\varepsilon_k)}{(1-\varepsilon_k)} =$$

$$= -a - ib\,\frac{2\cos\frac{k\pi}{n} + 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}} = -a - ib\,\frac{1}{(-i)}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n} = -a + b\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}.$$

41. Evident $z = 0$ verifică ecuația pentru $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.
Fie $z \neq 0$, atunci, dacă $n = 0 \Rightarrow \bar{z}|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{z} = 1$
dacă $n = 1 \Rightarrow z = \bar{z}|z| \Rightarrow |z| = |\bar{z}| \cdot |z| \Rightarrow |\bar{z}| \quad 1 \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow z \in \{\pm 1, 0\}$,
dacă $n = 2 \Rightarrow z^2 = \bar{z}\,|z| \Rightarrow z^3 = |z|^3 \Rightarrow \left(\frac{z}{|z|}\right)^3 = 1 \Rightarrow z = r\varepsilon_k$ $(k = 0, 1, 2)$,
$r \geqslant 0$, arbitrar.
Considerăm semidreptele cu originea în 0, axa $0x$, semidreapta $|0A$ care face cu axa $0x$ un unghi de $\frac{2\pi}{3}$ și $|0B$ care face cu axa $0x$ unghiul $\frac{4\pi}{3}$

Ducînd un cerc cu raza $r > 0$, arbitrară și cu centrul în originea axelor de coordonate se obțin trei punte ale căror afixe verifică ecuația:

$$z^3 = |z|^3.$$

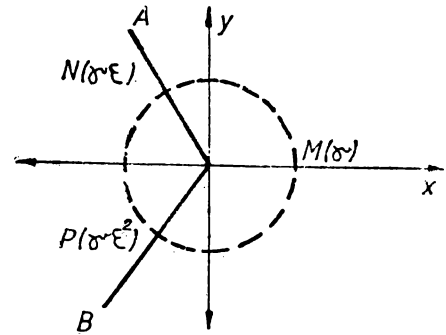


Fig. 25

Prin urmare ecuația are ca soluții o infinitate de triplete de forma

$$(r, r\varepsilon, r\varepsilon^2).$$

Dacă $n \geqslant 3$, atunci aplicînd modulul obținem $|z|^{n-2} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow z^n = \bar{z} \Rightarrow z^{n+1} = z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow z_k =$ $= \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, \ldots, n}$. Deci soluțiile în acest caz sînt

$$\{z_k\} \cup \{0\},\ k = \overline{0, \ldots, n}$$

42. Evident $z = 0$ verifică ecuația

Fie $n = 1 \Rightarrow z = i\bar{z} \Rightarrow x + iy = ix + y \Rightarrow x - y - i(x - y) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$, deci soluțiile ecuației sînt de forma $z = \alpha + i\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Dacă $n \geqslant 2$, atunci aplicînd modulul obținem

$$|z|^n = |i|\,|\bar{z}| = |\bar{z}| \Rightarrow |z|^{n-1} = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

și înmulțind ambii membri cu $z \Rightarrow z^{n+1} = i$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n+1},\ k = \overline{0, 1, \ldots, n},$$

la care se mai adaugă soluția $z = 0$.

43. Ecuația se mai scrie $z^n[1 + \alpha - i(1 - \alpha)] = 1 - \alpha + i(1 + \alpha)$ și cum $1 + \alpha - i(1 - \alpha) \neq 0 \Rightarrow z^n = \frac{1 - \alpha + i(1 + \alpha)}{1 + \alpha - i(1 - \alpha)} = i$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n},\ k = \overline{0, 1, \ldots, n-1}.$$

44. Fie z_0 soluție a ecuației

$1 + z_0 + \ldots + z_0^{n-1} = nz_0^n$. Să persupunem că $|z_0| > 1$, atunci $n|z_0|^n = |1 + z_0 + \ldots + z_0^{n-1}| \leqslant 1 + |z_0| + \ldots + |z_0|^{n-1} < n|z_0|^n$ — absurd, deci $|z_0| \leqslant 1$.

45. $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ sînt rădăcinile complexe ale ecuației $z^{2n+1} + 1 = 0$ $\Rightarrow z^{2n} - z^{2n-1} + z^{2n-2} - \ldots - z + 1 = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{2n})$ $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$. Dacă punem $z = 1$, rezultă egalitatea din enunț.

46. Evident dacă $p = mn \Rightarrow \varepsilon_i^{mn} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^p = n$.

Dacă $p \neq kn$, atunci fie ε rădăcina primitivă a unității

Deci $\varepsilon_k = \varepsilon^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$ şi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^p = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{kp} = \frac{\varepsilon^{np}-1}{\varepsilon^p-1} = 0.$$

47. Deoarece $\bar{z}_k$ este rădăcină a unităţii o dată cu

$z_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, suma din enunţ se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\bar{z}_k}{1+z_k} + \frac{1-z_k}{1+\bar{z}_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2-z_k^2-\bar{z}_k^2}{|1+z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2\frac{2k\pi}{2n+1}}{\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}} = 4\sum_{n}^{k=1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = 2n - 2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1} =$$

$$= 2n - 2\frac{\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = 2n + 2\frac{\sin\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} =$$

$$= 2n + \frac{\sin\frac{2n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = 2n + \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = 2n+1.$$

G.M. 1980

48. Fie $z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$. Avem $|z| \leqslant \left|\frac{b}{2a}\right| + \frac{1}{|2a|}\cdot|\sqrt{b^2-4ac}|$

dar $|\sqrt{b^2-4ac}| = |b|\left|\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right| \leqslant |b|\cdot\left|\sqrt{1+\left|\frac{4ac}{b^2}\right|}\right| \leqslant$

$|b|\left(1+\left|\frac{2ac}{b^2}\right|\right) = |b| + \left|\frac{2ac}{b}\right|$, aşa că $|z| \leqslant \left|\frac{b}{2a}\right| + \left|\frac{b}{2a}\right| + \left|\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{b}\right|$.

49. Din relaţiile lui Viète avem $z_1 + z_2 = -p$ şi $z_1z_2 = q$ şi inegalitatea dată devine $|z_1 + z_2| + |z_1z_2| < 1 \Rightarrow$

$|z_1| - |z_2| + |z_1||z_2| - 1 < 0 \Rightarrow (1 + |z_2|)(|z_1| - 1) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1| < 1$. La fel obţinem că $|z_2| < 1$.

50. 1) $|f(i)| < 1 \Rightarrow |f(i)|^2 < 1 \Rightarrow f(i)\overline{f(i)} < 1 \Rightarrow f(i)f(-i) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (c-a)^2 + b^2 < 1 \Rightarrow \Delta + (a+c)^2 < 1 \Rightarrow \Delta + (a+c)^2 \leqslant 0$ (*)
dar cum $a + c \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0$.
(dacă $a + c = 0 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ contradicţie cu *)

2) $|f(\varepsilon)| < 1 \Leftrightarrow |f(\varepsilon)|^2 < 1 \Leftrightarrow f(\varepsilon)f(\bar{\varepsilon}) < 1 \Rightarrow$
$0 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 1 \quad (a, b, c \in \mathbf{Z})$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow f(\varepsilon) = 0.$

51. a) $|f(i)| < 1 \Rightarrow |f(i)|^2 < 1 \Rightarrow (d-b)^2 + (c-a)^2 < 1$
$\Rightarrow (d-b)^2 + (c-a)^2 \leqslant 0 \Rightarrow c = a$ şi $d = b \Rightarrow az^3 + bz^2 + az + b = 0$
$\Rightarrow (az+b)(z^2+1) = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{b}{a}$, $z_{2,3} = \pm i$.

52. a) Evident $z = -1$ este soluție. Ecuația se mai scrie:

$$1 + z^2 + z^4 + \ldots z^{2n} + \bar{z} + \bar{z}^3 + \ldots + \bar{z}^{2n+1} = 0.$$

Pentru $z \neq \pm 1 \Rightarrow \dfrac{(z^2)^{n+1} - 1}{z^2 - 1} + \bar{z}\,\dfrac{(\bar{z}^2)^{n+1} - 1}{\bar{z}^2 - 1} = 0$

$$\frac{(z^2)^{n+1} - 1}{z^2 - 1} + \frac{1}{z}\,\frac{(z^2)^{n+1} - 1}{z^2 - 1} = 0\,;\quad \frac{(z^2)^{n+1} - 1}{z^2 - 1}\left(\frac{z+1}{z}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftarrow (z^2)^{n+1} = 1 \quad z^{2n+2} = 1 \quad z_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n+1}$$

(pentru $k = n + 1 \Rightarrow z = -1$) $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 2n + 1$

b) În mod analog, $z_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1} + \mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{n+1}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1$

$k \neq n + 1$

53. Fie $z = \operatorname{ctg} a$, atunci $(\cos a - \mathrm{i}\sin a)^n + (\cos a + \mathrm{i}\sin a)^n = \cos^n a \Rightarrow 2\cos na - \cos^n a = 0$. Notăm cu $f(a) = 2\cos na - \cos^n a$, atunci $f(0) > 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) < 0$, $f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) > 0$, ...

$$f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}\,2 - \cos^n\frac{(n-1)\pi}{n}\,,\ f(\pi) = (-1)^n(2-1),\ \text{deci}$$

$z_k = \operatorname{ctg} a_k$ sînt soluții reale situate în fiecare din intervalele determinate mai sus.

54. Fie z_1, z_2 rădăcinile ecuației. Din condiția $|a| \neq |c|$ rezultă $b \neq 0$ Împărțim relația dată cu $a\bar{a}$ și obținem:

$$\left|1 - \frac{c\bar{c}}{a\bar{a}}\right| = \left|\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\,\frac{c}{a}\right| \Leftrightarrow |1 - z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2| = |z_1z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) -$$

$$- (z_1 + z_2)|.$$ Ridicînd la pătrat și ținînd seama de relația $|z|^2 = z\bar{z}$, obținem: $(1 - |z_1|^2|z_2|^2)^2 = [z_1z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - (z_1 + z_2)]\,[\bar{z}_1\bar{z}_2(z_1 + z_2) - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)]$

Utilizînd notațiile $|z_1|^2 = \alpha^2$, $|z_2|^2 = \beta^2$,

$\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2 = \gamma$ obținem:

$$(1 - \alpha^2\beta^2)^2 = \alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma) - z_1z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2 - \bar{z}_1\bar{z}_2\,(z_1 + z_2)^2$$

$$(1 + \alpha^2\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma)(\alpha^2\beta^2 + 1) - 4\alpha^2\beta^2 - \gamma(\alpha^2\beta^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha^2\beta^2)^2 = (\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma(\alpha^2\beta^2 + 1) - \gamma(\alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 \cdot \beta^2 + 1)(1 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2) = \gamma(\alpha^2\beta^2 + 1 - \alpha^2 - \beta^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = \gamma(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)\,(\alpha^2\beta^2 + 1 - \gamma) = 0 \Rightarrow$ revenind la notații avem

$$(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)\,[|z_1|^2|z_2|^2 + 1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)(z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 + 1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 -)(1 - z_1\bar{z}_2)(1 - \bar{z}_1z_2) = 0,\ \text{de unde rezultă.}$$

$|z_1| = 1$ sau $|z_2| = 1$ și nici unul din ultimii doi factori nu este nul, deoarece dacă $z_1\bar{z}_2 = 1 \Rightarrow |z_1\bar{z}_2| = 1 \Rightarrow |z_1|\,|z_2| = 1 \Rightarrow |a| = |c|$ — contradicție.

55. a) Pentru $n = 1 \Rightarrow z = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z_1 = 0,\ z_2 = 1$

Pentru $n = 2 \Rightarrow z^2 = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbf{R}$.

Pentru $n \geqslant 3$, evident $z = 0$ este soluție. Fie $z \neq 0$ atunci, trecînd la modul, rezultă $|z|^n = |z|^2 \Rightarrow |z|^{n-2} = 1 \Rightarrow |z| = 1$

și ecuația devine $z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},\ k = \overline{0,\ n-1}$

Din punct de vedere geometric, imaginle geometrice ale soluției ecuației sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de rază 1, la care se adaugă originea sistemului de axe ($z = 0$).

§ 3. APLICAȚII ÎN TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

1. Prin calcul obținem: $z_1 z_2 = 2i$

$$\Rightarrow (z_1 z_2)^n = (2i)^n = 2^n \cdot i^n \in \mathbf{R} \Leftrightarrow n = 2k$$

$$(z_1 z_2)^n = 2^n \cdot i^n \in (0, +\infty) \Leftrightarrow n = 4k$$

G.M. 3/1979

2. Fie $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $b = \cos \beta + i \sin \beta$ și $c = \cos \gamma + i \sin \gamma$

Din ipoteză rezultă ușor că $a + b + c = 0$; dar folosind identitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma +$$

$$+ i(\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma) = 3[\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma}{3} \quad \text{și}$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin 3\alpha + \sin 2\beta + \sin 3\gamma}{3},$$

3. *Soluția I.* Notînd cu

$z_1 = \cos x + i \sin x$

$z_2 = \cos y + i \sin y$

$z_3 = \cos z + i \sin z$ și ținînd seama de ipoteză rezultă:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 -$$

$$- 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = 0 \Rightarrow \cos 2x + i \sin 2x + \cos 2y + i \sin 2y +$$

$$+ \cos 2z + i \sin 2z = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0.$$

Soluția II. Considerăm numerele complexe de mai sus, deci $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$$\cos x = \frac{z_1^2 + 1}{2z_1};\quad \cos y = \frac{z_2^2 + 1}{2z_2};\quad \cos z = \frac{z_3^2 + 1}{2z_3}$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 \Rightarrow \frac{z_1^2 + 1}{2z_1} + \frac{z_2^2 + 1}{2z_2} + \frac{z_3^2 + 1}{2z_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3) + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{2 z_1 z_2 z_3} = 0 \Rightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \text{ ș.a.m.d.}$$

4. $z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

$\bar{z}^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$ şi $z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos n\alpha = \frac{z^n + \bar{z}^n}{2} = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n} \text{ şi } \sin n\alpha = \frac{z^n - \bar{z}^n}{2i} = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}.$$

5. Fie $z = \cos 20° + i \sin 20° \Rightarrow \cos 20° = \frac{z^2 + 1}{2z}$; $\cos 40° = \frac{z^4 + 1}{2z^2}$;

$$\cos 80° = \frac{z^8 + 1}{2z^4}$$

deci $A = \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots + z^{14}}{8z^7} = \frac{z^{16} - 1}{8(z^9 - z^7)} =$

$$= \frac{-z^7 - 1}{8(-1 - z^7)} = \frac{1}{8} \; ; \; (z^9 = -1).$$

6. *Soluţia I.* Demonstrăm prin inducţie:

Pentru $n = 1$ trebuie să arătăm că $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$ şi

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$$

Notînd cu $z_1 = \cos x + i \sin x$

$z_2 = \cos y + i \sin y$

$z_3 = \cos z + i \sin z$ ipoteza dată se scrie $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \Rightarrow z_1z_2 + z_3z_1 + z_3z_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_2^3 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + i(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0 \text{ şi } \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$$

Presupunînd egalitatea adevărată pentru n, să demonstrăm egalitatea pentru $n + 1$. Notînd $2^n x = a$, $2^n y = b$, $2^n z = C$

$$\cos 2^{n+1} x + \cos 2^{n+1} y + \cos 2^{n+1} z = \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0$$

$$\sin 2^{n+1} x + \sin 2^{n+1} y + \sin 2^{n+1} z = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$$

în baza celor demonstrate pentru $n = 1$.

R.M.T. 2/1986

7. Fie $z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow z^n = -1$ şi $z^{2n} = 1$, deci

$$\cos \frac{k\pi}{n} = \frac{z^{2k} + 1}{2z^k}, \; k = 1, 2, \ldots, n - 1 \Rightarrow$$

$$S = \frac{z^2 + 1}{2z} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \ldots + \frac{z^{2n-2} + 1}{2z^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{z^n - z^{2n-1} - z^{n-1} + 1}{2z^{n-1}(1 - z)} = 0$$

8. Fie $z = \cos x + i \sin x$ atunci $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{\cos^k x} = \frac{\left(\frac{z}{\cos x}\right)^{n+1} - 1}{\frac{z}{\cos x} - 1} =$

$$= \frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{z^{n+1} - \cos^{n+1} x}{z - \cos x} \text{ adică}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x - \cos^{n+1} x}{i \sin x}$$

Egalizînd părţile reale avem: $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^k x}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\cos x^n \sin x}$.

9. Se arată că $z^k + \frac{1}{z^k} = 2 \cos k\alpha$ iar suma din stînga se scrie:

$2 \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha$, de unde rezultă egalitatea din enunţ.

10. Dacă notăm cu $z = \cos x + i \sin x \Rightarrow \sin kx = \frac{z^{2k} - 1}{2iz^k}$

şi $\cos kx = \frac{z^{2k} + 1}{2z^k}$, deci

$$S = \left(\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)^2 + \left(\frac{z^4 - 1}{2iz^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^2 + \ldots + \left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-2n + (z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n}) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-2n + \frac{z^2(z^{2n} - 1)}{z^2 - 1} + \frac{1 - z^{2n}}{z^{2n}(1 - z^2)}\right] = \frac{n}{2} - \frac{(z^{2n} - 1)(z^{2n+2} + 1)}{4z^{2n}(z^2 - 1)} =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\frac{z^{2n} - 1}{2iz^n} \cdot \frac{z^{2n+2} + 1}{2z^{n+1}}}{2 \cdot \frac{z^2 - 1}{2iz}} = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2 \sin x}$$

Notăm cu $P = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$,

Considerăm $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{n-1}$ rădăcinile de ordinul n ale unităţii unde

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon^n = 1$$

$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = (z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2) \ldots (z - \varepsilon^{n-1})$ pentru $z = 1$

$$n = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \ldots (1 - \varepsilon^{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \varepsilon^k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - \right.$$

$$\left. - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} - 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} - 2i \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= (-2)^{n-1} i^{n-1} P \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) =$$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} P \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{2} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} (i^{n-1}) P =$$

$$= 2^{n-1} P \Rightarrow P = \frac{n}{2^{n-1}}$$

12. Notăm $\frac{1+i}{2} = z \Rightarrow P = (1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2}) \dots (1+z^{2^n}) \mid (1-z)$

$\Rightarrow (1-z)P = (1-z^2)(1+z^2) \dots (1+z^{2^n}) = \dots = 1 - z^{2^{n+1}} \Rightarrow$

$$P = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1-z} = \frac{1 - \left[\left(\frac{1+i}{2} \right)^2 \right]^{2^n}}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{i}{2} \right)^{2^n}}{\frac{1-i}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right)(1+i)$$

13. $(2n + iz)^{2n} + (2n - iz)^{2n} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2n - iz}{2n + iz} \right)^{2n} = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \Leftrightarrow$

$$\frac{2n + iz - 2n + iz}{2n + iz + 2n - iz} = \frac{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} - i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1} = i \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{4n},$$

$$\Rightarrow z_k = 2n \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \qquad k = 0, 1, \dots, 2n-1$$

Deci $z_0 z_1 \dots z_{2n-1} = 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} \cdot 2n \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4n} \dots 2n \operatorname{tg} \frac{(2n-1)\pi}{4n} \dots 2n \operatorname{tg} \frac{(2n+1)\pi}{4n} \dots$

$$\dots 2n \operatorname{tg} \frac{(4n-1)\pi}{4n} = (2n)^{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4n} \dots \operatorname{tg} \frac{(4n-1)\pi}{4n} =$$

$$= (2n)^{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{4n} \dots \operatorname{tg}^2 \frac{(2n-1)\pi}{4n} = (2n)^{2n}$$

de unde, relația din problemă.

14. *Soluția I.* Ecuația se mai scrie $3z^2 - 2z(z_1 + z_2 + z_3) + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 \pm \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)}}{3}$$

Dacă $z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ este soluție, atunci $z_{1,2} = z_0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 = 0 \Leftrightarrow$ triunghiul este echilateral.

Soluția a II-a: fie z_0 afixul centrului cercului circumscris triunghiului atunci:

$$|z_0 - z_k|^2 = R^2 \Rightarrow \bar{z}_0 - \bar{z}_k = \frac{R^2}{z_0 - z_k} \Rightarrow 3\bar{z}_0 - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) =$$

$$= R^2 \left(\frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - z_2} + \frac{1}{z_0 - z_3} \right)$$

Triunghiul este echilateral dacă și numai dacă z_0 este și afișul centrului de greutate al triunghiului $\Leftrightarrow z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - z_2} + \frac{1}{z_0 - z_3} = 0.$

15. Fie $A'(z')$ afixul mijlocului segmentului BC deci

$$z' = \frac{z_B + z_C}{2}, \text{ cum } \frac{GA}{GA'} = 2 \Rightarrow z_G = \frac{z_A + 2z'_A}{1+2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

16. 1) Fie $A(z_A)$, $B(z_B)$ şi $M \in [A,B]$ atunci există $k \in [0, +\infty)$ astfel încît $AM = kMB \Leftrightarrow z_M = \frac{z_A + kz_B}{1+k} = \frac{1}{1+k} z_A + \frac{k}{1+k} z_B = \alpha z_A + \beta z_B$,

$$\alpha + \beta = 1, \ \alpha, \beta \in [0, 1].$$

2) Dacă M aparţine unei laturi ($M \in [AB]$) atunci în baza proprietăţii

1) există $\alpha, \beta \in [0, 1]$ cu $\alpha + \beta = 1$ astfel încît

$$z_M = \alpha z_A + \beta z_B + 0 z_C$$

şi reciproc — dacă un singur coeficient este nul, atunci punctul M aparţine unei laturi.

— dacă doi coeficienţi sînt nuli, atunci M se află într-unul din vîrfurile triunghiului ABC şi reciproc.

Fie $M \in \text{int}(ABC)$, atunci $AM \cap (BC) = \{P\}$ şi $P \in (BC)$ deci există $\alpha', \beta' \in (0,1)$ cu $\alpha' + \beta' = 1$ astfel încît $\alpha' z_B + \beta' z_C = z_P$ dar cum $M \in (AP)$ atunci există $\alpha'', \beta'' \in (0, 1)$ cu $\alpha'' + \beta'' = 1$ astfel încît $z_M = \alpha'' z_A + \beta'' z_P = \alpha'' z_A + \beta'' (\alpha' z_B + \beta' z_C) = \alpha'' z_A + \beta'' \alpha' z_B + \beta'' \beta' z_C = \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$ unde

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha'' + \beta''\alpha' + \beta''\beta' = \alpha'' + \beta''\alpha' + (1 - \alpha')\beta'' = \alpha'' + \beta'' = 1$$

Reciproc, dacă afixul unui punct M are forma

$$z_M = \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C \text{ cu } \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1) \text{ şi } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

atunci considerînd pe rînd toate situaţiile obţinem că sistemul $\alpha = \alpha''$, $\beta = \beta''\alpha'$, $\gamma = \beta''\beta'$ are soluţie unică, deci punctul M se află în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC.

17. Observăm că patrulaterul HBA'C este paralelogram iar afixul lui A' este $-z_A$ deci

$$z_H + z_{A'} = z_B + z_C \Rightarrow z_H - z_A = z_B + z_C \Rightarrow z_H = z_A + z_B + z_C;$$

vectorial relaţia se scrie astfel:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

18. Deoarece $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b} = k$ şi $\frac{IA}{IA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a} = k'$

$$z_{A'} = \frac{z_B + kz_C}{1+k} = \frac{z_B + \frac{c}{b} z_C}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{bz_B + cz_C}{b+c}$$

$$z_I = \frac{z_A + k' z_{A'}}{1+k'} = \frac{z_A + \frac{b+c}{a} z_{A'}}{1 + \frac{b+c}{a}} = z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$$

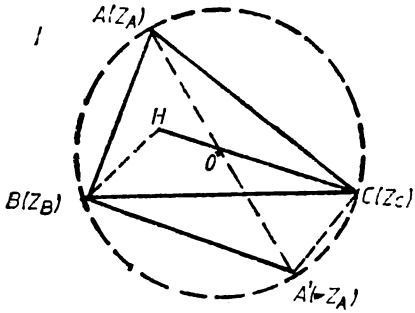


Fig. 26

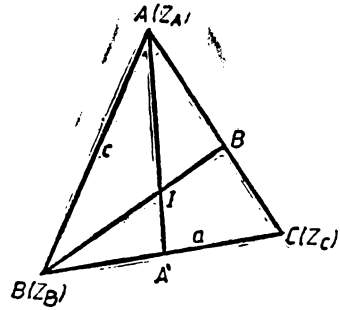


Fig. 27

19. 1) Relaţia 1) se mai scrie

$$\frac{|z_A - z_{A'}|^2}{z_A - z_{A'}} + \frac{|z_B - z_{B'}|^2}{z_B - z_{B'}} + \frac{|z_C - z_{C'}|^2}{z_C - z_{C'}} = 0 \Leftrightarrow$$

$\bar{z}_A - \bar{z}_{A'} + \bar{z}_B - \bar{z}_{B'} + \bar{z}_C - z_{C'} = 0$ (s-a utilizat identitatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2$) $\Leftrightarrow z_A + z_B + z_C = z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}$ care se verifică cu uşurinţă.

2) Scriind puterea punctului A', obţinem $A'A'' = \frac{a^2}{4m_a}$, dacă notăm raportul $\frac{AA'}{A'A''} = \frac{4m_a^2}{a^2} = k$, atunci:

$$z_{A'} = \frac{z_A + kz_{A''}}{1+k} \Rightarrow z_{A''} = \frac{(z_B + z_C)(1+k) - kz_A}{2k}.$$

Calculînd diferenţa

$$z_G - z_{A''} \text{ obţinem } z_G - z_{A''} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(z_A - z_{A'})}{6m_a^2},$$

deci

$$\frac{1}{z_G - z_{A''}} + \frac{1}{z_G - z_{B''}} + \frac{1}{z_G - z_{C''}} = \frac{6}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m_a^2}{z_A - z_{A'}} + \frac{m_b^2}{z_B - z_{B'}} + \frac{m_c^2}{z_C - z_{C'}}\right]$$

care este nulă în baza relaţiei 1)

20. Observăm că

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{S_c}{S_b} \text{ şi } \frac{PA}{PA'} = \frac{S_b + S_c}{S_a}$$

deci $z_{A'} = \dfrac{z_B + \frac{S_c}{S_b} \cdot z_c}{1 + \frac{S_c}{S_b}} = \dfrac{z_b S_b + S_c z_c}{S_b + S_c}$

$$z_p = \frac{z_A + \frac{S_b + S_c}{S_a} z_{A'}}{1 + \frac{S_b + S_c}{S_a}} =$$

$$= \frac{z_A + \frac{S_b + S_c}{S_a} \cdot \frac{S_b z_B + S_c \cdot z_c}{S_b + S_c}}{\frac{S_a + S_b + S_c}{S_a}} = \frac{S_a z_A + S_b z_B + S_c z_C}{S_a + S_b + S_c}.$$

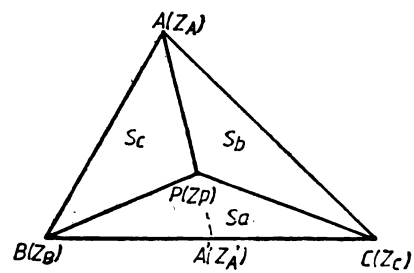


Fig. 28

21. Calculăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A + iy_A & x_B + iy_B & x_C + iy_C \\ x_A - iy_A & x_B + iy_B & x_C - iy_C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ x_A - iy_A & x_B - iy_B & x_C - iy_C \end{vmatrix} =$$

$$= -2i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = -2i \cdot 2S = -4iS \Rightarrow \sigma[ABC] = S = \frac{\Delta i}{4}.$$

22. Folosind ecuația dreptei care trece prin $P(z_0)$ și este perpendiculară pe dreapta AB, unde $A(z_1)$, $B(z_2)$ adică

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_1 - z_2) = z_0(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_0(z_1 - z_2). \quad (1)$$

În cazul nostru vom scrie ecuațiile mediatoarelor laturilor BC și AC, în rolul lui P fiind mijlocul acestor segmente:

$$z(\bar{z}_B - \bar{z}_C) + \bar{z}(z_B - z_C) = |z_B|^2 - |z_C|^2 \text{ (ec. mediat. segm. (BC))}$$
$$z(\bar{z}_C - \bar{z}_A) + \bar{z}(z_C - z_A) = |z_C|^2 - |z_A|^2 \text{ (ec. mediat. segm. (AC))}$$

eliminînd $\bar{z}$ (înmulțind prima ecuație cu $z_A - z_C$ și a doua cu $z_B - z_C$ obținem afixul z al centrului cercului circumscris triunghiului.

$$z[(\bar{z}_B - \bar{z}_C)(z_A - z_C) + (\bar{z}_C - \bar{z}_A)(z_B - z_C)] = (z_A - z_C)[|z_B|^2 - |z_C|^2] +$$
$$+ (z_B - z_C)(|z_C|^2 - |z_A|^2) \Rightarrow$$

$$z[z_A\bar{z}_B + z_B\bar{z}_C + z_C\bar{z}_A - (\bar{z}_Az_B + \bar{z}_Bz_C + \bar{z}_Cz_A)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix}}{4iS},$$

unde $S = \sigma[ABC]$.
(Vezi problema precedentă)

23. Scriem ecuațiile perpendicularelor din A pe BC și din B pe AC

$$z(\bar{z}_B - \bar{z}_C) + \bar{z}(z_B - z_C) = z_A(\bar{z}_B - \bar{z}_C) + \bar{z}_A(z_B - z_C)$$
$$z(\bar{z}_C - \bar{z}_A) + \bar{z}(z_C - z_A) = z_B(\bar{z}_C - \bar{z}_A) + \bar{z}_B(z_C - z_A)$$

și eliminînd pe $\bar{z}$ înmulțind prima ecuație cu $(z_A - z_C)$ și a doua ecuație $(z_B - z_C)$ obținem

$$z[(\bar{z}_B - \bar{z}_C)(z_A - z_C)(z_A - z_C) + (\bar{z}_C - \bar{z}_A)(z_B - z_C)] =$$
$$= z_A[(\bar{z}_C - \bar{z}_C)(z_A - z_C) + \bar{z}_A(z_B - z_C)(z_A - z_C) + z_B(\bar{z}_C - \bar{z}_A)(z_B - z_C) +$$
$$+ \bar{z}_B(z_C - z_A) \cdot (z_B - z_C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z[z_A\bar{z}_B + z_B\bar{z}_C + z_C\bar{z}_A) - (\bar{z}_Az_B + \bar{z}_Bz_C + \bar{z}_Cz_A)] =$$
$$= z_A^2(\bar{z}_B - z_C) + z_B^2(\bar{z}_C - z_A) + z_C^2(\bar{z}_A - \bar{z}_B) + |z_A|^2(z_B - z_C) + |z_B|^2(z_C - z_A) +$$
$$+ |z_C|^2(z_A - z_B)$$

de unde rezultă după calcule

$$z_H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \\ z_A^2 & z_B^2 & z_C^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ |z_A|^2 & |z_B|^2 & |z_C|^2 \end{vmatrix}.$$

Observația **1.** Din formula obținută pentru afixul ortocentrului și al centrului cercului circumscris triunghiului ABC rezultă:

$$\Rightarrow \frac{z_H + z_B}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \\ z_A^2 & z_B^2 & z_C^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix}} \Rightarrow \text{deci afixul}$$

centrului cercului lui Euler este:

$$z_\omega = -\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \\ z_A^2 & z_B^2 & z_C^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_A & z_B & z_C \\ \bar{z}_A & \bar{z}_B & \bar{z}_C \end{vmatrix}}$$

Observația **2.** Pentru z_H se poate găsi și expresia

$$z_H = \frac{a \cos B \cos C z_A + b \cos A \cos C z_B + c \cos A \cos B z_C}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B}$$

24. $Rh_a \geqslant 2rm_a \Leftrightarrow \frac{2RS}{a} \geqslant \frac{2S}{p} m_a \Leftrightarrow R(a+b+c) \geqslant 2am_a$ (1)

Fie punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ situate pe cercul $C(0, R)$ unde $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$.

Atunci $2am_a = |z_2 - z_3| \cdot |z_2 + z_3 - 2z_1| =$

$= |z_2(z_2 - z_1) + z_1(z_3 - z_2) + z_3(z_1 - z_3)| \leqslant |z_2|\,|z_2 - z_1| + |z_1|\,|z_3 - z_2| + |z_3| \cdot |z_1 - z_3| = R(a+b+c)$.

Soluția I. Cel de al treilea vîrf se obține printr-o rotație în sens direct sau invers a punctului B în jurul lui A cu unghiul $\pm \frac{\pi}{3}$

$$z_C = z_A + (z_B - z_A)\left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_C = 1 + (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{C_1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$z_{C_2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Soluția II. Afixul punctului C trebuie să satisfacă o relație de forma: $z_C + z_B\varepsilon + z_A\varepsilon^2 = 0$ sau $z_C + z_B\varepsilon^2 + z_A\varepsilon = 0 \Rightarrow$ adică $z_{C_1} = -\varepsilon(2+i) - \varepsilon^2$ și

$$z_{C_2} = -\varepsilon^2(2+i) - \varepsilon.$$

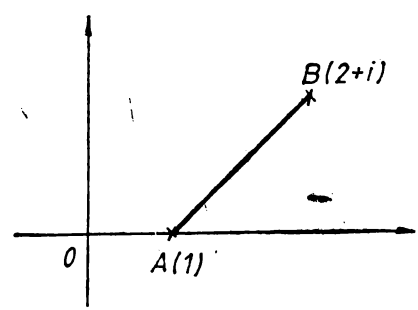


Fig. 29

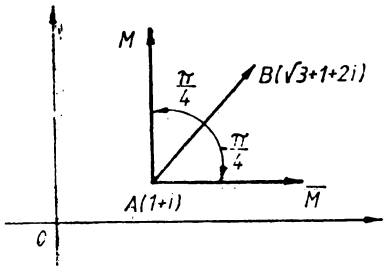


Fig. 30

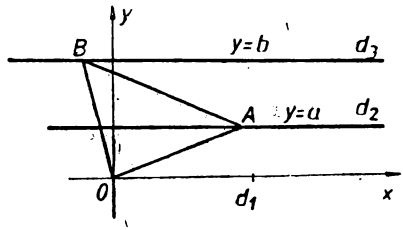


Fig. 31

25. Fie un sistem de axe de coordonate xoy. Afixele punctelor M şi $\overline{M}$ se obţin printr-o rotaţie în jurul lui A a punctului B cu unghiul de $\frac{\pi}{4}$ şi respectiv $-\frac{\pi}{4}$.

$$z_M = z_A + (z_B - z_A)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = (1+\mathrm{i}) + (\sqrt{3}+\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(1 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_{\overline{M}} = z_A + (z_B + z_A)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \mathrm{i} + (\sqrt{3}+\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(1 - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right).$$

26. Dacă d_1, d_2, d_3 sînt trei drepte paralele, alegem axa ox, dreapta d_1 şi axa oy o dreaptă perpendiculară pe d_1.
Fie $y = a$ şi $y = b$ ecuaţiile celor două drepte.
Dacă z_A, z_B sînt afixele punctelor A şi B atunci $z_A = u + \mathrm{i}a$ $z_B = v + \mathrm{i}b$

$$z_A = z_0 + (z_B - z_0)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u + \mathrm{i}a = (v + \mathrm{i}b)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \varepsilon = \pm 1 \Rightarrow u = \frac{a-2b}{\varepsilon\sqrt{3}},\quad v = \frac{2a-b}{\varepsilon\sqrt{3}}.$$

deci există două triunghiuri echilaterale OAB ale caror vîrfuri A şi B cu afixele $z_A = \frac{a-2b}{\varepsilon\sqrt{3}} + \mathrm{i}a$, $z_B = \frac{2a-b}{\varepsilon\sqrt{3}} + \mathrm{i}b$ situate pe dreptele d_1, d_2, d_3. $(\varepsilon = \pm 1)$.

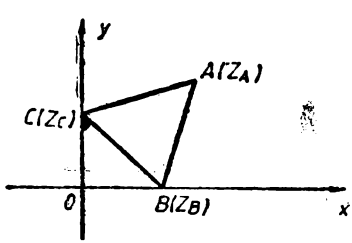


Fig. 32

27. Considerăm drept axe de coordonate dreptele d_1 şi d_2 cu originea $\{O\} = d_1 \cap d_2$. Notăm cu $z_B = u$ şi $z_C = iv$ afixele punctelor $B \in d_1$ şi $C \in d_2$; A,B,C sînt vîrfurile unui triunghi echilateral

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ şi}$$

$$\arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm\frac{\pi}{3},$$

deci putem scrie

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\overline{1 + \varepsilon i\sqrt{3}})(\varepsilon = \pm 1)$$

$$z_B - z_A = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon i\sqrt{3})(z_C - z_A) \Leftrightarrow$$

$$u - a - ib = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon i\sqrt{3})(iv - a - ib) \Leftrightarrow \begin{cases} u = b\varepsilon\sqrt{3} - a, \\ v = a\varepsilon\sqrt{3} - b, \end{cases}$$

deci punctele B şi C au afixele $z_B = b\varepsilon\sqrt{3} - a$
$z_C = i(a\varepsilon\sqrt{3} - b)$

Prin urmare există două triunghiuri echilaterale ABC, care au vîrful A fixat şi vîrfurile B şi C situate pe dreptele d_1 şi d_2, perpendiculare.

28. Dacă triunghiul este echilateral, atunci z_2 se obţine prin rotirea lui z_1 în sens direct $\left(\text{cu unghiul } \frac{2\pi}{3}\right)$ şi z_3 se obţine prin rotirea lui z_1 în sens invers $\left(\text{cu unghiul } -\frac{2\pi}{3}\right)$, deci

$$z_2 = z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon \quad \text{şi}$$
$$z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon^2.$$

(Vezi formula şi figura alăturată.)

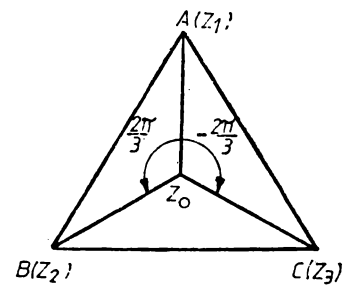


Fig. 33

Reciproc:
Trecînd la modul în relaţiile date, obţinem

$$\left.\begin{aligned} |z_2 - z_0| &= |z_1 - z_0|\,|\varepsilon| = |z_1 - z_0| \\ |z_3 - z_0| &= |z_1 - z_0|\,|\varepsilon^2| = |z_1 - z_0| \end{aligned}\right\}, \text{ deci}$$

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = |z_3 - z_0|,$$

adică z_0 este afixul centrului cercului circumscris triunghiului ABC, care coincide cu centrul de greutate; deci triunghiul este echilateral.

29. *Soluţia I.* În baza relaţiei (vezi problema 59).

$\sigma[ABC] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)$ deci dacă $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) = 0 \Rightarrow \sigma[ABC] = 0 \Rightarrow$ A, B, C colineare

Soluţia II. Dacă $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1$

$$\Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \text{A, B, C colineare.}$$

G.M. 9/1986

30. Deoarece z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral avem $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$; Calculînd distanţele dintre afixele $z_1z_2 - z_3^2$, $z_2z_3 - z_1^2$, $z_1z_3 - z_2^2$ obţinem:

$$|z_1z_2 - z_3^2 - z_2z_3 + z_1^2| = |z_1 - z_3|\,|z_1 + z_2 + z_3|,$$
$$|z_1z_2 - z_3^2 - z_1z_3 + z_2^2| = |z_2 - z_3|\,|z_1 + z_2 + z_3|,$$
$$|z_2z_3 - z_1^2 - z_1z_3 + z_2^2| = |z_1 - z_2|\,|z_1 + z_2 + z_3|$$

şi ţinînd seama de ipoteză rezultă că triunghiul de afixe:

$z_1z_2 - z_3^2$, $z_2z_3 - z_1^2$, $z_1z_3 - z_2^2$ este echilateral (dacă $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$) sau se reduce la un punct (dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$).

31. Să presupunem că z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral şi fie z_0 afixul centrului cercului circumscris triunghiului, atunci avem

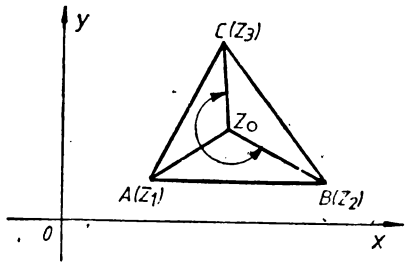


Fig. 34

$$z_2 = z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon$$
$$z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)\bar{\varepsilon} = z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon^2,$$

unde

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \text{ şi } \varepsilon^3 = 1 \text{ şi deci}$$

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = z_1 + \varepsilon[z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon] + \varepsilon^2[z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon^2] =$$
$$= z_1 + z_0(\varepsilon^2 + \varepsilon) + (z_1 - z_0)\varepsilon^2 + (z_1 - z_0)\varepsilon^4 = z_1 - z_0 + \varepsilon^2(z_1 - z_0) + \varepsilon(z_1 - z_0) = (z_1 - z_0)(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

Reciproc: Din $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ şi $z_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_1 = 0 \Rightarrow$
$\varepsilon(z_2 - z_1) + \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$

şi din $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ şi $z_2 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2(z_3 - z_2) + z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$ şi cum numerele sînt distincte $\Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \neq 0$ de unde rezultă că z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

32. 1) Relaţia dată este echivalentă cu

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 - (z_1 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 - \frac{\varepsilon(z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1)}{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0 \Leftrightarrow z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1, z_2, z_3$$

sînt afixele unui triunghi echilateral.

2) Observăm că $|z_1 + z_2 + kz_3 - z_1 - z_3 - kz_2| = |k - 1|\,|z_3 - z_2|$ s.a.m.d. sau $(z_2 + z_3 + kz_1) + \varepsilon(z_3 + z_1 + kz_2) + \varepsilon^2(z_1 + z_2 + kz_3) = 0 \Leftrightarrow$
$z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1 + z_3 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + k(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) = 0 \Leftrightarrow$
$(\varepsilon^2 + \varepsilon + k)(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) = 0$ $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1, z_2, z_3$
sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

33. Relaţia dată se mai scrie: $z_3 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 - (z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon(z_3 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2)}{\varepsilon} - (z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1) = 0 \Leftrightarrow (z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1)(\bar{\varepsilon} - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1 = 0$ de unde rezultă că z_1, z_2, z_3 sînt afixele unui triunghi echilateral, deci $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ dar atunci numerele $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 + z_3 - z_2$, $z_2 + z_3 - z_1$ sînt afixele unui triunghi echilateral avînd laturile duble celui de afixe z_1, z_2, z_3

$$|(z_1 + z_2 - z_3) - (z_1 + z_3 - z_2)| = 2|z_2 - z_3| \text{ etc.}$$

Observaţie: se poate utiliza rezultatul problemei 32.

G.M. 3/1987

34. Dacă z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral, atunci $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ (1) și înmulțind cu ε^2 avem $z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1 = 0$ și prin scăderea (respectiv adunarea) lor obținem:

$z_1 \pm z_2 + \varepsilon(z_2 \pm z_3) \pm \varepsilon^2(z_3 \mp z_1) = 0$ (2) din care rezultă că $z_1 \mp z_2$, $z_2 \mp z_3$, $z_3 \mp z_1$ sînt distincte (pentru că altfel z_1, z_2, z_3 ar fi colineare sau nu ar fi distincte și verifică o relație de forma (1)), deci ele sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

Reciproc:

Dacă $z_1 \mp z_2$, $z_2 \mp z_3$, $z_3 \mp z_1$ sînt respectiv afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral putem scrie relația:

$$z_1 \mp z_2 + \varepsilon(z_2 \mp z_3) + \varepsilon^2(z_3 \mp z_1) = 0 \Rightarrow$$
$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 \mp (z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_1) = 0 \Rightarrow$$
$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 \pm \varepsilon^2(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) = 0 \Rightarrow$$
$$(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(1 \mp \varepsilon^2) = 0 \Rightarrow z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$$

(fiind și distincte) ele sînt afixele unui triunghi echilateral.

35. *Soluția I.* Relația dată se mai scrie

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = (z_1 + z_2\varepsilon + z_3\varepsilon^2)(z_1 + z_2\varepsilon^2 + z_3\varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1 + z_2\varepsilon + z_3\varepsilon^2 = 0$ sau $z_1 + z_2\varepsilon^2 + z_3\varepsilon = 0$ (unde ε este o rădăcină cubică complexă a unității).

Folosind rezultatul problemei 31, rezultă că z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral sau $z_1 = z_2 = z_3$.

Soluția II. Din relația dată rezultă $z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = z_2z_3 + z_3z_1 -$
$- z_1z_2 - z_3^2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$ (1)

a) Dacă $z_1 = z_2$ atunci din (1) rezultă că $z_1 = z_2 = z_3$

b) Dacă $z_1 \neq z_2$ atunci din (1) avem:

$$(z_1 - z_2)^3 = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = A$$
$$\text{deci } |z_1 - z_2|^3 = |A| \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt[3]{|A|}$$

În mod analog rezultă și $|z_2 - z_3| = \sqrt[3]{|A|}$ și $|z_3 - z_1| = \sqrt[3]{|A|}$ deci $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ adică z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

36. Făcînd calculele în relațiile (1) și (2) se ajunge la relația:

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0$ și se aplică rezultatul problemei precedente sau relația (1) se mai scrie $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (z_1 + \varepsilon z_2 + z_3\varepsilon^2)(z_1 + z_2\varepsilon^2 + z_3\varepsilon) = 0$ (unde ε este o rădăcină cubică a unității, complexă) și se aplică rezultatul probl. 31.

37. *Soluția I.* Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ atunci condiția dată este echivalentă cu condiția că triunghiurile ABC și BCA să fie asemenea; ceea ce atrage după sine condiția $m(A) = m(B) = m(C) = \frac{\pi}{3}$ deci triunghiul este echilateral.

Soluția II. Calculînd determinantul obținem $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 -$
$- z_2z_3 - z_3z_1 = 0$ și se utilizează rezultatul problemei 35.

38. *Soluția I.* Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. Din considerațiile date rezultă că punctele sînt distincte:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2} + \frac{r^2}{z_3} \Rightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$

și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_3z_3 + z_3z_1) = 0$ de unde rezultă că verificată egalitatea: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0$ și se aplică rezultatul problemei 35.

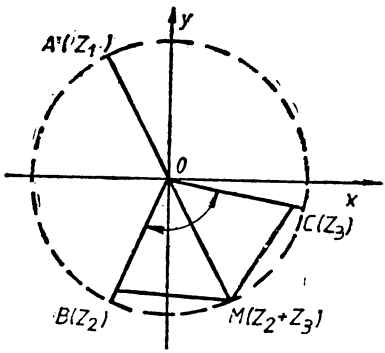


Fig. 35

Soluția II. Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $M(z_2 + z_3)$; Imaginile geometrice ale numerelor z_1, z_2, z_3 se află pe cercul de rază r și cu centrul în originea axelor de coordonate și imaginea M a lui $z_2 + z_3$ este $-z_1$, de unde rezultă că patrulaterul OBMC este un romb, și cum M se află pe cerc, rezultă că triunghiurile MCO și MBO sînt echilaterale deci $m(\widehat{BOC}) = 120$; de unde rezultă că triunghiul ABC este echilateral (vezi figura alăturată).

39. Trecînd la module obținem $|z_3 - z_1|\,|z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|^2$

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|^2$$

de unde rezultă că $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| > 0$.

Reciproc, dacă z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral atunci $z_k = a\varepsilon^k + b$, $k = 0, 1, 2$ și formulele se verifică ușor $\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ sau folosind relațiile:

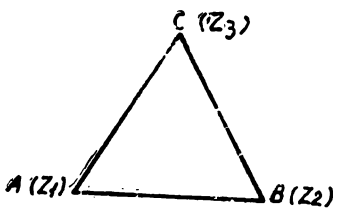


Fig. 36

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

rezultă $(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -(z_1 - z_2)^2 \Rightarrow$

$$(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2$$

și la fel a doua relație.

40. 1) Arătăm că $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$

Într-adevăr $|z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_3|^2 - (\bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_3) = |z_2|^2 + |z_3|^2 - (\bar{z}_2z_3 + z_2\bar{z}_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_3 = \bar{z}_2z_3 + z_2\bar{z}_3$ unde dacă înlocuim $z_3 = -z_1 - z_2$ obținem $\bar{z}_1(-z_1 - z_2) + z_1(-\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \bar{z}_2(-z_1 - z_2) + z_2(-\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ care este evident verificată.

2) Pentru ca triunghiul să fie echilateral trebuie ca în plus $|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2|$, deci $|z_1 - z_3|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_3|^2 - (z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3).$$

Înmulțind egalitățile $z_1 + z_2 = -z_3$ și $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\bar{z}_3$ obținem:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = |z_3|^2 \Rightarrow \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = b^2 - 2a^2$$

și la fel $z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = -b^2$

care înlocuite în ultima egalitate dă condiția $a = b$.

3) Pentru ca triunghiul să fie dreptunghic trebuie ca:

$$|z_1 - z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

care, este echivalentă cu egalitatea:

$$(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Leftrightarrow$$
$$2b^2 - (\bar{z}_1 z_3 + z_1\bar{z}_3) - (\bar{z}_2 z_3 + z_2\bar{z}_3) = -(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2).$$

Ținînd seama că $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = b^2 - 2a^2$ și $z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 = -b^2$, ultima egalitate devine: $2b^2 + 2b^2 = 2a^2 - b^2 \Rightarrow 2a^2 = 5b^2 \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Observație: reprezentînd geometric imaginile numerelor complexe și ținînd seama de condițiile $|z_1| = |z_2| = a$, $|z_3| = b$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, rezultă pe cale geometrică, punctele 1) și 2).

41. Fie A_1, A_2, A_3 și A imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 și respectiv $z = az_2 + (1 - a)z_3$, $a \in \mathbf{R}$

Evident $A \in A_2A_3$ și punctele A_1, A_2, A_3 sînt situate pe cercul de rază r cu centrul în originea axelor. Dacă B este piciorul perpendicularei din A_1 pe A_2A_3 avem:

$A_1A \geqslant A_1B$, deci

$$\min_{a\in\mathbf{R}} |z - z_1| = \min_{a\in\mathbf{R}} |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = A_1B = h.$$

Scriind aria triunghiului, obținem

$$\sigma[A_1A_2A_3] = \frac{|z_2 - z_3|h}{2} = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \sin\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \sin\alpha}{|z_2 - z_3|}$$

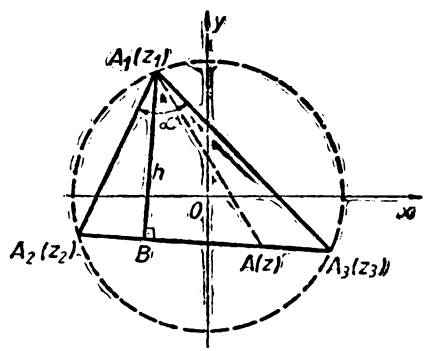


Fig. 37

dar din teorema sinusurilor

$$\frac{|z_2 - z_3|}{\sin\alpha} = 2r \text{ deci } h = \frac{|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|}{2r}, \text{ așadar}$$

$$\min_{a\in\mathbf{R}} |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|}{2r}.$$

42. Ecuația $z^4 - z^2 + 1 = 0$ se mai scrie $(z^2 - 1)^2 + z^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (z^2 + iz - 1)(z^2 - iz - 1) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2},$$

$z_3 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, de unde rezultă că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, deci imaginile geometrice M_1, M_2, M_3, M_4 ale numerelor com-

plexe z_1, z_2, z_3, z_4 sînt conciclice şi din $z_1 + z_3 = z_2 + z_4 = 0$ rezultă că $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram, fiind şi inscriptibil este dreptunghi. În mod analog $z^4 + z^2 + 1 = 0$ se mai scrie $(z^2 + 1)^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$ şi la fel $z_1' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_3' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $z_4' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ reprezintă vîrfurile unui dreptunghi $M_1'M_2'M_3'M_4'$. Cele două dreptunghiuri nu au vîrfuri comune.

Observaţie: rădăcinile celor două ecuaţii verifică ecuaţia:

$$z^{12} - 1 = 0;$$
$$z^{12} - 1 = (z^4 - 1)(z^8 + z^4 + 1) = (z^4 - 1)(z^4 + z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1).$$

43. Din prima condiţie rezultă că imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 formează un paralelogram, iar din condiţia a doua rezultă $z_1 - z_3 = i(z_4 - z_2) \Rightarrow |z_1 - z_3| = |z_2 - z_4|$
deci diagonalele sînt egale, prin urmare paralelogramul este dreptunghi; atunci, există $z \in \mathbf{C}$ care să verifice egalităţile date (z afixul centrului dreptunghiului).

44. Din $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3 - z_4 \Rightarrow$

$$(z_1 + z_2)^2 = (z_3 + z_4)^2 \text{ şi } |z_1 + z_2|^2 = |z_3 + z_4|^2$$
$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = z_3^2 + z_4^2 + 2z_3z_4, \quad (1)$$
$$(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = (\bar{z}_3 + \bar{z}_4)(z_3 + z_4) \quad (2)$$
$$\Rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = z_3\bar{z}_4 + \bar{z}_3z_4 \Rightarrow$$

$\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1z_2} = \frac{z_3^2 + z_4^2}{z_3z_4}$ (3) Din (1) şi (3) obţinem $z_1z_2 = z_3z_4$; analog $z_1z_4 = z_2z_3$.
Scăzînd aceste egalităţi vom avea:

$$z_1(z_2 - z_4) = z_3(z_4 - z_2) \Rightarrow (z_1 + z_3)(z_2 - z_4) = 0$$

de unde rezultă $z_1 + z_3 = 0$ deci şi $z_2 - z_4 = 0 \Rightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ adică z_1, z_2, z_3, z_4 sînt afixele vîrfurilor unui dreptunghi sau $z_2 = z_4$ şi din $z_1z_2 = z_3z_4 \Rightarrow z_1 = z_3$.

45. Într-adevăr, afixul centrului de greutate al triunghiului

$M_1M_3M_5$ este $z' = \frac{z_1 + z_3 + z_5}{3}$ iar al triunghiului

$M_2M_4M_6$ este $z'' = \frac{z_2 + z_4 + z_6}{3}$ şi ţinînd seama de condiţia dată rezultă $z' = z''$.

46. Fie z_A, z_B, z_C afixele vîrfurilor triunghiului ABC şi fie centrul de greutate al triunghiului ABC, originea O a sistemului de axe de coordonate deci $z_A + z_B + z_C = 0$ (1)
Afixul punctului D, $z_D = z_B + (z_A - z_B)i$, $z_G = z_A + (z_C - z_A)i$ şi, $z_H = z_C + (z_B - z_C)i$.

1) Adunînd cele trei relaţii şi ţinînd cont de (1) $\Rightarrow z_D + z_G + z_H = 0$ (la fel se obţine $z_E + z_F + z_I = 0$).

2) $|z_D - z_C| = |z_B - z_C + (z_A - z_B)i|$
$|z_G - z_B| = |z_A - z_B + (z_C - z_A)i|$
$|z_H - z_A| = |z_C - z_A + (z_B - z_C)i|$

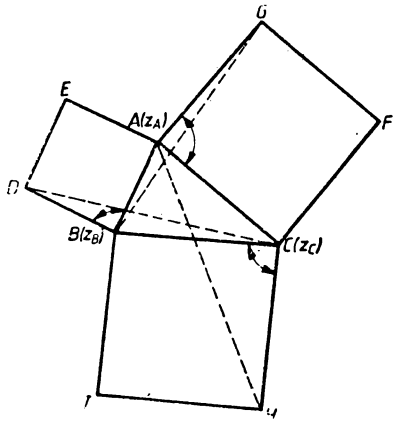


Fig. 38

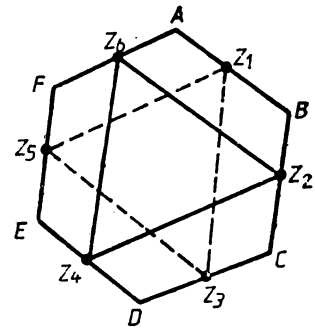


Fig. 39

$$DC + BG = |z_D - z_C| + |z_G - z_B| > |z_D - z_C + z_G - z_B| =$$
$$= |z_B - z_C + (z_A - z_B)i + z_A - z_B + (z_C - z_A)i| =$$
$$= |z_A - z_C + i(z_C - z_B)| = |z_C - z_A + i(z_B - z_C)| = HA.$$

În mod analog se deduc și celelalte inegalități.

47. $G_{z_1z_3z_5} = G_{z_2z_4z_6} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_3 + z_5}{3} = \frac{z_2 + z_4 + z_6}{3} \Leftrightarrow z_1 + z_3 + z_5 = z_2 + z_4 + z_6.$

$$\frac{z_A + z_B}{2} + \frac{z_C + z_D}{2} + \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{z_B + z_C}{2} + \frac{z_D + z_E}{2} + \frac{z_F + z_A}{2}.$$

48. Fie $\omega = \cos^2\frac{\pi}{3} + i\sin^2\frac{\pi}{3}$. Alegem originea sistemului de coordonate în centrul cercului. Deoarece triunghiurile OA_1A_1', OA_2A_2', OA_3A_3' sînt echilaterale, rezultă $a_1' + \omega a_1 = 0$, $a_2' + \omega a_2 = 0$, $a_3' + \omega a_3 = 0$.

Avem $m_1 + \omega^2 m_2 + \omega m_3 = \frac{1}{2}[(a_1' + a_2) + \omega^2(a_2' + a_3) + \omega(a_3' + a_1)] =$

$$= \frac{1}{2}[(a_1' + \omega a_1) + \omega^2(a_2' + \omega a_2) + \omega(a_3' + \omega a_3)] = 0$$

deci triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral.

49. Consider originea sistemului de axe de coordonate în centrul cercului de rază 1. Relația dată se scrie:

$A_1A_{n+2} - A_1A_n = A_1A_2$ deci $A_1A_{n+2} - A_1A_n = |z^{n+1} - 1| - |z^{n-1} - 1|$

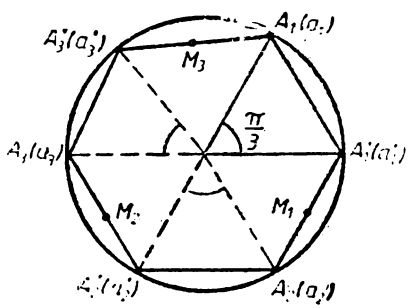


Fig. 40

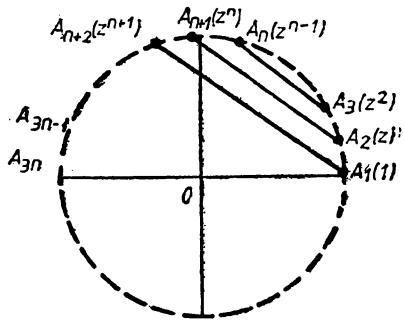


Fig. 41

dar $A_1A_n = A_2A_{n+1}$ şi deci $|z^{n-1} - 1| = |z^n - z|$ şi prin urmare

$$A_1A_{n+2} - A_1A_n' = A_1A_{n+2} - A_2A_{n+1} = |z^{n+1} - 1| - |z^n - z|.$$

Observăm că $A_1A_{n+2} \,||\, A_2A_{n+1}$ şi atunci obţinem

$$|z^{n+1} - 1| - |z^n - z| = |z^{n+1} - 1 - z^n + z| = |z^n(z-1) + z - 1| =$$
$$= |z - 1|\,|z^n + 1| \quad (1)$$

Cum $z^{3n} = 1 \Rightarrow z^{3n} - 1 = \underbrace{(z^n - 1)}_{\neq 0}(z^{2n} + z^n + 1)$ şi $z^n \neq 1 \Rightarrow$

$$\Downarrow$$
$$z^{2n} + z^n + 1 = 0 \Rightarrow z^n + 1 = -z^{2n}$$

şi înlocuind în (1) $\Rightarrow |z - 1|\,|z^n + 1| = |z - 1|\,|-z^{2n}| = |z - 1| = A_1A_2$, aşadar $A_1A_{n+2} - A_1A_n = A_1A_2 \Rightarrow A_1A_{n+2} = A_1A_n + A_1A_2$.

50. Într-un sistem de axe xOy se poate considera $A_1 \in Ox$ iar punctele $A_k(\varepsilon_k)$, unde afixele $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unităţii.

Fie z afixul lui $M \in |OA_1$, astfel încît, $|OB_1| < |OM| = |z| = a > 1$.

Considerăm $MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n = |z - \varepsilon_0| \cdot |z - \varepsilon_1| \ldots |z - \varepsilon_{n-1}| =$

$$= |(z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_1) \ldots (z - \varepsilon_{n-1})| = |z^n - 1| = |a^n - 1| =$$
$$= a^n - 1 < a^n.$$

Conform inegalităţii de medie avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{MA_k} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} MA_k}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a^n - 1}} > \frac{n}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{a}{n} = \frac{n}{OM}.$$

51. Fie $A_k(z_k)$, unde z_k, $k = \overline{1, n}$ sînt soluţiile ecuaţiei $z^n = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z\bar{z} + z_k\bar{z}_k - z_k\bar{z} - z\bar{z}_k) =$$

$$= n|z|^2 - \bar{z}\sum_{k=1}^{n} z_k - z\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2. \text{ Dar } \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \text{ (rel. Viète)},$$

$$\text{deci } \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k = 0,$$

aşadar $\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = n|z|^2 + n = 2n.$

$$\downarrow$$
$$1$$

52. Fără a micşora generalitatea se poate considera în locul dreptei (d), axa Oy. Presupunînd că imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se află în dreapta axei Oy, atunci

$\operatorname{Re} z_k > 0$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ condiţie echivalentă cu

$\operatorname{Re} \frac{1}{z_k} > 0$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de unde rezultă 1)

2) $\operatorname{Re} z_k > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k > 0$ şi $\operatorname{Re}\frac{1}{z_k} > 0 \Rightarrow$

$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\frac{1}{z_k} > 0$, de unde rezultă că

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$$

şi $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$

53. Se observă că $\varepsilon^n = 1$ şi cum $\varepsilon \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k = 0.$

Laturile poligonului sînt congruente

Într-adevăr $|z_1 - z_0| = |1 - \varepsilon|$; $|z_{n-1} - z_0| = |1 - \varepsilon^{n-1}| = \left|\frac{\varepsilon - \varepsilon^n}{\varepsilon}\right| =$

$$= \left|\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right| = |\varepsilon - 1|$$

şi în general $|z_k - z_{k-1}| = |\varepsilon^{k-1} - \varepsilon^k| = |\varepsilon^{k-1}(1 - \varepsilon)| = |1 - \varepsilon|$

Poligonul este înscris în cercul de rază 1 şi centru O deoarece

$$|z_k| = |1 + \varepsilon + \ldots \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} + \ldots + \varepsilon^{n-1} - \varepsilon^k| =$$

$$= \left|\frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} - \varepsilon^k\right| = |-\varepsilon^k| = 1.$$

54. Fie $z_0 = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$. Afixul numărului z_0 este centrul poligonului regulat. Făcînd o translaţie de vector $-z_0$ putem presupune că centrul poligonului este originea sistemului de axe. În acest caz $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt rădăcinile unei ecuaţii de forma $z^n - \alpha = 0$. Pe de altă parte z verifică ecuaţia $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = 0 \Leftrightarrow nz^{n-1} - (n-1)z^{n-2}\sum_{k=1}^{n} z_k +$

$$+ (n-2)z^{n-3}\sum z_1 z_2 + \ldots + (-1)^{n-2} 2z \cdot \sum (z_1 z_2 \ldots z_{n-2}) +$$

$$+ (-1)^{n-1}\sum (z_1 z_2 \ldots z_{n-1}) = 0$$

dar scriind relaţiile lui Viète

pentru ecuaţia $z^n - \alpha = 0$, rezultă că toate sumele de mai sus sînt nule şi ecuaţia se scrie $z^{n-1} = 0 \Rightarrow z = 0$ şi afixul lui z este centrul polig.

55. Evident z_k sînt afixele unui poligon regulat cu centrul în punctul de afix b şi avînd un vîrf de afix a, vîrfurile se află pe cercul de rază $|a|$; $|z_k - b| = |a\varepsilon^k| = |a|$; Afixul fiecărui vîrf se obţine dînd lui k valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Lungimea unei laturi fiind $|z_{k+1} - z_k| =$

$= |a\varepsilon^k(\varepsilon - 1)| = |a|\,|\varepsilon - 1|$.

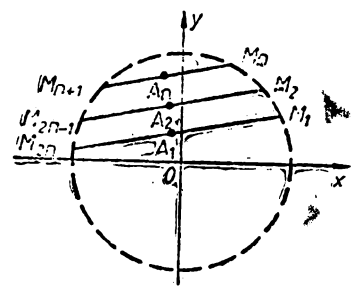


Fig. 42

56. Fie $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$ afixele numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ mijloacele segmentelor $|M_1M_{2n}|$, $|M_2M_{2n-1}| \ldots |M_nM_{n+1}|$. Din enunţ rezultă că $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$ sînt situate pe un semi-

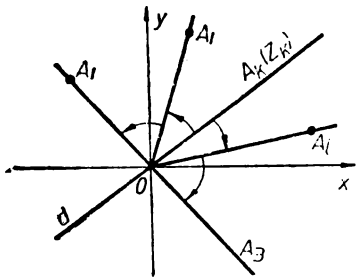


Fig. 43

cerc cu centrul în origine iar lungimile coardelor

$$M_1M_{2n},\ M_2M_{2n-1},\ \ldots,\ M_nM_{n+1}$$

sînt ordonate descrescător.

Rezultă deci că $OA_1 \leqslant OA_2 \leqslant \ldots \leqslant OA_n$, adică

$$\left|\frac{z_1+z_{2n}}{2}\right| \leqslant \left|\frac{z_2+z_{2n-1}}{2}\right| \leqslant \ldots \leqslant \left|\frac{z_n+z_{n+1}}{2}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_1+z_{2n}| \leqslant |z_2+z_{2n-1}| \leqslant \ldots \leqslant |z_n+z_{n+1}|.$$

R.M.T. 1/1984

57. Într-un sistem de axe de coordonate considerăm o dreaptă OA_k unde $A_k(z_k)$. Atunci în fiecare semiplan se pot afla mai mult de două puncte, deci al şaselea punct poate fi dreapta OA_k, prin urmare valoarea maximă a lui n este 6.

58. Printr-o translaţie şi o rotaţie se ajunge la situaţia în care centrul poligonului este originea sistemului de axe, iar vîrfurile poligonului sînt imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul m ale unui număr real r, pozitiv.

$$z_k = \sqrt[m]{r} \cdot \varepsilon^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \text{ adică}$$

$$z_k = r\varepsilon^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(r\varepsilon^k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0(r\varepsilon^k)^m + a_1(r\varepsilon^k)^{m-1} \ldots + a_{m-1}r\varepsilon^k + a_m) =$$

$$= a_0 r^m \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{km}\right) + a_1 r^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k(m-1)} + \ldots + a_{m-1}r \sum_{k=0}^{h-1} \varepsilon^k + na_m = na_m,$$

dar $\varepsilon^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \Rightarrow \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} P(z_k)}{n} = P(0) = a_m.$

59. Luăm originea sistemului de coordonate în punctul $O \in \text{int.}\ (A_1A_2 \ldots A_n)$. Această alegere nu afectează generalitatea teoremei, deoarece

$$\text{Im} \sum_{k=0}^{n} \overline{(a_k+p)}(a_{k+1}+p) = \text{Im} \sum_{k=1}^{n} (\bar{a}_k+\bar{p})(a_{k+1}+p) =$$

$$= \text{Im} \sum_{k=1}^{n} (\bar{a}_k a_{k+1} + \bar{p}a_{k+1} + p\bar{a}_k + p\bar{p}) = \text{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1} + \text{Im} \sum_{k=1}^{n} (p\bar{a}_k + \bar{p}a_{k+1}) +$$

$$+ \text{Im}\,|p|^2 = \text{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1} \text{ întrucît } \sum_{k=1}^{n} p\bar{a}_k + \bar{p}a_{k+1} \text{ şi } |p|^2 \text{ sînt numere reale.}$$

Într-adevăr $\sum_{k=1}^{n} p\bar{a}_k + \bar{p}a_{k+1} = p\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k + \bar{p}\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = pA + \bar{p}A$ care evident este reală $\left(A = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

Aşadar, orice translaţie aplicată poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ nu va schimba aria sa. Dacă notăm cu $a_k = r_k(\cos t_k + i \sin t_k)$; $k = \overline{1, 2, \ldots n}$ obţinem $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1} =$

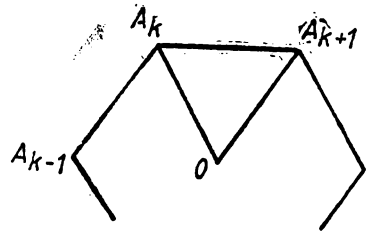


Fig. 44

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} r_k r_{k+1} [\cos (t_{k+1} - t_k) + i \sin (t_{k+1} - t_k)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r_k r_{k+1} \sin (t_{k+} -$$

$$- t_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma [OA_kA_{k+1}] = \sigma [A_1A_2 \ldots A_n] \text{ unde } \sigma[OA_kA_{k+1}] =$$

$$= \frac{1}{2} r_k r_{k+1} \sin (t_{k+1} - t_k). \text{ (Matem.—Sofia)}$$

Aplicaţia 1) Punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt colineare dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a_{k+1} = 0$ unde $A_k(a_k)$, $k = \overline{1, 2, \ldots n}$; $(a_{k+1} = a_1, A_{k+1} = A_1)$ (Matem. — Sofia)

60. Se deduce imediat că afixele punctelor M, N, P, Q sînt: $m = \frac{a - kb}{1 - k}$, $n = \frac{b - kc}{1 - k}$, $p = \frac{c - kd}{1 - k}$, $q = \frac{d - ka}{1 - k}$ unde a, b, c, d sînt afixele punctelor A, B, C, D.

Utilizînd rezultatul (18) obţinem

$$\sigma[APB] + \sigma[BQC] + \sigma[CMD] + \sigma[DNA] = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}p + \bar{p}b + \bar{b}a) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{b}q + \bar{q}c + \bar{c}b) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{c}m + \bar{m}d + \bar{d}c] + \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{d}n + \bar{n}a + \bar{a}d) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{b}a + \bar{c}b + \bar{d}c + \bar{a}d + \bar{a}p + \bar{p}b + \bar{b}q + \bar{q}c + \bar{d}n + \bar{n}a + \bar{m}d +$$

$$+ \bar{c}m] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{b}a + \bar{c}b + \bar{d}c + \bar{a}d) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{a}p + \bar{p}b + \bar{b}q + \bar{q}c + \bar{m}d +$$

$$+ \bar{c}m + \bar{d}n + \bar{n}a) = S + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{a} \frac{c - kd}{1 - k} + b \frac{\bar{c} - k\bar{d}}{1 - k} + \bar{b} \frac{d - kd}{1 - k} + c \frac{\bar{d} - k\bar{a}}{1 - k} + \right.$$

$$\left. + \bar{d} \frac{\bar{a} - k\bar{b}}{1 - k} + \bar{c} \frac{a - kb}{1 - k} + \bar{d} \frac{b - kc}{1 - k} + a \frac{\bar{b} - k\bar{c}}{1 - k} \right) = S + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - k} (\bar{a}c + \bar{b}c + \right.$$

$$\left. + \bar{b}d + c\bar{d} + d\bar{a} + \bar{c}a + \bar{d}b + a\bar{b}) - \frac{k}{1 - k} (\bar{a}d + b\bar{d} + \bar{b}a + c\bar{a} + d\bar{b} + \bar{c}b + \right.$$

$$\left. \bar{d}c + a\bar{c}) \right) = S + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{b}c + cd + d\bar{a} + a\bar{b}}{1 - k} \right) - \frac{k}{1 - k} (\bar{a}d + \bar{b}a + \bar{c}b + \bar{d}c) =$$

$$= S + \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{a}d + \bar{b}a + \bar{c}b + \bar{d}c) = S + S = 2S.$$

61. Fie punctul 0 originea sistemului de coordonate; a, b, c, d afixele punctelor A, B, C, D; Deoarece tripletele O, C, B şi O, D, A sînt colineare există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a.î. $d = \alpha a$ şi $c = \beta b$, deci $c\bar{b}, b\bar{c}, d\bar{a}, \bar{d}a$ sînt reale.

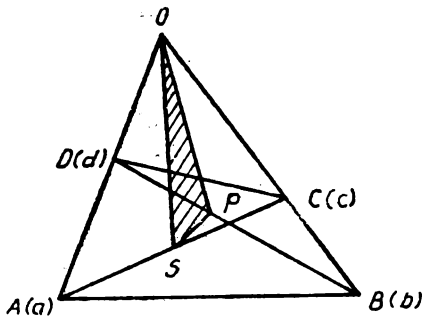


Fig. 45

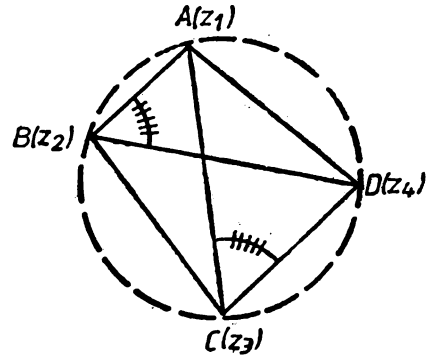


Fig. 46

Utilizînd (1.8), obţinem

$$\sigma[ABCD] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}d + \bar{d}a) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{c}d), \text{ dar cum}$$

$$P\left(\frac{b+d}{2}\right) \text{ şi } S\left(\frac{a+c}{2}\right) \Rightarrow \sigma[OSP] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}\cdot\frac{b+d}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{a}d + \bar{c}b + \bar{c}d) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{c}d) = \frac{1}{4}\,\sigma[ABC].$$

62. Fie $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$.

a) Din $z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \Rightarrow z_1, z_2, z_3, z_4$ sînt afixele vîrfurilor unui paralelogram, dar cum $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = ai \Rightarrow \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow M_2M_3 \perp M_1M_2$, deci $M_1M_2M_3M_4$ este dreptunghi. Reciproc, evident.

b) Din condiţiile date rezultă în plus că:

$$\left|\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right| = 1 \Rightarrow |z_3 - z_1| = |z_1 - z_2|, \text{ deci}$$

$M_1M_2M_3M_4$ este pătrat.

63. $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD}) \Leftrightarrow$

$$\arg\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} \Leftrightarrow \arg\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} \in \mathbf{R}$$

Raportul de mai sus notat cu (z_1, z_2, z_3, z_4) se numeşte raport anarmonic Deci patru puncte sînt conciclice dacă raportul anarmonic al afixelor este real.

64. 1) Notăm cu $A = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$. Se arată uşor că $\bar{A} = A$, dec $A \in \mathbf{R}$. Pentru a arăta că A este pozitiv, utilizăm forma trigonometrică

a numerelor $z_k = r(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Putem presupune că $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_1 + 2\pi$, atunci după calcule se obține

$$A = \frac{\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}}{\sin \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}.$$

Expresia din dreapta este pozitivă, deoarece toate unghiurile funcției sinus se află în intervalul $(0, \pi)$.

2) Deoarece A este pozitiv membrul din stînga egalității (2) se mai scrie $|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |z_1 z_2 + z_3 z_4 - z_1 z_4 - z_2 z_3| = |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| = |z_1 - z_3|\,|z_2 - z_4|$

§ 4. FUNCȚII

1. 1) $\operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \operatorname{Im} \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}$. Fie $z = x + iy$ deci

$$\operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \operatorname{Im} \frac{ac|z|^2 + bd + iy(ad - bc)}{|cz + d|^2} = \frac{y}{|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

2) Trebuie arătat că pentru orice $u \in P$, există $z \in P$, unic determinat, astfel încît $f(z) = u$ și ecuația $f(z) = u$ are în P soluții pentru orice $u \in P$;

Din $f(z) = u \Rightarrow z = \frac{ud - b}{-uc + a}$, $u \neq \frac{c}{a} \in \mathbf{R}$ dar în baza lui 1) $\operatorname{Im} z = \frac{|\operatorname{Im} u}{|-uc + a|^2}$.

2. a) $f(z) = z \Rightarrow \frac{2 - iz}{z + i} = z \Rightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - i$.

b) $z \in C(A, 1) \Rightarrow |z + i| = 1 \Rightarrow f(z) + i = \frac{2 - iz}{z + i} + i =$

$$= \frac{2 - iz + iz - 1}{z + i} = \frac{1}{z + i}.$$

$$|f(z) + i| = \frac{1}{|z + i|} = 1 \Rightarrow |f(z) + i| = 1 \Rightarrow f(z) \in C(A, 1).$$

Fie $u \in C(A, 1)$; se arată că există $z \in C(A, 1)$ astfel încît $f(z) = u$.

3. Să arătăm că f este injectivă. Fie $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2z_1 + |z_1| = 2z_2 + |z_2| \Leftrightarrow 2(z_1 - z_2) = |z_2| - |z_1| \in \mathbf{R} \quad (1)$$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow y_1 = y_2 \text{ deci}$$

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ și relația (1) devine

$$2(x_1 - x_2) = \sqrt{x_2^2 + y_1^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Dacă $x_1 \neq x_2$, atunci $2 = \frac{-x_1 - x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \leqslant \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1| + |x_2|} = 1$ fals,

deci $x_1 = x_2 \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow f =$ injectivă.

Fie $\tau \in \mathbf{C}$, să arătăm că $(\exists)\ z \in \mathbf{C}$ astfel încît $f(z) = \tau \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2z + |z| = \tau \Rightarrow 2(x + iy) + \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha + i\beta \Rightarrow y = \frac{\beta}{2} \text{ şi}$$

$$2x + \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha - 2x \geqslant 0$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x\alpha + \alpha^2 \Rightarrow 3x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0.$$

Ecuaţia are soluţii $x \in \mathbf{R}$ deoarece $\Delta' = \alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 > 0$ deci $(\exists)\ z = x + iy$ astfel încît $f(z) = \tau$.

G.M. 2/1983

4. a) Fie $f(a_1 + ib_1) = f(a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 + b_1 z_0 = a_2 + b_2 z_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = z_0(b_2 - b_1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \\ b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$. Fie $z = \alpha + \beta i \in \mathbf{C}$ şi să găsim $z' = a + bi \in \mathbf{C}$ astfel încît $f(z') = z$; $(a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

Notînd cu $z_0 = u + iv$, $u, v \in \mathbf{R}$, $v \neq 0$ egalitatea $f(z') = z$ devine

$$f(a + ib) = \alpha + \beta i \Leftrightarrow a + bz_0 = \beta + i\beta \Leftrightarrow a + b(u + iv) =$$

$$= \alpha + i\beta \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + bu = \alpha \\ bv = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \alpha - \dfrac{u}{v}\beta \\ b = \dfrac{\beta}{v} \end{array}\right. \text{ aşadar pentru}$$

$z' = \alpha - \frac{u}{v}\beta + \frac{\beta}{v} i$ avem $f(z') = z$.

b) Egalitatea $f = f^{-1} \Leftrightarrow f \circ f = 1_{\mathbf{C}} \Leftrightarrow (f \circ f)(a + ib) = a + ib$ $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$. Cu notaţia $z_0 = u + iv$, ultima egalitate se scrie succesiv:

$$f(a + bz_0) = a + ib \Leftrightarrow f(a + bu + bvi) = a + ib \Leftrightarrow$$

$$a + bu + bvz_0 = a + ib \Leftrightarrow a + bu + bvu + bv^2 i = a + bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + bu + bvu = a \\ bv^2 = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} bu(1 + v) = 0 \\ b(v^2 - 1) = 0 \end{array}\right., \ (\forall)\ a, b \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Luînd $b \neq 0$, din a doua egalitate din (2) rezultă $v \in \{-1, 1\}$. Dacă $v = -1$, prima egalitate se verifică pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, deci numerele z căutate sînt de forma $z_0 = u - i$, $u \in \mathbf{R}$. Dacă $v = 1$, prima egalitate din (2) devine:

$$2bu = 0 \text{ şi alegînd } b \neq 0 \Rightarrow u = 0 \text{ aşadar } z_0 = i.$$

În concluzie $f = f' \Leftrightarrow z_0 \in \{i\} \cup \{u - i,\ u \in \mathbf{R}\}$.

G.M. 1/1988

5. Înlocuind z cu ωz în egalitatea dată obţinem:

$$f(\omega z) \cdot f(\omega^2 \cdot z) \cdot \ldots \cdot f(\omega^{n-1} \cdot z) \cdot f(\omega^n \cdot z) = \lambda, \ (\forall) z \in \mathbf{C}.$$

Dar $\omega^n = -1$ deci $f(-z) \cdot f(\omega z) \cdot f(\omega^2 z) \cdot \ldots \cdot f(\omega^{n-1} z) = \lambda$ dar cum

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow f(\omega^k z) \neq 0 \text{ deci } f(-z) = f(z), \ (\forall)\ z \in \mathbf{C}.$$

G.M. 1/1980

6. Observăm că ε este o rădăcină de ordinul 1983 a unității deci $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon^{1983} = 1$ și $|\varepsilon^k| = 1$ $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
Se verifică imediat că $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = |z|$ verifică condițiile din enunț; vom arăta că nu există o altă funcție cu proprietatea din enunț. Să presupunem că există $g: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $g \neq f$ astfel încît

$$g(z) + g(\varepsilon z) = 2|z| \quad (\forall)\, z \in \mathbf{C} \quad (1)$$

așadar $(\exists)\, z_0 \in \mathbf{C}$ cu $g(z_0) \neq |z_0|$.
Înlocuind în (1) obținem:

1) $g(z_0) + g(\varepsilon z_0) = 2|z_0|$,
2) $g(\varepsilon z_0) + g(\varepsilon^3 z_0) = 2|\varepsilon z_0| = 2|z_0|$,
3) $g(\varepsilon^2 z_0) + g(\varepsilon^2 z_0) = 2|\varepsilon^2 z_0| = 2|z_0|$,
4) $g(\varepsilon^3 z_0) + g(\varepsilon^4 z_0) = 2|\varepsilon^3 z_0| = 2|z_0|$.

— — — — — — — — — — — —

1983) $g(\varepsilon^{1982} \cdot z_0) + g(z_0) = 2|z_0 \varepsilon^{1982}| = 2|z_0|$
Înmulțind fiecare egalitate de ordin par cu -1 și adunînd obținem
$2g(z_0) = 2|z_0| \Rightarrow g(z_0| = |z_0|$ contradicție.

G.M. 1982

7. a) Fie $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Dacă f este pară atunci evident $f(i\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$. Reciproc, dacă $f(i\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ atunci făcînd substituția $x \to xi \Rightarrow f(ix) = a_0 + a_1 ix - a_2 x^2 - a_3 ix^3 + \ldots \in \mathbf{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varsigma = a_1 x - a_3 x^3 + a_5 x^5 - \ldots = 0$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$ adică f are toți coeficienții termenilor de grad impar nuli, așadar f este funcție pară.

b) Dacă f este impară, atunci toți coeficienții termenilor de grad par sînt nuli, deci evident $f(i\mathbf{R}) \subset i\mathbf{R}$.
Reciproc: fie $f(i\mathbf{R}) \subset i\mathbf{R}$ și făcînd substituția $x \to ix$ rezultă
$f(ix) = a_0 + a_1 xi - a_2 x^2 - a_3 x^3 i \ldots = a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 \ldots + i(a_1 x - a_3 x^3 \ldots) \in i\mathbf{R} \Rightarrow a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 \ldots = 0$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = a_{2k} = 0 \Rightarrow f$ impară.

G.M. 6/1987

8. Din ipoteză, înlocuind z cu ± 1, și $\pm i$ obținem:

(1) $|P(1)| = 1 \Leftrightarrow (1 + a + b)(1 + \bar{a} + \bar{b}) = 1 \Leftrightarrow a + \bar{a} + b + \bar{b} + a\bar{b} + \bar{a}b + |a|^2 + |b|^2 = 0.$

(2) $|P(-1)| = 1 \Leftrightarrow (1 - a + b)(1 - \bar{a} + \bar{b}) = 1 \Leftrightarrow -a - \bar{a} + b + \bar{b} - a\bar{b} - \bar{a}b + |a|^2 + |b|^2 = 0$

(3) $|P(i)| = 1 \Leftrightarrow (1 + ai + b)(1 - \bar{a}i + \bar{b}) = 1 \Leftrightarrow i(\bar{a} - a) - (b + \bar{b}) + i(a\bar{b} - b\bar{a}) + |a|^2 + |b|^2 = 0$

(4) $|P(-i)| = 1 \Leftrightarrow (1 - ai + b)(1 + \bar{a}i + \bar{b}) = 1 \Leftrightarrow -i(\bar{a} - a) - (b + \bar{b}) - i(a\bar{b} - b\bar{a}) + |a|^2 + |b|^2 = 0$

Adunînd (1) cu (2) și (3) cu (4) obținem $b + \bar{b} + |a|^2 + |b|^2 = 0$ și
$-(b + \bar{b}) + |a|^2 + |b|^2 = 0 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 0 \Rightarrow |a| = |b| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow P(z) = z^2$.

9. Efectuînd substituţiile: $z \to -z$, $z \to iz$ şi $z \to -iz$ obţinem:

(1) $P(z) + P(-z) = z^2 - P(iz)$,

(2) $P(-z) + P(z) = z^2 - P(-iz)$,

(3) $P(iz) + P(-iz) = -z^2 - P(-z)$,

(4) $P(-iz) + P(iz) = -z^2 - P(z)$.

Din (1) şi (2) $\Rightarrow P(iz) = P(-iz)$ şi din (3) şi (4) $\Rightarrow P(z) = P(-z)$

Din (1) şi (4) obţinem: $\begin{cases} 2P(z) = z^2 - P(iz) \\ 2P(iz) = -z^2 - P(z) \end{cases}$ şi eliminînd $P(iz)$ rezultă

$$P(z) = z^2.$$

10. Pentru $n = 1$, egalitatea nu poate avea loc

Pentru $n = 0$, rezultă $z = 1$.

Fie $z \in \mathbf{C}$, astfel încît $|z| = r \in \mathbf{N}^*$ şi pentru care există $n \in \mathbf{N}$ cu proprietatea $z^n - z - n = 0 \Rightarrow z^n = z + n \Rightarrow |z|^n \leqslant |z| + n \Rightarrow$

$$r^n \leqslant r + n. \text{ Să arătăm că } r \leqslant 2.$$

Într-adevăr dacă $r = 3$, $3^n \leqslant 3 + n$ nu se verifică decît pentru $n = 1$ care nu convine (se verifică prin inducţie că $3^n \geqslant 3 + n$, $(\forall)\, n \geqslant 2$).

În mod analog dacă $r > 3$.

Pentru $r = 2$, inegalitatea devine $2^n \leqslant n + 2$ care se verifică numai pentru $n = 1$ şi $n = 2$ (se verifică prin inducţie că $2^n > n + 2$ $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $(n \geqslant 3)$

Valoarea $n = 1$ nu convine, deci $n = 2$ şi ecuaţia se scrie

$$z^2 - z - 2 = 0 \text{ cu soluţiile } z_1 = -1 \text{ şi } z_2 = 2$$

Dar $|z_1| = 1 \neq 2$ deci $z_2 = 2$. Pentru $r = 1$, fie $z \in \mathbf{C}$ astfel încît $z^n - z - n = 0$, $n = z^n - z \Rightarrow n \leqslant |z|^n + |z| \Rightarrow n \leqslant 2$, deci $n = 2$ de unde rezultă că $z = -1$, aşadar $M = \{1, 2, -1\}$.

G.M. 4/1986

11. a) Fie A o mulţime cu proprietatea (P) astfel încît $\mathbf{R} \subset A \subset \mathbf{C}$. Arătăm că dacă $A \neq \mathbf{R} \Rightarrow A = \mathbf{C}$. Într-adevăr, dacă $A \neq \mathbf{R}$, există $z = a + ib \in A - \mathbf{R}$ cu $a \in \mathbf{R}$ şi $b \in \mathbf{R}^*$, dar $-a \in \mathbf{R} \subset A$ şi atunci $-a + z \in A \Rightarrow bi \in A$ şi cum $b \in \mathbf{R}^* \Rightarrow b^{-1} \in \mathbf{R} \subset A \Rightarrow (ib)\, b^{-1} = i \in A \Rightarrow i \in A$. Luînd $z = u + iv \in \mathbf{C}$ arbitrar $\Rightarrow u + iv = z \in A$ (deoarece $u, v, i \in A$) $\Rightarrow \mathbf{C} \subset A \Rightarrow A = \mathbf{C}$.

b) Dacă $p > 0$, p — prim fixat, considerăm $B = \left\{ \frac{k}{p^A} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z},\ p \in \mathbf{N} \right\}$.

Se verifică uşor că B are proprietatea (P) şi verifică incluziunile $\mathbf{Z} \subset B \subset \mathbf{Q}$. De asemenea luînd $C = \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ mulţimea C verifică proprietatea P şi incluziunile $\mathbf{Q} \subset C \subset \mathbf{R}$.

12. a) Arătăm mai întîi că discul unitate $D_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ este inclus în mulţimea A. Într-adevăr $-1, 1 \in A \Rightarrow 0 = 1 - 1 \in A$.

Fie $z \in \mathbf{C}$ cu $0 < |z| < 1$ şi fie M imaginea geometrică a lui z şi N mijlocul segmentului OM. Perpendiculara în N pe OM intersectează cercul unitate în punctele $N_1(z_1)$ şi $N_2(z_2)$.

Patrulaterul ON_1MN_2 fiind romb şi $z_1, z_2 \in A$, rezultă că $z = z_1 + z_2 \in A$, deci $D_1 \subset A$

b) Arătăm prin inducţie că discul $D_{2^n} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 2^n\}$ este inclus în A. Pentru $n = 0$ s-a demonstrat mai sus; presupunem că $D_{2^n} \subset A$ şi

să demonstrăm că $D_{2^{n+1}} \subset A$. Într-adevăr, pentru orice $z \in D_{2^{n+1}}$, avem $\frac{z}{2} \in D_{2^n} \subset A$ și deci $z = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \in A \Rightarrow D_{2^{n+1}} \subset A$.

Deoarece $\mathbf{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_{2^n} \Rightarrow \mathbf{C} \subset A$, adică $A = \mathbf{C}$.

G.M. 7/1986

13. Deoarece $a_i \neq 0$, putem presupune că $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbf{C}$ deci

$$a_{i+1} = a_i z, \ (\forall) \, i \geqslant 1, \ i \in \mathbf{N}^*.$$

Fie k cel mai mic număr natural, mai mare ca 2 pentru care este îndeplinită condiția (2)
Scriind pentru k condiția (2) obținem:

$$a_1^2 + a_1^2 z^2 + \ldots + a_1^2 z^{2(k-1)} = a_1^2 (1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1})^2$$

deci $1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2(k-1)} = (1 + z + \ldots + z^{k-1})^2$ (3)
dar $z_k \neq \pm 1$ și deci ultima egalitate devine:

$$\frac{z^{2k} - 1}{z^2 - 1} = \frac{(z^k - 1)^2}{(z - 1)^2} \Leftrightarrow (z^k - 1)(z^{k-1} - 1) = 0$$

$\Rightarrow z^k = 1$ sau $z^{k-1} = 1$. Nu putem avea $z^{k-1} = 1$ căci atunci egalitatea (3) va fi adevărată pentru $k - 1$ și nu pentru k, cel mai mic pentru care este îndeplinită (2). Așadar $z^k = 1$ deci z este o rădăcină complexă a unității diferită de ± 1. Avem prin urmare

$$f(k+1) = a_{k+1} = a_1 z^k = a_1$$
$$f(k+2) = a_2$$
$$\vdots$$
$$f(k+s) = a_s$$

Fie $z_0 = r(\cos t + i \sin t)$, $r > 0$, $t \in (0, 2\pi)$ și inegalitatea cerută se scrie $\frac{\pi}{n} < t < 2\pi - \frac{\pi}{n}$. Dacă $0 < t \leqslant \frac{\pi}{n}$ atunci $0 < nt \leqslant \pi$ și cum $f(z_0) = 0 \Rightarrow$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k r^k (\cos kt + i \sin kt) = 0,$$

unde partea imaginară este zero

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k r^k \sin kt = 0, \text{ absurd.}$$

Dacă $2\pi - \frac{\pi}{n} \leqslant t < 2\pi$ și cum f are coeficienți reali rezultă că $\bar{z}_0$ este soluție $\Rightarrow t_1 = 2\pi - t \Rightarrow 0 < t_1 \leqslant \frac{\pi}{n}$ — contradicție, deci $\frac{\pi}{n} < t < 2\pi - \frac{\pi}{n}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Buşneag D., Maftei I. — *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor;* Scrisul românesc, 1983.
2. Cocuz Mihai — *Culegere de probleme de matematică;* Editura Academiei, Bucureşti, 1984.
3. Cuculescu I. — *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor;* Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
4. Cucurezeanu I. — *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor;* Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.
5. Faddeev F., Sominski I. — *Recueil d'éxercices d'algèbre supérieure;* Moscova, 1972.
6. Ioachimescu A. G. — *Culegere de probleme de algebră;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
7. Ionescu-Ţiu C., Pîrşan L. — *Algebră şi analiză matematică pentru admitere în facultate;* Editura Albatros, Bucureşti, 1974.
8. Mihăileanu N. — *Complemente de algebră elementară;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
9. Morozova E. A., Petrakov I. S., Skvontov V. A. — *Olimpiadele internaţionale de matematică;* Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
10. Năstăsescu C., Niţă C., Brandiburu M., Joiţa D. — *Exerciţii şi probleme de algebră;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
11. Negoescu N. C. — *Probleme cu probleme;* Editura Facla, Timişoara, 1975.
12. Panaitopol L., Ottescu C., — *Probleme date la Olimpiadele de matematică (1968—1974);* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.
13. Panaitopol L., Drăghicescu I. C. — *Polinoame şi ecuaţii algebrice;* Editura Albatros, 1980.
14. Radu D., Ionescu B., Iliescu I. — *Probleme de matematică pentru admiterea în învăţămîntul superior;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.
15. Stamate I., Stoian I., — *Culegere de exerciţii şi probleme de algebră;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
16. Stănăşilă O., Brînzănescu V., Ianuş S., Ionescu B. — *Culegere de probleme pentru admitere în învăţămîntul superior (1984—1987);* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.
17. Teodorescu N., Constantinescu A., Pîrşan L., Popescu-Zorica A. Radoviciu-Mărculescu P., Ţena M. — *Probleme din Gazeta matematică,* ediţie selectivă şi metodologică: Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
18. Tomescu I. — *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor;* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti

ISBN 973-30-1639-X